Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Paul-Andi Nagy

Le spectre du laplacien agissant sur les p-formes différentielles d'un fibré en cercle

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 17 (1998-1999), p. 185-195
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__185_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **17** (1999) 185–195

LE SPECTRE DU LAPLACIEN AGISSANT SUR LES p-FORMES DIFFÉRENTIELLES D'UN FIBRÉ EN CERCLE

Paul-Andi NAGY

1. Introduction

Soit (Z^n, g) une variété riemannienne connexe, compacte et orientée. Notons $\Lambda^p(Z)$ l'espace des p-formes différentielles C^∞ muni du produit scalaire $\langle\alpha, \beta\rangle = \int_Z \alpha \wedge \star\beta$ où $\star$ désigne l'opérateur de Hodge. Le laplacien agissant sur les p-formes de Z est défini par

$$\Delta = dd^* + d^* d$$

où d désigne la différentielle extérieure et d^* la codifférentielle, adjoint formel de d par rapport au produit scalaire $\langle\cdot, \cdot\rangle$. La théorie elliptique nous assure que cet opérateur a un spectre discret, noté

$$0 = \lambda_{0,p}(Z, g) < \lambda_{1,p}(Z, g) \leqslant \lambda_{2,p}(Z, g) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n,p}(Z, g) \leqslant \ldots .$$

La multiplicité de la valeur propre nulle est le p-ième nombre de Betti de Z, un invariant topologique. Les valeurs propres non-nulles se répètent avec la multiplicité, s'il y a lieu.

Afin de comprendre, sur des cas particuliers, le lien entre la géométrie de la variété et le spectre des p-formes il est important d'avoir des exemples de calcul explicite du p-spectre. Ces exemples peuvent également servir pour tester des conjectures. À notre connaissance, les variétés riemanniennes (Z^n, g) où le spectre des p-formes, $1 \leqslant p \leqslant n - 1$ a été calculé sont contenues dans le tableau suivant.

$\mathbb{R}^n/\Gamma$	tores plats	[2]
S^n	sphères de courbure constante	[17]
$P\mathbb{C}^n$	projectif complexe canonique	[17]
G	groupes de Lie compacts avec une métrique bi-invariante	[24]
H_{2n+1}	variétés de Heisenberg, pour les 1-formes invariantes par S^1	[11]

Notons que les exemples cités ci-dessus possèdent des groupes d'isométries de dimension suffisamment grande, ce qui permet d'appliquer les méthodes de la théorie des

Classification math. : 58G25, 53C20.

représentations pour le calcul du spectre. Remarquons aussi que, à l'exception des tores plats et des produits riemanniens, on ne connaît pas d'exemples de calcul explicite du spectre des formes d'une famille continue, non constante, de métriques.

Dans cet article on considère la question suivante. Soit (N^n, g) une variété riemannienne compacte, connexe et orientée et $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ un fibré principal au-dessus de N. Fixons $\theta \in \Lambda^1(M, \mathbb{R})$ une forme de connexion principale et munissons M de la famille de métriques $(g_T)_{T>0}$ définie par

$$g_T = \pi^* g + T^2 \theta \otimes \theta. \tag{1}$$

g_T est une famille continue de métriques invariantes par S^1. Pour tout $T > 0$, $\pi : (M, g_T) \to (N, g)$ est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques.

QUESTION 1.1. — *Est-il possible d'exprimer le spectre du laplacien agissant sur les p-formes de (M, g_T) par le biais des fonctions algébriques dépendant de T et du spectre d'un opérateur différentiel " horizontal" (qui ne dépend pas de T) canoniquement associé à la géométrie du fibré?*

La réponse à cette question serait donc un principe de séparation des variables; d'un coté la géométrie de la fibre et de l'autre la métrique de la base et la géométrie du fibré. Les deux cas suivants sont déjà connus.

• Lorsque $p = 0$ (le cas des fonctions) on déduit de [1] que le 0-spectre de (M, g_T) est de la forme $\mu + \frac{k^2}{T^2}$ où μ est dans le spectre du laplacien horizontal agissant sur les fonctions k-équivariantes de (M, g_T), $k \in \mathbb{Z}$ (voir aussi la section 2).

• Lorsque (M, g_T) est un produit riemannien (c'est-à-dire que M est un fibré trivial muni de la connexion plate canonique) le p-spectre de (M, g_T) est donné par

$$\{\lambda_{n,p}(N, g) + \frac{k^2}{T^2}\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}} \cup \{\lambda_{n,p-1}(N, g) + \frac{k^2}{T^2}\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}. \tag{2}$$

Dans les deux cas précédents, le spectre du laplacien horizontal qui intervient dans l'expression du p-spectre de (M, g_T) n'est pas connu en général. Cependant, le comportement en T du p-spectre de (M, g_T) est déterminé par des formules exactes.

Le but de cet article est de présenter la réponse à la question 1.1 dans le cadre suivant :

(3)
(N^{2r}, g, J) est une variété de Hodge, avec forme de Kähler ω vérifiant $[\omega] \in H^2(N, \mathbb{Z})$. Le fibré $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ est donné par $c_1(M) = [\omega]$ et θ est une 1-forme de connexion dans M de courbure égale à la forme de Kähler de (N, g).

Dans ce cas, le p-spectre de (M, g_T) est exprimé par des fonctions algébriques de variables T et le spectre du laplacien horizontal (qui ne dépend pas de T). Lorsque ce spectre est connu il est possible de produire de nouveaux exemples de calculs explicites du spectre. Donnons deux exemples de telles situations (cf. la section 2).

EXEMPLE 1.1. — *Les sphères de Berger.*

Considérons le fibré principal donné par la fibration de Hopf $S^1 \to S^{2r+1} \xrightarrow{\pi} P\mathbb{C}^r$. Soit V le champ de vecteurs induit sur la sphère par l'action du cercle. Lorsque S^{2r+1} est muni de sa métrique canonique de courbure 1, notée g_0, soit θ la 1-forme associée à V via g_0. C'est une forme de connexion principale dans la fibration de Hopf. Soit $(P\mathbb{C}^r, g, J)$ muni de la métrique de Fubini-Study et de la structure complexe canonique, renormalisées de façon que $d\theta = \pi^* \omega$ où ω est la forme de Kähler de $(P\mathbb{C}^r, g, J)$. Alors $(P\mathbb{C}^r, g, J)$ et la fibration de Hopf muni de la forme de connexion θ vérifient les conditions de (3). Munissons S^{2r+1} des métriques g_T définies en (1). Dans la section 2 on explique comment calculer le spectre des formes de la famille (S^{2r+1}, g_T), $T > 0$. Remarquons que $g_{\sqrt{2}} = g_0$.

EXEMPLE 1.2. — *Une classe de variétés d'Heisenberg.*

Soit H_{2r+1} le groupe d'Heisenberg et Γ un sous-groupe discret cocompact (voir [11] pour la classification de ces sous-groupes). On a alors une fibration principale

$$S^1 \to H_{2r+1}/\Gamma \to T_\Gamma \tag{4}$$

où T_Γ est un tore de dimension $2r$. Munissons H_{2r+1}/Γ de la métrique invariante à gauche canonique (de matrice I_{2r+2} dans la base canonique de H_{2r+1}). Par rapport à cette métrique soit θ la 1-forme associée à V, le champ de vecteurs induit par l'action du cercle. C'est une forme de connexion principale dans le fibré considéré, de courbure $\omega_0 = \sum_{i=1}^{r} dy_i \wedge dx_i$. Soit $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2r}), \omega)$ l'ensemble des structures complexes linéaires J sur $\mathbb{R}^{2r}$, compatibles avec ω_0 et telles que $\omega_0(v, Jv) < 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^{2r}$, $v \neq 0$. Un tel J produit une métrique kählerienne plate sur T_Γ, de forme de Kähler ω_0, par la formule $h_J = -\omega_0(\cdot, J)$. Alors la fibration (4) muni de la connexion θ et le tore (T_Γ, h_J, J) vérifie les conditions de (3). Par la construction de (1) on obtient une famille de métriques $h_{J,T}$ sur H_{2r+1}/Γ indexée par $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2r}, \omega_0) \times]0, \infty[$. Dans la section 2 on indiquera comment calculer le spectre des formes de cette famille en se servant de la réponse à la question 1.1.

Répondre à la question (1.1) permettrait d'étudier la limite du p-spectre de (M, g_T) lorsque $T \to 0$, $T \to \infty$. Ces questions ont été beaucoup étudiées dans la littérature. Rappelons quelques résultats obtenus.

- Lorsque $T \to 0$ la famille (M, g_T) converge vers (N, g) à courbure et diamètre bornés. Alors le p-spectre de (M, g_T) converge, dans un certain sens, vers le p-spectre de (N, g) (cf. [6], [8], [18]). En particulier, le nombre des petites valeurs propres du laplacien des p-formes de (M, g_T) lorsque $T \to 0$ est donné par la suite spectrale de Leray (voir aussi [5]). Dans [5] les auteurs donnent une estimation asymptotique quand $T \to 0$ des p-valeurs propres petites où l'on voit apparaître la courbure du fibré.

Dans le contexte décrit en (3) on retrouve facilement ces résultats. De plus, on obtient des formules exactes en T pour les petites valeurs propres.

• Lorsque $T \to \infty$ la famille d'espaces métriques (M, d_{g_T}) converge au sens de Gromov-Haussdorf vers (M, d_c), où d_c est la distance de Carnot. Notons que l'espace limite n'est plus un objet riemannien. Dans le cas où la courbure du fibré définit une structure presque complexe par rapport à la métrique g de N, il a été montré que le spectre du laplacien des p-formes converge vers le spectre du laplacien de contact (voir [23] où l'auteur se place dans le cadre des variétés de contact). Nous retrouvons ces résultats, dans le cas particulier de (3) par les formules du thm. 2.1 (voir la section 2).

2. Présentation des résultats

Nous nous plaçons dans le contexte géométrique suivant : (N^{2r}, g) est une variété de Hodge, avec structure complexe J et forme de Kähler ω. Quitte à renormaliser la métrique g et à changer J en $-J$ en peut supposer que $[\omega] \in H^2(N, \mathbb{Z})$. Le fibré $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ est donné par $c_1(M) = [\omega]$ et θ est une 1-forme de connexion de courbure égale à la forme de Kähler de (N, g).

Afin de pouvoir présenter notre résultat faisons quelques préparatifs. Nous allons désormais travailler avec des formes à coefficients complexes. En utilisant l'action du cercle sur M, définissons l'espace des p-formes k- équivariantes par

$$\Lambda^{p,k}(M) : = \{\alpha \in \Lambda^p(M) : R_z^* \alpha = z^k \cdot \alpha \; \forall\, z \in S^1\}$$

où R_z est la translation avec $z \in S^1$. Nous avons une décomposition en somme directe d'espaces de Hilbert

$$L^2(\Lambda^p(M)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda^{p,k}(M). \tag{5}$$

Comme le cercle agit isométriquement sur (M, g_T), le laplacien des métriques g_T préserve l'espace des formes k-équivariantes, $k \in \mathbb{Z}$. Par (5), le calcul du p-spectre de (M, g_T) se ramène au calcul du spectre des opérateurs $U_p^k(T) : = \Delta_{g_T |\Lambda^{p,k}(M)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Remarquons aussi qu'il suffit de considérer $k \in \mathbb{N}$ car la conjugaison complexe donne un isomorphisme entre $\Lambda^{p,k}(M)$ et $\Lambda^{p,-k}(M)$, $k \in \mathbb{N}$. Aussi, par la dualité de Hodge on peut se restreindre aux formes de degré pair.

Si V est le champ de vecteurs de M induit par l'action de S^1 on considère l'espace des p-formes horizontales de M qui est défini par

$$\Lambda^p(H) : = \{\alpha \in \Lambda^p(M) : i_V \alpha = 0\}$$

où i_V désigne le produit intérieur. On a des espaces de p-formes horizontales et k-équivariantes notés $\Lambda^{p,k}(H)$ et définis de manière évidente. Il est facile d'établir que

$$\Lambda^{p,k}(M) = \Lambda^{p,k}(H) \oplus \left[\Lambda^{p-1,k}(H) \wedge \theta\right]. \tag{6}$$

Le premier pas vers la séparation des variables dans le spectre de Δ_{g_T} est de calculer l'action du laplacien des métriques g_T sur la décomposition (6). À cet effet définissons la différentielle horizontale

$$d_H : \Lambda^p(H) \to \Lambda^{p+1}(H)$$

comme étant la composante horizontale de d dans (6). Notons que d_H n'est pas une différentielle exacte, car

$$d_H^2 = -L\mathcal{L}_V \tag{7}$$

où $L : \Lambda^p(H) \to \Lambda^{p+2}(H)$ est la multiplication extérieure par $\pi^*\omega$ et $\mathcal{L}_V$ est la dérivée de Lie dans la direction V. La structure complexe J (dont le relevé à $\Lambda^*(H)$ sera noté également par J) permet d'y remédier. Si les opérateurs $\partial_H, \overline{\partial_H} : \Lambda^p(H) \to \Lambda^{p+1}(H)$, $p \in \mathbb{N}$ sont définis par

$$\partial_H = \frac{1}{2}(d_H + (-1)^p iJd_HJ),\ \overline{\partial_H} = \frac{1}{2}(d_H + (-1)^{p+1} iJd_HJ) \tag{8}$$

alors $\partial_H^2 = 0$ et $(\overline{\partial_H})^2 = 0$. Lorsque $D : \Lambda^*(H) \to \Lambda^*(H)$ est un opérateur différentiel on notera D^* son adjoint formel par rapport à la métrique π^*g sur $\Lambda^*(H)$. Définissons maintenant le laplacien horizontal $\Delta_H : \Lambda^p(H) \to \Lambda^p(H)$ en posant

$$\Delta_H = d_H d_H^* + d_H^* d_H. \tag{9}$$

Quelques propriétés du laplacien horizontal sont rappelées dans la remarque suivante (voir [22]).

Remarque 2.1. — *(i)* C'est un opérateur d'ordre 2, positif et hypoelliptique (voir [22]). Pour tout $T > 0$ l'opérateur $\Delta_H - \frac{1}{T^2}(\mathcal{L}_V)^2$ est elliptique. La restriction de Δ_H à l'espace des formes k-équivariantes, $k \in \mathbb{Z}$, est isomorphe à un opérateur elliptique et jouit donc de toutes les propriétés de cette classe d'opérateurs, en particulier de l'existence d'un spectre discret.

(ii) On a $\Delta_H\pi^* = \pi^*\Delta$ sur $\Lambda^*(N)$.

Par rapport à (6) on a sur $\Lambda^{p,k}(M)$

$$\Delta_{g_T} = \begin{pmatrix} \Delta_H + T^2LL^* + \frac{k^2}{T^2} & -Jd_HJ \\ T^2Jd_H^*J & \Delta_H + T^2L^*L + \frac{k^2}{T^2} \end{pmatrix} \text{ sur } \Lambda^{*,k}(M) \tag{10}$$

(voir [23] pour une formule dans le cadre plus général des variétés de contact). C'est un examen attentif de la structure des opérateurs intervenant dans la formule (10) qui nous conduira à la séparation des variables dans le p-spectre de Δ_{g_T}. Continuons avec nos définitions.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ soit $\mathcal{S}^{q,k} : = \operatorname{Ker} L^* \cap \Lambda^{p,k}(H)$ l'espaces de p- formes primitives, k-équivariantes et horizontales. L'identité

$$[L^*, L] = (r - q)1_{\Lambda^q(H)} \tag{11}$$

(cf. [23]) nous assure qu'il n'y a pas de formes primitives non-nulles en degré $> r$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant q \leqslant r$ on définit les espaces

$$\begin{aligned} \mathscr{S}^{q,k} &:= \operatorname{Ker} d_H^* \cap \operatorname{Ker} d_H^* J \cap \mathscr{S}^{q,k} \\ \overline{\mathscr{S}}^{q,k} &:= \operatorname{Ker} \overline{\partial_H} \cap \mathscr{S}^{q,k}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ces espaces étant préservés par le laplacien horizontal, il a un sens de parler du spectre de Δ_H en restriction à ces espaces, qui sera noté $\Sigma^{q,k}$, respectivement $\overline{\Sigma}^{q,k}$. Donnons quelques précisions sur le spectre de Δ_H.

Remarque 2.2. — *(i)* La première valeur propre de la restriction de Δ_H à $\mathscr{S}^{q,k}$ resp. $\overline{\mathscr{S}}^{q,k}$ est $k(r-q)$. Pour le voir, notons que $\overline{\partial_H}\,\overline{\partial_H}^* + \overline{\partial_H}^*\overline{\partial_H} = \frac{1}{2}(\Delta_H - k(r-q))$ sur $\mathscr{S}^{q,k}$. L'espace propre correspondant est donc $\mathscr{E}^{q,k} := \operatorname{Ker} \overline{\partial_H} \cap \overline{\partial_H}^* \cap \mathscr{S}^{q,k}$.

(ii) Considérons le complexe différentiel $\{\Lambda^{*,k}(H), \overline{\partial_H}\}$, $k \in \mathbb{N}$ et soit $H_k^*(M)$ sa cohomologie (connue dans la littérature sous le nom de cohomologie de Dolbeault). Par la théorie de Hodge on peut voir que $\mathscr{E}^{q,k} \cong H_k^q(M)$ si $k \neq 0$. Lorsque $k = 0$ on a $H_0^*(M) \cong H^*(N)$.

(iii) Par la théorie de Hodge on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathscr{E}^{q,k} \xrightarrow{\overline{\partial_H}} \overline{\mathscr{S}}^{q,k} \to 0.$$

Par l'identité $[\Delta_H, \overline{\partial_H}^*] = k\overline{\partial_H}^*$ cela nous conduit à

$$\overline{\Sigma}^{q,k} = \{k(r-q)\} \cup \{\mu \in \Sigma^{q-1,k} / \mu > k(r-q+1)\}. \tag{13}$$

La valeur propre $k(r-q)$ apparaît avec la multiplicité $b_q^k(M) := \dim_{\mathbb{C}} H_k^q(M)$.

Supposons que $0 \leqslant p \leqslant [\frac{r}{2}] - 1$, $0 \leqslant q \leqslant 2p+1$ et $k \in \mathbb{N}$ et définissons une famille de fonctions $f_{iq}^k : [0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant i \leqslant 4$ par

$$\begin{aligned} f_{1q}^{p,k}(x,T) &:= x + T^2\Big[(p - [\tfrac{q}{2}])(c_p + p - 1 - [\tfrac{q-1}{2}]) + \frac{r-q}{2}\Big] \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sqrt{4xT^2 + T^4(r-q)^2 + 4k^2} + \frac{k^2}{T^2} \\ f_{2q}^{p,k}(x,T) &:= x + T^2\Big[(p - [\tfrac{q}{2}])(c_p + p - 1 - [\tfrac{q-1}{2}]) + \frac{r-q}{2}\Big] \\ &\qquad - \frac{1}{2}\sqrt{4xT^2 + T^4(r-q)^2 + 4k^2} + \frac{k^2}{T^2} \\ f_{3q}^{p,k}(x,T) &:= x + k + T^2(p + 1 + [\tfrac{1-q}{2}])(c_p + p - [\tfrac{q-1}{2}]) + \frac{k^2}{T^2} \\ f_{4q}^{p,k}(x,T) &:= x + T^2(p - [\tfrac{q-1}{2}])(c_p + p + [\tfrac{1-q}{2}]) + \frac{k^2}{T^2} \end{aligned} \tag{14}$$

où par définition $c_p = r - 2p - 1$. Définissons également une famille de collections de nombres par

$$\begin{aligned}
&\Sigma^{p,k}_{i,q}(T) : = \{ f^{p,k}_{iq}(\mu, T) : \mu \in \Sigma^{q,k}, \mu > k(r-q)\}, i = 1,2 \\
(15) \qquad &\Sigma^{p,k}_{3,q}(T) : = \{ f^{p,k}_{3q}(\mu, T) : \mu \in \overline{\Sigma}^{q,k}\} \\
&\Sigma^{p,k}_{4,q}(T) : = \{ f^{p,k}_{4q}(\mu, T) : \mu \in \Sigma^{q,k}, \mu > 0\}.
\end{aligned}$$

Faisons la convention suivante. Étant donnée une collection, notée $\mathscr{C}$, du type défini en (15) et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la multiplicité de λ dans $\mathscr{C}$ comme le nombre des apparitions de λ dans $\mathscr{C}$; cette multiplicité est égale à 0 si λ n'est pas élement de $\mathscr{C}$. L'union d'un nombre fini de telles collections sera leur réunion comme ensembles, avec la convention que la multiplicité d'un nombre dans cette union est la somme des multiplicité de ce nombre dans chacune des collections de l'union.

Remarque 2.3. — Les collections $\Sigma^{p,k}_{3q}(T)$ et $\Sigma^{p,k}_{4q}(T)$ sont presque les mêmes. En effet, par (13) on arrive à

$$\Sigma^{p,k}_{3q}(T) = \{ f^{p,k}_{3q}(k(r-q), T)\} \cup \{ f^{p,k}_{4q}(\mu, T) / \mu \in \Sigma^{q-1,k}, \mu > k(r-q+1)\}.$$

Soit $H^*_{prim}(N)$ la cohomologie primitive de la base. La réponse à la question (1.1) est donnée par le téorème suivant (cf. [19]).

Théorème 2.1. — *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant r-1$. Si $0 \leqslant p \leqslant [\frac{r}{2}] - 1$ le spectre de $U^k_{2p+2}(T)$ est l'union de*

$$\{\Sigma^{p,k}_{i,q}(T)\}_{\{i=\overline{1,4}, q=\overline{0,2p+1}\}} \quad and \quad \Sigma^{2p+2,k} + \frac{k^2}{T^2}.$$

La partie exacte respectivement coexacte du spectre correspond à l'union de

$$\{\Sigma^{p,k}_{i,2q}(T)\}_{i=\overline{1,3}, q=\overline{0,p}} \quad et\ de \quad \{\Sigma^{p,k}_{4,2q+1}(T)\}_{q=\overline{0,p}},$$

respectivement

$$\{\Sigma^{p,k}_{i,2q+1}(T)\}_{i=\overline{1,3}, q=\overline{0,p}}, \quad \{\Sigma^{p,k}_{4,2q}(T)\}_{q=\overline{0,p}} \quad and \quad \Sigma^{2p+2,k} + \frac{k^2}{T^2};$$

En cohomologie on a $H^{2p+2}(M) \cong H^{2p+2}_{prim}(N) \oplus H^{2p+1}_{prim}(N)$.
Si $p \geqslant [\frac{r}{2}]$ le spectre de $U^k_{2p+2}(T)$ est l'union de

$$\{\Sigma^{p,k}_{i,q}(T)\}_{\{i=\overline{1,4}, q=\overline{0,2(r-p)-1}\}} \quad et \quad \Sigma^{2(r-p)-1,k} + \frac{k^2}{T^2}.$$

La partie exacte resp. coexacte du spectre est donnée par l'union de

$$\{\Sigma^{p,k}_{i,2q}(T)\}_{i=\overline{1,3}, q=\overline{0,r-p-1}}, \{\Sigma^{p,k}_{4,2q+1}(T)\}_{q=\overline{0,r-p-2}} \quad et \quad \Sigma^{2(r-p)-1} + \frac{k^2}{T^2}$$

$$resp.\ \{\Sigma^{p,k}_{i,2q+1}(T)\}_{i=\overline{1,3},q=\overline{0,r-p-2}},\ \{\Sigma^{p,k}_{4,2q}(T)\}_{,q=\overline{0,r-p-1}}.$$

En cohomologie on a $H^{2p+2}(M) \cong H^{2(r-p)-1}_{prim}(N)$.

REMARQUE 2.4. — Le théorème (2.1) fait apparaître le spectre de la restriction de Δ_H aux espaces $\mathscr{P}^{q,k}$, $0 \leqslant q \leqslant r$. Le diagramme suivant montre que ce spectre est déterminé par le spectre de Δ_H agissant sur les formes k-équivariantes et primitives

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & F^{q,k}(\lambda) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
0 \to & \mathrm{Ker}(\partial_H^*\overline{\partial_H}^*) \cap E^{q,k}(\lambda) & \xrightarrow{\partial_H^*\overline{\partial_H}^*} & F^{q-2,k}(\lambda) \cap (\mathscr{E})^\perp & \to 0 & & \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_H^* \oplus \overline{\partial_H}^*} & & & \\
 & & & \left[F^{q-1,k}(\lambda - k) \cap (\mathscr{H})^\perp\right] \oplus \left[F^{q-1,k}(\lambda + k) \cap (\mathscr{E})^\perp\right] & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

où l'on a posé $F^{q,k}(\lambda) = \mathrm{Ker}(\Delta_H - \lambda) \cap \mathscr{P}^{q,k}$ et $E^{q,k}(\lambda) = \mathrm{Ker}(\Delta_H - \lambda) \cap \cap S^{q,k}$. Notons aussi que $F^{r,k}(\lambda) = 0$ si $\lambda \neq 0$.

Par conséquent, la connaissance du spectre de Δ_H agissant sur les formes k-equivariantes de degré $0 \leqslant q \leqslant r$ nous donne le spectre des formes de (M, g_T) pour tout $T > 0$. Remarquons que les fonctions qui interviennent dans l'expression du spectre sont universelles dans la catégorie de variétés considérées. Pour la preuve de ce théorème voir [19]. On en déduit également la réponse à la réciproque de la question 1.1.

COROLLAIRE 2.1. — *Le spectre de* $U^k_q(T_0)$, $T_0 > 0$ *fixé, détermine le p-spectre k-équivariant du laplacien horizontal* (voir [19] pour les détails).

Présentons maintenant quelques applications de nature non-calculatoire. Tout d'abord, il est élementaire de retrouver, à partir du théorème (2.1), les résultats asymptotiques ($T \to 0$, $T \to \infty$) présentées dans l'introduction ainsi que le phénomème du spectre en degré moitié lorsque $T \to \infty$ mis en évidence dans [23] dans un cadre plus général. Remarquons maintenant que les groupes de cohomologie de Dolbeault produisent des valeurs propres privilégiées pour le laplacien Δ_{g_T}.

REMARQUE 2.5. — Fixons $0 \leqslant p \leqslant [\frac{r}{2}]$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour $m = \overline{0, p+1}$ définissons

$$\lambda_m^{k,p} := k(c_p + 2m - 1) + T^2 m(c_p + m - 1) + \frac{k^2}{T^2} \tag{16}$$
$$\mu_m^{p,k} = k(c_p + 2m) + T^2 m(c_p + m) + \frac{k^2}{T^2}.$$

En se servant du fait que $k(r - q)$ est la première valeur propre de Δ_H par le théorème (2.1) on obtient que le spectre de $U_{2p+2}^k(T)$ agissant sur les formes cofermées contient les valeurs propres

$$\lambda_0^{p,k} < \lambda_1^{p,k} < \ldots < \lambda_{p+1}^{p,k}$$

avec $\lambda_0^{p,k}$ la première valeur propre. La multiplicité de $\lambda_m^{p,k}$ est égale à b_{2p+2}^k si $m = 0$ et supérieure où égale à $b_{2(p-m)+3}^k + \mathrm{sign}(k) b_{2(p-m)+2}^k$ pour $1 \leqslant m \leqslant p+1$.

On obtient également que le spectre de $U_{2p+2}^k(T)$ agissant sur les formes fermées contient les valeurs propres

$$\mu_0^{p,k} < \mu_1^{p,k} < \ldots < \mu_{p+1}^{p,k}.$$

La multiplicité de $\mu_m^{p,k}$ est égale à b_{2p}^k si $m = 0$ et supérieure où égale à $b_{2(p-m)+2}^k + \mathrm{sign}(k) b_{2(p-m)+3}^k$ si $1 \leqslant m \leqslant p+1$. De plus, $\mu_0^{p,k}$ est la première valeur propre de $U_{2p+2}^k(T)$ sur les formes fermées.

REMARQUE 2.6. — Supposons maintenant que $T \to 0$. On voit donc que les petites valeurs propres doivent avoir des formes propres S^1-invariantes. Le théorème (2.1) nous assure que lorsque T est petit les premières valeurs propres de $U_{2p+2}^0(T)$ sont

$$\lambda_0^{p,0} = \mu_0^{p,0} < \lambda_1^{p,0} < \mu_1^{p,0} < \ldots \lambda_{p+1}^{p,0} < \mu_{p+1}^{p,0}.$$

La multiplicité de $\lambda_m^{p,0}$ est b_{2p+2} si $m = 0$ et $b_{2(p-m)+3}$ si $1 \leqslant m \leqslant p+1$. La multiplicité de $\mu_m^{p,0}$ est b_{2p} si $m = 0$ et $b_{2(p-m)+2}$ si $1 \leqslant m \leqslant p+1$. Ce sont toutes les petites valeurs propres de Δ_{g_T}. On raffine donc, dans la situation géométrique considérée, le résultat de [5] qui donne l'asymptotique des petites valeurs propres de (M, g_T) pour une base N arbitraire.

À l'aide de ces résultats on peut calculer le spectre des sphères de Berger (voir l'exemple 1.1) de la façon suivante. Le spectre des métriques $g_{\sqrt{2}}$ étant connu (c'est à un facteur près le spectre de la sphère canonique) on détermine le spectre des formes k-équivariantes de $g_{\sqrt{2}}$ en utilisant une version équivariante des calculs fait dans [17]. Par le corollaire 2.1 on obtient le spectre du laplacien horizontal agissant sur les formes k-équivariantes. Il ne reste plus qu'a introduire ce spectre dans les formules du théorème (voir [19] pour l'expression exacte du spectre).

Pour le calcul de la classe de variétés de Heisenberg présentée dans l'exemple (1.2) la démarche est la suivante. On détermine le spectre de Δ_H agissant sur les formes k-équivariantes. C'est un problème particulièrement simple, car dans ce cas $\Lambda^*(H)$ est parallélisable. Dans la bigraduation complexe de $\Lambda^*(H)$ donnée par la structure complexe de la base Δ_H agit essentiellement comme le laplacien sur les fonctions, or le spectre des fonctions est calculé dans [11]. On conclut par le théorème (2.1) (voir [19] pour le calcul complet).

REMARQUE 2.7. — En utilisant le théoreme (2.1) on peut donner une réponse à la question 1.1 dans le cas plus général où la courbure du fibré est parallèle pour la connexion de Levi-Civita de la base. Cela permet de calculer le spectre de toutes les variétés de Heisenberg. Une application potentielle serait de déterminer les classes d'isospectralité, sur les p-formes, ($p \geqslant 1$) de ces variétés.

Bibliographie

[1] L. BÉRARD BERGERY, J-P. BOURGUIGNON, *Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, Illinois J.Math. **26** (1982), 181-200.

[2] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lectures Notes in Math. **194**, Springer, Berlin-Heidelberg, 1971.

[3] N. BERLINE, E. GETZLER, M. VERGNE, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer Verlag, 1991.

[4] A. BESSE, *Einstein Manifolds*,Springer,1987.

[5] B. COLBOIS, G. COURTOIS, Petites valeurs propres des p-formes differéntielles et classe d'Euler des S^1-fibrés *a paraître dans*, Annales de L'ENS, 1999.

[6] X. DAI, *Adiabatic limits, Non-Multiplicativity of signature and Leray spectral sequence*, J. Amer. Math. Soc. **4**, (1991) 265-321.

[7] G. DE RHAM, *Variétés différentielles*, Hermann, Paris, 1974

[8] R. FORMAN, *Spectral sequences and adiabatic limits*, Commun.Math.Phys. **168** (1995), 57–116.

[9] S. GALLOT, D. HULLIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Springer, 1986.

[10] S. GALLOT, D. MEYER, *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J.Math.pures et appl., **54** (1975), 259–284.

[11] C. GORDON, E. WILSON, *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds*, Michigan Math.J. **33** (1986), 253–271.

[12] C. GORDON, E. WILSON, *Isospectral deformations of compact solvmanifolds*, Journal of Differential Geometry, **19** (1984), 241–256.

[13] P.A. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, J.Wiley, New-York 1978.

[14] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, vol1, Wiley, 1969.

[15] S. KOBAYASHI, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, 1995.

[16] R. KUWABARA, *Spectrum of the Schödinger operator on a line bundle over complex projective spaces*, Tôhoku Math. J. **40** (1988), 199–211.

[17] A. Ikeda, Y. Taniguchi, *Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$*, Osaka J. Math. **15** (1978), 515–546.

[18] R. Mazzeo, R. Melrose, *The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray's spectral sequence*, J. Diff. Geom. **31**, (1990) 185–213.

[19] P-A. Nagy, *The spectrum of the Laplacian acting on the total space of a principal S^1-bundle*, en préparation, 1999.

[20] H. Pesce, *Calcul du spectre d'une nilvariété de rang deux et applications*, Transactions of the American Mathematical Society, **339** 1993), 281–330.

[21] H. Pesce, *Une formule de Poisson pour les variétés de Heisenberg*, Duke Math. J. **75** (1994), 79–95.

[22] M. Rumin, *Formes différentiellles sur les variétés de contact*, J. Differential Geometry, **39** (1994), 281–330.

[23] M. Rumin, *Sub-Riemannian limit*, preprint, 1998.

[24] N. R. Wallach, *Harmonic analysis on homogenous spaces*, Marcel Dekker, New-York, 1973.

Paul-Andi NAGY
Université de Savoie
Département de Mathématiques
Campus Scientifique
73376 LE BOURGET DU LAC Cedex

Paul-Nagy@univ-savoie.fr