MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Résidus en codimension 2

Cours de l'institut Fourier, tome 15 (1980)

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1980__15__1_0>

Institut Fourier
Université de Grenoble I

RESIDUS EN CODIMENSION 2

par Monique LEJEUNE-JALABERT

On considère un germe d'espace analytique (X,x) de codimension pure 2 dans $(\mathbb{C}^n,\underline{0})$ et dont l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ soit un anneau de Cohen - Macaulay non nécessairement réduit. On sait que (X,x) peut être plongé dans un germe d'intersection complète (V,x) de même dimension. ω_X le Module dualisant de X apparaît alors comme un sous-$\mathcal{O}_V$-Module de ω_V le Module dualisant de V qui est un $\mathcal{O}_V$-Module localement libre de rang 1. Nous allons déterminer quel est ce sous-Module et examiner quelques conséquences si $\dim_x X = 0$ et 1.

§ 1. - DETERMINATION DE ω_X.

Nous désignerons par O l'anneau des séries convergentes à n variables $\mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n\}$, par $A = O/I$ l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$, par $B = O/K$ l'anneau $\mathcal{O}_{V,x}$, par Ω^n le O-module des n-formes différentielles sur $(\mathbb{C}^n,\underline{0})$. Alors $\omega_X \simeq \mathrm{Ext}^2_O(O/I,\Omega^n)$ et $\omega_V \simeq \mathrm{Ext}^2_O(O/K,\Omega^n)$. De la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow I/K \longrightarrow O/K \longrightarrow O/I \longrightarrow 0$$

on déduit une suite exacte (de O-modules)

$$\mathrm{Ext}^1_O(I/K,\Omega^n) \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \omega_V .$$

Institut Fourier - B. P. 116 - 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
Laboratoire de Mathématiques Pures associé au CNRS - Tél. (76) 54.81.45

Or $\Omega^n \simeq O$, $\dim I/K = n-2$ et on sait que $2 = n - \dim I/K = \inf\{i ; \mathrm{Ext}^i_O(I/K, O) \neq 0\}$. L'application naturelle $\omega_X \to \omega_V$ est donc injective. Soit $(f_o, \ldots, f_s)$ un système de générateurs de I , $h_o = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i f_i$, $h_1 = \sum_{i=0}^{s} \mu_i f_i$ un système de générateurs de K .

h_o, h_1 étant une suite régulière, on obtient une résolution libre de O/K en écrivant le complexe de Koszul :

$$0 \longrightarrow O \xrightarrow{v} O^2 \xrightarrow{h} O \longrightarrow 0$$

où désignant par $e_o = (1,0)$, $e_1 = (0,1)$, $h(e_i) = h_i$, $i = o, 1$ et $v(1) = h_1 e_o - h_o e_1$. Cette résolution permet de calculer ω_V . ω_V s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_O(O, \Omega^n) / \mathrm{Image}\ \mathrm{Hom}_O(O^2, \Omega^n)$$

et on note par définition si $\omega \in \Omega^n$,

$$\begin{bmatrix} \omega \\ h_o, h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ h_1, -h_o \end{bmatrix}$$

l'élément de ω_V admettant pour représentant le morphisme de O dans Ω^n qui envoie 1 sur ω .

Considérons maintenant $O^{s+1} \xrightarrow{f} O$ défini par $f(e_i) = f(0, \ldots, 1, \ldots, 0) = f_i$. Puisque A est de Cohen-Macaulay, $\mathrm{prof}\, A = \dim A = n-2$ et O étant un anneau régulier $\dim \mathrm{proj}\, A + \mathrm{prof}\, A = n$. La dimension projective de A est donc 2 . Ceci signifie que $\mathrm{Ker}\, f$ est un O-module projectif donc libre et $\mathrm{Ker}\, f \simeq O^s$. D'après le théorème de Burch (Kaplanski : Commutative rings), il existe une base $r^1, \ldots, r^s$ du module libre $\mathrm{Ker}\, f$ telle que

$$f_i = \det(r^1, \ldots, r^s, e_i) \ .$$

La résolution libre de O/I ainsi obtenue :

$$0 \longrightarrow O^s \xrightarrow{r} O^{s+1} \xrightarrow{f} O \longrightarrow 0$$

où $r(r^i) = r^i$ permet de calculer ω_X . ω_X s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^s,\Omega^n)/\mathrm{Image}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^{s+1},\Omega^n)$$

et par analogie avec la définition ci-dessus, on notera si $\omega_1,\dots,\omega_s$ sont s éléments de Ω^n,

$$\begin{bmatrix} \omega_1,\dots,\omega_s \\ \begin{pmatrix} r^1_o \dots r^1_s \\ \\ r^s_o \dots r^s_s \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

l'élément de ω_X admettant pour représentant le morphisme de $\mathcal{O}^s$ dans Ω^n qui envoie r^i sur ω_i .

Il s'agit de voir quelle est l'image de ce symbole dans ω_V . Pour ce faire, nous allons comparer le calcul de ω_V (resp. ω_X) obtenu avec la résolution libre de $\mathcal{O}/K$ (resp. $\mathcal{O}/I$) avec celui obtenu avec une résolution injective de Ω^n .

Nous utiliserons la résolution de Dolbeault distribution de Ω^n

$$0 \to \Omega^n \to {}'\mathcal{D}^{n,o} \to {}'\mathcal{D}^{n,1} \to \dots \to {}'\mathcal{D}^{n,n} \to 0$$

dont on sait qu'elle est injective.

ω_V (resp. ω_X) est alors le 2e groupe de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}/K,{}'\mathcal{D}^{n,\cdot})$ (resp. $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}/I,{}'\mathcal{D}^{n,\cdot})$) ; si $\varphi : \mathcal{O}/I \to {}'\mathcal{D}^{n,2}$ est un représentant d'un élément de ω_X , $\overline{\varphi} : \mathcal{O}/K \to \mathcal{O}/I \xrightarrow{\varphi} {}'\mathcal{D}^{n,2}$ est un représentant de son image dans ω_V . Pour comparer les 2 calculs, on est amené à considérer d'abord le double complexe :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O},{}'\mathcal{D}^{n,o}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{s+1},{}'\mathcal{D}^{n,o}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{s},{}'\mathcal{D}^{n,o}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O},{}'\mathcal{D}^{n,1}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{s+1},{}'\mathcal{D}^{n,1}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{s},{}'\mathcal{D}^{n,1}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O},{}'\mathcal{D}^{n,2}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{s+1},{}'\mathcal{D}^{n,2}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^{s},{}'\mathcal{D}^{n,2}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Dans ce double complexe, la k-ième ligne n'a de cohomologie qu'en dimension 0 et c'est $\mathrm{Hom}(O/I, '\mathcal{D}^{n,k})$ car $'\mathcal{D}^{n,k}$ est un O-module injectif ; les colonnes n'ont de cohomologie qu'en dimension 0 car O, O^{s+1}, O^{s} sont des O-modules libres.

Soit $\omega_1, \dots, \omega_s$ s éléments de Ω^n et considérons l'élément de $\mathrm{Hom}(O^s, \Omega^n)$ qu'ils déterminent ainsi que sa classe dans $\omega_X \simeq \mathrm{Ext}^2(O/I, \Omega^n)$, $\mathrm{Hom}(O^s, \Omega^n)$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}(O^s, '\mathcal{D}^{n,o})$. $(\omega_1, \dots, \omega_s)$ se relève en un élément de $\mathrm{Hom}(O^{s+1}, '\mathcal{D}^{n,o})$ (pas de cohomologie en dimension 2). Il existe donc $T_o, \dots, T_s \in '\mathcal{D}^{n,o}$ tels que

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} \omega_1 = r_o^1 T_o + \dots + r_s^1 T_s \\ \vdots \\ \omega_s = r_o^s T_o + \dots + r_s^s T_s \; . \end{cases}$$

La 2e ligne n'ayant pas de cohomologie en dimension 1 , il existe $V \in '\mathcal{D}^{n,1}$ tel que $f_k V = d'' T_k$, $k = 0, \dots, s$.

Enfin, la 3e ligne ayant $\mathrm{Hom}(O/I, '\mathcal{D}^{n,2})$ comme cohomologie en dimension 0 , le morphisme $O \to '\mathcal{D}^{n,2}$ qui envoie $g \in O$ sur $g d'' V$ provient d'un morphisme de O/I dans $'\mathcal{D}^{n,2}$ qui est un représentant de l'élément de ω_X associé à $\omega_1, \dots, \omega_s$.

Considérons maintenant le double complexe :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(O, '\mathcal{D}^{n,o}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O^2, '\mathcal{D}^{n,o}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O, '\mathcal{D}^{n,o}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(O, '\mathcal{D}^{n,1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O^2, '\mathcal{D}^{n,1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O, '\mathcal{D}^{n,1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(O, '\mathcal{D}^{n,2}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O^2, '\mathcal{D}^{n,2}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(O, '\mathcal{D}^{n,2}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Soit η un élément de Ω^n et considérons l'élément de $\mathrm{Hom}(O,\Omega^n)$ qu'il détermine ainsi que sa classe dans $\omega_V \simeq \mathrm{Ext}^2(O/K\,,\Omega^n)$. Le même raisonnement que précédemment montre qu'il existe $S_o, S_1 \in {}'\mathcal{D}^{n,o}$ tels que

$$\eta = h_1 S_o - h_o S_1$$

puis $W \in {}'\mathcal{D}^{n,1}$ tel que $h_k W = d''S_k$, $k=o,1$; enfin le morphisme $O \to {}'\mathcal{D}^{n,2}$ qui envoie $g \in O$ sur $gd''W$ provient d'un morphisme de $O/K \to {}'\mathcal{D}^{n,2}$ qui est un représentant de l'élément de ω_V associé à η . Pour déterminer l'image dans ω_V du symbole associé à $\omega_1,\ldots,\omega_s$ il suffit de procéder par linéarité et considérer successivement le cas où dans $\omega_1,\ldots,\omega_s$ seul ω_k est éventuellement non nul. Dans ce cas, le système I entraîne que

$$\det\left\|\begin{matrix} r^1_o & \cdots & r^1_s \\ \vdots & & \vdots \\ \cancel{r^k_o} & \cancel{\cdots} & \cancel{r^k_s} \\ \vdots & & \vdots \\ r^s_o & \cdots & r^s_s \\ \lambda_o & \cdots & \lambda_s \\ \mu_o & \cdots & \mu_s \end{matrix}\right\| T_j = \det\left\|\begin{matrix} r^1_o & \cdots & 0 & \cdots & r^1_s \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cancel{r^k_o} & \cancel{\cdots} & \cancel{0} & \cancel{\cdots} & \cancel{r^k_s} \\ \vdots & & & & \vdots \\ r^s_o & \cdots & 0 & \cdots & r^s_s \\ \lambda_o & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{s} \lambda_i T_i & \cdots & \lambda_s \\ \mu_o & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{s} \mu_i T_i & \cdots & \mu_s \end{matrix}\right\| \qquad j=0\ldots s$$

la colonne contenant $T_o,\ldots,T_s$ occupant la $j^{\text{ième}}$ place.

On en déduit que :

$$\det\left\|\begin{matrix} r^1_o & \cdots & r^1_s \\ \vdots & & \vdots \\ \cancel{r^k_o} & & \cancel{r^k_s} \\ \vdots & & \vdots \\ r^s_o & \cdots & r^s_s \\ \lambda_o & \cdots & \lambda_s \\ \mu_o & \cdots & \mu_s \end{matrix}\right\| \omega_k = (-1)^{s+k}\left\{\det\left\|\begin{matrix} r^1_o & \cdots & r^1_s \\ \vdots & & \vdots \\ r^s_o & \cdots & r^s_s \\ \mu_o & \cdots & \mu_s \end{matrix}\right\| \Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i T_i\Big) - \det\left\|\begin{matrix} r^1_o & \cdots & r^1_s \\ \vdots & & \vdots \\ r^s_o & \cdots & r^s_s \\ \lambda_o & \cdots & \lambda_s \end{matrix}\right\| \Big(\sum_{i=0}^{s} \mu_i T_i\Big)\right\}$$

$$= (-1)^{s+k}\left\{(\mu_o f_o + \ldots + \mu_s f_s)\Big(\sum_{i=0}^{s}\lambda_i T_i\Big) - (\lambda_o f_o + \ldots + \lambda_s f_s)\Big(\sum_{i=0}^{s}\mu_i T_i\Big)\right\}$$

$$= (-1)^{s+k}\left\{h_1\Big(\sum_{i=0}^{s}\lambda_i T_i\Big) - h_o\Big(\sum_{i=0}^{s}\mu_i T_i\Big)\right\} .$$

D'autre part,

$$h_o V = d''\Big(\sum_{i=0}^{s} \lambda_i T_i\Big) \qquad h_1 V = d''\Big(\sum_{i=0}^{s} \mu_i T_i\Big) .$$

L'élément de ω_X associé à $(0,\dots,\omega_k,\dots,0)$ correspond au morphisme $\varphi : O/I \to {}'\mathcal{B}^{n,2}$ induit par le morphisme $O \to {}'\mathcal{B}^{n,2}$ envoyant g sur $gd''V$. Son image dans ω_V correspond au morphisme $\overline{\varphi} : O/K \to O/I \xrightarrow{\varphi} {}'\mathcal{B}^{n,2}$ induit également par celui de $O \to {}'\mathcal{B}^{n,2}$ envoyant g sur $gd''V$. Or, posant $S_o = \Sigma\lambda_i T_i$, $S_1 = \Sigma\mu_i T_i$

et $\eta = (-1)^{s+k}$ $\det \left\| \begin{matrix} r_o^1 \dots r_s^1 \\ \cancel{r_o^k \dots r_s^k} \\ r_o^s \dots r_s^s \\ \lambda_o \dots \lambda_s \\ \mu_o \dots \mu_s \end{matrix} \right\| \omega_k$, on constate que $\eta = h_1 S_o - h_o S_1$

$h_i V = d'' S_i$, $i=0,1$.

1.1. PROPOSITION. - <u>L'injection</u> $\omega_X \to \omega_V$ <u>envoie le symbole</u>

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \dots \omega_s \\ \begin{pmatrix} r_o^1 \dots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \dots r_s^s \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

<u>sur le symbole</u>

$$\begin{bmatrix} \Sigma(-1)^{s+k} \det \left\| \begin{matrix} r_o^1 \dots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \cancel{r_o^k \dots r_o^k} \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \dots r_s^s \\ \lambda_o \dots \lambda_s \\ \mu_s \dots \mu_s \end{matrix} \right\| \omega_k \\ \det \left\| \begin{matrix} r_o^1 \dots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \dots r_s^s \\ \lambda_o \dots \lambda_s \end{matrix} \right\| \qquad \det \left\| \begin{matrix} r_o^1 \dots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \dots r_s^s \\ \mu_o \dots \mu_s \end{matrix} \right\| \end{bmatrix}$$

1.2. <u>Remarque</u> : Identifiant $\omega_{V,x}$ à $\mathcal{O}_{V,x} = O/K$, $\omega_{X,x}$ s'identifie à J/K où J est l'idéal de O engendré par

$$h_o = \det\left\|\begin{matrix} r_o^1 \cdots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \cdots r_s^s \\ \lambda_o \cdots \lambda_s \end{matrix}\right\| \quad , \quad h_1 = \det\left\|\begin{matrix} r_o^1 \cdots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \cdots r_s^s \\ \mu_o \cdots \mu_s \end{matrix}\right\|$$

$$g_k = (-1)^k \det\left\|\begin{matrix} r_o^1 \cdots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \cancel{r_o^k \cdots r_s^k} \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \cdots r_s^s \\ \lambda_o \cdots \lambda_s \\ \mu_o \cdots \mu_s \end{matrix}\right\| \qquad k=1,\dots,s$$

1.3. Remarque (Peskine-Szpiro) : Soit (Y,x) le germe d'espace analytique déterminé par l'idéal J défini ci-dessus, X et Y sont liés par V et on a la suite exacte au voisinage de x ,

$$0 \to \omega_X \to \omega_V \to \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V \to 0 .$$

Rappelons que (X,x) et (Y,x) sont liés par (V,x) si (X,x) et (Y,x) sont équidimensionnels et sans composantes immergés et si $J/K = \mathrm{Hom}(O/I\,,O/K)$ et $I/K = \mathrm{Hom}(O/J\,,O/K)$ et pour qu'il en soit ainsi il suffit que $J/K = \mathrm{Hom}(O/I\,,O/K)$ (cf. [3] §2). Or, on a un isomorphisme canonique de foncteurs de la catégorie des O/K-modules de type fini dans elle-même

$$\mathrm{Ext}^2_O(\,?\,,\Omega^n) \simeq \mathrm{Hom}(\,?\,,\mathrm{Ext}^2_O(O/K,\Omega^n)) .$$

Remplaçant ? par O/I , il suffit d'identifier $\omega_{X,x}$ à J/K et $\omega_{V,x}$ à O/K .

1.4. Remarque : Si de plus (X,x) et (Y,x) n'ont pas de composantes irréductibles communes, on a une suite exacte canonique au voisinage de x :

$$0 \to \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{Y\cap X} \to 0$$

où $(Y\cap X,x)$ est le germe de sous-espace de $(\mathbb{C}^n,\underline{0})$ défini par $I+J$.

En effet, X et Y sont alors géométriquement liés ; on a $V = X \cup Y$, $K = I \cap J$.

1.5. Remarque : Serre montre dans [4] que I est engendré par 2 éléments si et seulement si $\omega_{X,x}$ est un O-module monogène.

§ 2. - $n = 2$. CAS DES POINTS EPAIS DANS $\mathbb{C}^2$.

Dans tout ce paragraphe $O = \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ et I est un idéal primaire pour l'idéal maximal. On sait alors que $\mathrm{Ext}^2_O(O/I, \Omega^2)$ s'identifie au dual de O/I . Cette identification se fait de la façon suivante :

2.1. PROPOSITION. - L'accouplement

$$O/I \times \mathrm{Ext}^2_O(O/I, \Omega^2) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\left\langle f \bmod I, \begin{bmatrix} \omega_1, \ldots, \omega_s \\ \begin{pmatrix} r_o^1 \ldots\ldots r_s^1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ r_o^s \ldots\ldots r_s^s \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle f \bmod K, \begin{bmatrix} (-1)^s \Sigma g_k \omega_k \\ h_o \quad h_1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\substack{|h_o| \geq \varepsilon \\ |h_1| \geq \varepsilon}} \frac{(-1)^s f(\Sigma g_k \omega_k)}{h_o h_1}$$

est un accouplement parfait d'espaces vectoriels de dimension finie. h_o, h_1, g_k $k = 1 \ldots s$ sont les éléments de O définis en en 1.2.

Démonstration : on sait que $\left\langle f \bmod I, \begin{bmatrix} \omega_1, \ldots, \omega_s \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \right\rangle = \langle d''V, \tilde{f} \rangle$ où $\tilde{f}$ est une fonction C^∞ à support compact sur $\mathbb{C}^2$ coïncidant avec f dans un voisinage de $\underline{0}$, et où $V \in {}'\mathcal{D}^{2,1}$ est tel qu'il existe $T_k \in {}'\mathcal{D}^{2,o}$, $k=0\ldots s$, vérifiant

$$f_k V = d''T_k \quad k=0\ldots s \quad \text{et} \quad \omega_i = \sum_j r_j^i T_j \quad i=1\ldots s \ .$$

D'autre part $\langle f \bmod K, \begin{bmatrix} & \eta & \\ h_o & & h_1 \end{bmatrix} \rangle = \langle d''W, \tilde{f} \rangle$ où $W \in {}'\mathcal{D}^{2,1}$ est tel qu'il existe $S_o, S_1 \in {}'\mathcal{D}^{2,o}$ vérifiant $h_k W = d''S_k$, $k=0,1$ et $\eta = h_1 S_o - h_o S_1$. Or, on a vu au cours de la démonstration de la proposition 1.1 que pour tout système V, T_k vérifiant les propriétés ci-dessus avec $\omega_i = 0 \quad i \neq k$, on a $(-1)^s g_k \omega_k = h_1(\Sigma\lambda_i T_i) - h_o(\Sigma\mu_i T_i)$, $h_o V = d''(\Sigma\lambda_i T_i)$, $h_1 V = d''(\Sigma\mu_i T_i)$.

2.2. COROLLAIRE. - <u>Si</u> I <u>et</u> J <u>sont deux idéaux primaires liés par</u> K , <u>on a</u> $rg_{\mathbb{C}}\, O/I + rg_{\mathbb{C}} O/J = rg_{\mathbb{C}} O/K$.

<u>Démonstration</u> : $rg_{\mathbb{C}}\, O/I = rg_{\mathbb{C}}\, Ext^2(O/I, \Omega^2) = rg_{\mathbb{C}} J/K$
$= rg_{\mathbb{C}}\, O/K - rg_{\mathbb{C}} O/J$.

2.3. THEOREME. - <u>Soit</u> I <u>un idéal primaire de</u> $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$. <u>Soit</u> $f_o, \ldots, f_s$ <u>un système de générateurs de</u> I , $r^1, \ldots, r^s$ <u>un système de générateurs des relations tel que</u> $f_i = \det(r^1, \ldots, r^s, e_i)$. <u>On a</u> :

$$\langle c\ell\ f \bmod I\ ,\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ldots, \sum_{i=0}^{s} df_i \wedge dr_i^k, \ldots \\ \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \rangle = rg_{\mathbb{C}}\, O/I \,.\, f(0) \ .$$

<u>Démonstration</u> : nous allons utiliser le théorème de liaison locale de Peskine Szpiro [3] th. 3.3. Il existe des quotients de codimension 2 de O , $O/I_1, \ldots, O/I_t$ tels que :

a) pour $i < t$, $O/I_i, \ldots, O/I_{i+1}$ sont liés algébriquement ;

b) $I = I_1$ et O/I_t est une intersection complète.

Ceci nous permet de raisonner par récurrence sur le plus petit t pour lequel on a une telle suite (en fait c'est le nombre minimal de générateurs de I diminué de un). Pour simplifier, nous noterons comme ci-dessus $I = I_1$, $J = I_2$ et K l'idéal qui les lie. K est engendré par h_o, h_1 ou $h_o = \Sigma \lambda_i f_i$, $h_1 = \Sigma \mu_i f_i$. La proposition 2.1 entraîne que (2.3.1)

$$\left\langle f \bmod I , \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ldots , \sum_{i=0}^{s} df_i \wedge dr_i^k , \ldots \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle f \bmod K , \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-1)^s \sum_k g_k \sum_i df_i \wedge dr_i^k \\ h_o \quad , \quad h_1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

J est engendré par $(-1)^s g_1, \ldots, (-1)^s g_s, -h_1, h_o$ où g_k $k=1\ldots s$ est défini comme en 1.2. La matrice des relations entre ces générateurs est

$$\begin{Vmatrix} r_o^1 \ldots r_o^s \lambda_o \mu_o \\ r_s^1 \ldots r_s^s \lambda_s \mu_s \end{Vmatrix} .$$

En effet, on vérifie d'abord facilement que chaque ligne fournit une relation. (Le calcul conduit à un déterminant dont deux lignes sont identiques). On sait d'autre part (§ 1) qu'il existe une base du module des relations $\rho^1, \ldots, \rho^{s+1}$ telle que $\det(\rho^1, \ldots, \rho^{s+1}, e_k) = (-1)^s g_k$, $k=1\ldots s$, $-h_1$ si $k=s+1$, h_o si $k=s+2$. On en déduit que l'élément de $GL(s+1, O)$ qui l'envoie sur les $s+1$ lignes précédentes est de déterminant 1 . On vérifie enfin la condition de normalisation de signe.

Par hypothèse de récurrence, on peut donc affirmer que

$$\left\langle f \bmod J , \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ldots , \sum_{i=1}^{s} (-1)^s dg_i \wedge dr^i_{k-1} - dh_1 \wedge d\lambda_{k-1} + dh_o \wedge d\mu_{k-1} , \ldots \\ \begin{pmatrix} & \lambda_o & \mu_o \\ \boxed{{}^t r} & \vdots & \vdots \\ & \lambda_s & \mu_s \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\rangle = rg_{\mathbb{C}}\, O/J \,.\, f(0)$$

La proposition 2.1 entraîne que le premier membre de cet égalité est aussi

$$\left\langle f \bmod K , \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-1)^{s+1} \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{s-1} f_{k-1} \left\{ \sum_{i=1}^{s} (-1)^s dg_i \wedge dr^i_{k-1} - dh_1 \wedge d\lambda_{k-1} + dh_o \wedge d\mu_{k-1} \right\} \\ h_o \quad , \quad h_1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Au total,

$$\left\langle f \bmod I, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cdot\,,\Sigma df_i\wedge dr_i^k,\,\cdot \\ (r_j^i) \end{bmatrix}\right\rangle + \mathrm{rg}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}/J\,.\, f(0) =$$

$$\left\langle f \bmod K, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^s\left\{\sum_{k=1}^s g_k \sum_{i=0}^s df_i\wedge dr_i^k + \sum_{k=0}^s f_k\sum_{i=1}^s dg_i\wedge dr_k^i\right\} + \sum_{k=0}^s f_k(-dh_1\wedge d\lambda_k + dh_o\wedge d\mu_k) \\ h_o \qquad\qquad h_1 \end{bmatrix}\right.$$

La forme différentielle intervenant dans ce résidu est alors la somme des termes η_1, η_2, η_3

$$\eta_1 = (-1)^s \sum_{k=1}^s g_k \sum_{i=0}^s df_i\wedge dr_i^k = (-1)^s \sum_{i=0}^s df_i\wedge\left(\sum_{k=1}^s g_k\, dr_i^k\right)$$

$$\eta_2 = (-1)^s \sum_{k=0}^s f_k \sum_{i=1}^s dg_i\wedge dr_k^i = (-1)^s \sum_{k=1}^s dg_k\wedge\left(\sum_{i=0}^s f_i\, dr_i^k\right)$$

$$\eta_3 = \sum_{i=0}^s f_i(-dh_1\wedge d\lambda_i + dh_o\wedge d\mu_i)\ .$$

Différentiant successivement chaque relation entre $g_1,\dots,g_s,h_o,h_1$, on a

$$\sum_{k=1}^s g_k dr_i^k + \sum_{k=1}^s r_i^k dg_k + (-1)^{s+1}h_1 d\lambda_i + (-1)^{s+1}\lambda_i dh_1 + (-1)^s h_o d\mu_i + (-1)^s\mu_i dh_o = 0\ .$$

On a aussi

$$\sum_{i=0}^s f_i dr_i^k + \sum_{i=0}^s r_i^k df_i = 0\ .$$

Il vient alors

$$\eta_1 \equiv (-1)^{s+1}\sum_{i=0}^s df_i\wedge\left(\sum_{k=1}^s r_i^k dg_k\right) + \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i df_i\right)\wedge dh_1 - \left(\sum_{i=0}^s \mu_i df_i\right)\wedge dh_o \bmod K\Omega^2$$

$$\eta_2 = (-1)^{s+1}\sum_{k=1}^s dg_k\wedge\left(\sum_{i=0}^s r_i^k df_i\right)$$

Au total,

$$\begin{aligned}\eta_1+\eta_2+\eta_3 &\equiv \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i df_i\right)\wedge dh_1 - \left(\sum_{i=0}^s \mu_i df_i\right)\wedge dh_o \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^s f_i d\lambda_i\right)\wedge dh_1 - \left(\sum_{i=0}^s f_i d\mu_i\right)\wedge dh_o \qquad \bmod K\Omega^2 \\ &\equiv dh_o\wedge dh_1 - dh_1\wedge dh_o = 2dh_o\wedge dh_1\end{aligned}$$

et h_o, h_1 formant une suite régulière, on sait que

$$\langle f \bmod K, \begin{bmatrix} dh_o \wedge dh_1 \\ h_o \quad h_1 \end{bmatrix} \rangle = \mathrm{rg}_{\mathbb{C}}\, O/K \,.\, f(0) \ .$$

On conclut en utilisant 2.2.

Remarquons que le cas $t = 1$ lui-même est réglé par ce calcul. En effet, si I est engendré par $f_o, \ldots, f_s$ et aussi par h_o, h_1 une suite régulière, alors $K = I$, $J = O$. Mais alors, il est clair que l'hypothèse de récurrence s'applique à J . En effet, $\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}\, O/J = 0$ et la forme dont on calcule le résidu est du type $\Sigma f_i \alpha_i$. Or, chaque f_i s'exprime en fonction de h_o et h_1 .

§ 3. - $n = 3$. <u>CAS DES GERMES DE COURBES GAUCHES</u>.

Soit $(C, \underline{0})$ un germe de courbe réduite, donc Cohen-Macaulay dans $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$. Soit $p : \bar{C} \to C$ la normalisation de C un représentant de $(C, \underline{0})$. On sait (cf. [2]) qu'il existe un unique isomorphisme de $\Omega^1_{\bar{C}}$ dans $\mathcal{H}om(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C)$ respectant les structures de Modules dualisants respectives sur $\Omega^1_{\bar{C}}$ et $\mathcal{H}om(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C)$ et qu'on appelle $\mathrm{Tr}\, p : p_* \Omega^1_{\bar{C}} \to \omega_C$ le morphisme composé $p_* \Omega^1_{\bar{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C) \to \omega_C$. Comme dans le cas des germes de courbes planes ou plus généralement intersections complètes, on peut expliciter l'application naturelle $c_C : \Omega^1_C \to p_* \Omega^1_{\bar{C}} \to \omega_C$ qui en résulte.

3.1. PROPOSITION. - <u>Soit</u> (x_1, x_2, x_3) <u>un système de coordonnées au voisinage de</u> $\underline{0}$ <u>dans</u> $\mathbb{C}^3$. <u>Soit</u> I <u>l'idéal de</u> $\mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ <u>définissant</u> $(C, \underline{0})$. <u>Soit</u> $f_o, \ldots, f_s$ <u>un système de générateurs de</u> I , $r^1, \ldots, r^s$ <u>un système de générateurs des relations tel que</u> $f_i = \det(r^1, \ldots, r^s, e_i)$

$$c_C(dx_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ldots, dx_j \wedge \left(\sum_{i=0}^{s} df_i \wedge dr_i^k\right), \ldots \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \qquad j = 1 \ldots 3 \ .$$

Démonstration : comme pour le théorème 2.3, nous allons utiliser le théorème de liaison locale de Peskine-Szpiro [3] th. 3.3. Ici, C étant réduit est donc génériquement intersection complète. Il existe alors des quotients de codimension 2 de O, $O/I_1, \dots, O/I_t$ tels que :

a) pour $i < t$, O/I_i et O/I_{i+1} sont liés géométriquement ;

b) $I = I_1$ et O/I_t est une intersection complète.

Désignons par C_2 la courbe définie par I_2 et par V la courbe intersection complète telle que $V = C \cup C_2$. Soit $p_2 : \bar{C}_2 \to C_2$ la normalisation de C_2.

Pour conclure après un raisonnement par récurrence et un calcul identique à celui de 2.3, il suffit de se convaincre que

$$\varphi_C(dx_j \,|\, C) + \varphi_{C_2}(dx_j \,|\, C_2) = \varphi_V(dx_j \,|\, V)$$

ω_C et ω_{C_2} étant vus comme des sous-Modules de ω_V par l'inclusion naturelle. On sait en effet que h_o, h_1 étant des équations de V

$$\varphi_V(dx_j \,|\, V) = \begin{bmatrix} dx_j \wedge dh_o \wedge dh_1 \\ h_o \quad h_1 \end{bmatrix}$$

Or, considérons d'une part $\varphi_V : \Omega_V^1 \to \omega_V$ et d'autre part $\psi : \Omega_V^1 \to \omega_V$ tel que $\psi(\eta) = \varphi_C(\eta \,|\, C) + \varphi_{C_2}(\eta \,|\, C)$. Si $x \in V$, $x \neq \underline{0}$, le germe en x de $\varphi_V - \psi$ est nul. Mais V étant intersection complète est de Gorenstein. Localement ω_V est isomorphe à $\mathcal{O}_V$ et V étant réduit $\varphi_V = \psi$.

3.2. Considérons encore V une courbe intersection complète en $\underline{0}$ et D telles que C et D soient géométriquement liées par V. Soit $p : \bar{C} \to C$ la normalisation de C et $x_1, \dots, x_r$ les points de $\bar{C}$ au-dessus de $\underline{0}$.

Nous avons remarqué (1.4) que $\omega_C \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1}$ s'identifie à un sous-Module de $\mathcal{O}_C$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} p_*\Omega^1_{\overline{C}} \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} \simeq \mathcal{H}om(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}, \omega_C) \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Trp} \otimes \mathrm{Id}"'] & \mathcal{H}om(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}, \mathcal{O}_C) \arrow[d] \\ \omega_C \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} \arrow[r] & \mathcal{O}_C \end{tikzcd}$$

(où tous les morphismes sont injectifs).

3.2.1. DEFINITION. - $\mathcal{H}om(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}, \mathcal{O}_C)$ <u>s'identifie à un Idéal de</u> $\mathcal{O}_C$ <u>qu'on appelle le conducteur de</u> p <u>et que nous désignerons par</u> $\mathfrak{C}$. $\mathcal{H}om(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}, \omega_C) \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1}$ <u>s'identifie à un Idéal de</u> $\mathcal{O}_C$ <u>que nous appellerons conducteur d'adjonction de</u> p <u>relativement à</u> V <u>et que nous désignerons par</u> $\mathfrak{a}_V$. <u>Evidemment</u> $\mathfrak{a}_V \subset \mathfrak{C}$.

3.2.2. <u>Notation</u> : identifiant $\mathcal{O}_{\overline{C},x_i}$ à $\mathbb{C}\{t_i\}$, nous désignerons par c_i (resp. a_i) l'entier positif tel que $\mathfrak{C}.\mathcal{O}_{\overline{C},x_i} = t^{c_i}\mathbb{C}\{t_i\}$ (resp. $\mathfrak{a}_V.\mathcal{O}_{\overline{C},x_i} = t^{a_i}\mathbb{C}\{t_i\}$). $c = \sum_{i=1}^{r} c_i$ (resp. $a = \sum_{i=1}^{r} a_i$) est la multiplicité de $\mathfrak{C}_{\underline{0}}$ (resp. $\mathfrak{a}_{V,\underline{0}}$) vu comme un idéal de $\mathcal{O}_{C,\underline{0}}$.

3.3. PROPOSITION. - <u>Les notations sont celles de 3.1 et 3.2. De plus</u> v_i <u>désigne la valuation canonique sur</u> $\mathbb{C}\{t_i\}$ <u>et</u> $h_o = \sum_{j=0}^{s} \lambda_j f_j$, $h_1 = \Sigma \mu_j f_j$ <u>sont les équations de</u> V

$$a_i = v_i\left(\det \frac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ p\right) - v_i(x_1 \circ p) + 1 .$$

<u>Démonstration</u> : considérons le diagramme commutatif de 3.2. D'après 3.1 :

$$\varphi_C(dx_1) = \mathrm{Trp}(dx_1 \circ p) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ldots, dx_1 \wedge (\sum_{i=0}^{s} df_i \wedge dr_i^k), \ldots \\ (r_j^i) \end{bmatrix}$$

Nous identifions localement au voisinage de $\underline{0}$ $\mathcal{O}_V$ à ω_V par l'isomorphisme $h \rightsquigarrow \begin{bmatrix} hdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ h_o \quad h_1 \end{bmatrix}$. Alors $g_1,\dots,g_s$ étant définis comme dans 1.2, l'image dans $\mathcal{O}_C$ de $Tr(dx_1 \circ p) \otimes 1$ est dans la forme :

$$\frac{1}{2} \cdot (-1)^s \cdot \sum_{k=1}^{s} g_k \left(dx_1 \wedge \left(\sum_{i=0}^{s} df_i \wedge dr_i^k\right)\right) | C$$

l'élément de $\mathcal{O}_C$ figurant devant $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 | C$. Or, le calcul effectué en 2.3 montre qu'il s'agit en fait de la forme

$$dx_1 \wedge dh_o \wedge dh_1 | C = \det \frac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 | C \ .$$

Or $\left(p_* \Omega^1_{\overline{C}} \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1}\right) \cdot \mathcal{O}_{\overline{C}, x_i}$ est engendré en tant que $\mathcal{O}_{\overline{C}, x_i}$-module par $dt_i \otimes 1$. a_i est donc la valuation dans $\mathbb{C}\{t_i\}$ de l'image de $Tr(dt_i) \otimes 1$ et le calcul ci-dessus donne le résultat annoncé.

3.4. COROLLAIRE. - <u>Dans la situation de 3.2, désignant par</u> n <u>la multiplicité de</u> C <u>en</u> $\underline{0}$, <u>par</u> Δ_V <u>la multiplicité de l'idéal restriction à</u> C <u>de l'idéal jacobien de</u> V (<u>le 2e idéal de Fitting de</u> Ω^1_V), <u>par</u> r <u>le nombre de composantes irréductibles de</u> C, <u>on a</u>

$$\Delta_V = a + n - r \ .$$

<u>Démonstration</u> : choisissons un système de coordonnées tel que x_1 soit un paramètre transversal à V. Alors $n = \sum_{i=1}^{r} v_i(x_1 \circ p)$.

On sait que $J = F^2(\Omega^1_V)$ est la restriction à V de l'idéal engendré par les 2-mineurs de la matrice jacobienne $\dfrac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$. Soit $\pi : \overline{V} \to V$ la normalisation de V ; $\overline{V} = \overline{C} \amalg \overline{D}$. Soit x_i, $i = r+1 \dots t$, les points de $\overline{V}$ qui s'envoient sur $\underline{0}$ et n'appartiennent pas à $\overline{C}$. Soit v_i la valuation naturelle sur $\mathbb{C}\{t_i\} \simeq \mathcal{O}_{\overline{V}, x_i}$ $i=1\dots t$. x_1 étant un paramètre transversal, on a :

$$v_i \frac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ \pi = \inf v_i \frac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2})} \circ \pi \qquad i = 1 \dots t \ .$$

Le corollaire est alors une conséquence immédiate de 3.3 et du corollaire 1 théorème 24 [5].

3.5. PROPOSITION. - Soit $(C,\underline{0})$ un germe de courbe réduite dans $(\mathbb{C}^3,\underline{0})$, $(V,\underline{0})$ un germe d'intersection complète contenant C et $(D,\underline{0})$ un germe de courbe tel que C et D soient géométriquement liés par V . Soit $p : \overline{C} \to C$ la normalisation de C , $x_1,\dots,x_r$ les points de $\overline{C}$ au-dessus de $\underline{0}$. Les notations étant celles de 3.1, l'application

$$\left(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}\right)_{\underline{0}}/\mathcal{O}_{C,\underline{0}} \times \omega_{C,\underline{0}}\Big/\left(p_*\Omega^1_{\overline{C}}\right)_{\underline{0}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui à f germe de section de $\mathcal{O}_{\overline{C}}$ au voisinage de $p^{-1}(\underline{0})$ et $\begin{bmatrix} \dots, u_k dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3,\dots \\ (r^i_j) \end{bmatrix}$ germe de section de ω_C au voisinage de $\underline{0}$ fait correspondre :

$$\sum_{i=1}^{r} \operatorname{res}_{x_i} \frac{(-1)^s f\left(\sum_{k=1}^{s} g_k u_k\right)\circ p \; dx_1\circ p}{\dfrac{\partial(h_o,h_1)}{\partial(x_2,x_3)}\circ p}$$

où (h_o,h_1) est un système d'équations de V et $(h_o,h_1,g_1,\dots,g_s)$ le système d'équations de D déterminé en 1.2, est un accouplement parfait.

Démonstration : C étant Cohen-Macaulay, il existe un isomorphisme canonique entre $\left(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}\right)_{\underline{0}}/\mathcal{O}_{C,\underline{0}}{}^*$ et $\operatorname{Ext}^1\left(\left(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}\right)_{\underline{0}}/\mathcal{O}_{C,\underline{0}},\omega_{C,\underline{0}}\right)$ et le calcul effectué ([2] lemme 6.1) montre que ce dernier est isomorphe à $\omega_{C,\underline{0}}/\left(p_*\Omega^1_{\overline{C}}\right)_{\underline{0}}$. Il suffit donc de montrer que cet isomorphisme est défini comme indiqué par la formule ci-dessus.

Or, désignant par $\pi : \overline{V} \to V$ la normalisation de V , l'inclusion de C dans V induit un morphisme : $\pi_*\mathcal{O}_{\overline{V}}/\mathcal{O}_V \to p_*\mathcal{O}_{\overline{C}}/\mathcal{O}_C$.
Elle induit également un morphisme $\omega_C/\mathcal{H}om(p_*\mathcal{O}_{\overline{C}},\omega_C) \to \omega_V/\mathcal{H}om(\pi_*\mathcal{O}_{\overline{V}},\omega_V)$.

On sait maintenant que l'isomorphisme entre $(\pi_*\mathcal{O}_{\bar{V}})_{\underline{0}}/\mathcal{O}_{V,\underline{0}}^{\;*}$ et $\mathrm{Ext}^1\left((\pi_*\mathcal{O}_{\bar{V}})_{\underline{0}}/\mathcal{O}_{V,\underline{0}}, \omega_{V,\underline{0}}\right)$ est induit par l'accouplement qui à f germe de section de $\mathcal{O}_{\bar{V}}$ au voisinage de $\pi^{-1}(\underline{0})$ et $\begin{bmatrix} u\ dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \\ h_o \quad h_1 \end{bmatrix}$ germe de section de ω_V au voisinage de $\underline{0}$ fait correspondre

$$\sum_{i=1}^{t} \mathrm{res}_{x_i} \frac{fu\circ\pi d(x_1\circ\pi)}{\dfrac{\partial(h_o,h_1)}{\partial(x_2,x_3)}\circ\pi}$$

où $x_1,\dots,x_r,x_{r+1},\dots,x_t$ sont les points de $\bar{V}$ au-dessus de $\underline{0}$. Il suffit alors de se rappeler la forme explicite (1.1) de l'injection de ω_C dans ω_V .

3.6. COROLLAIRE. - <u>Dans la situation de 3.5</u>

$$a_i - c_i = \inf_{k=1\dots s} v_i(g_k\circ p) .$$

<u>Démonstration</u> : nous allons d'abord montrer que $a_i - c_i \le \inf v_i(g_k\circ p)$. En effet, soit

$$\eta_k = \begin{bmatrix} \dots,0,\dots,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3,\dots,0,\dots \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \in \omega_{C,\underline{0}}$$

où $dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ figure à la k-ième place. Soit $f \in \mathbb{C}_{\underline{0}}$. $f\eta_k$ définit un élément de $\mathcal{H}om\left(p_*\mathcal{O}_{\bar{C}},\omega_C\right)_{\underline{0}}$. Donc $fg_k \in \mathcal{O}_{V,\underline{0}}$ et $v_i(f\circ p\ g_k\circ p) \ge a_i$ $i=1\dots r$ par définition. Or, il existe $f \in \mathbb{C}_{\underline{0}}$ tel que $v_i(f\circ p) = c_i$.

Identifions maintenant $\left(p_*\mathcal{O}_{\bar{C}}\right)_{\underline{0}}$ à $\mathbb{C}\{t_1\}\oplus\dots\oplus\mathbb{C}\{t_r\}$. $t_i^{c_i-1}$ ne provient pas d'un élément de $\mathcal{O}_{C,\underline{0}}$. Il existe alors d'après 3.5, $u_1,\dots,u_s$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,\underline{0}}$ tels que

$$\mathrm{res}_{x_i} \frac{t_i^{c_i-1}\left(\sum_{k=1}^{s} g_k u_k\circ p\right)d(x_1\circ p)}{\dfrac{\partial(h_o,h_1)}{\partial(x_2,x_3)}\circ p} \neq 0 .$$

Or, $a_i = v_i\left(\frac{\partial(h_o,h_1)}{\partial(x_2,x_3)}\circ p\right) - v_i(x_1\circ p) + 1$.

Nous avons donc à calculer le résidu d'une 1-forme qui s'écrit $\left(\sum_{k=1}^{s} g_k u_k\circ p\right) t_i^{c_i-a_i-1}\, dt_i$ et nous venons de constater que $v_i\left(\sum_{k=1}^{s} g_k u_k\circ p\right) \geq a_i - c_i$. Le résidu de cette forme ne peut être non nul que si il existe $u_1,\ldots,u_s$ tels que $v_i\left(\sum_{k=1}^{s} g_k u_k\circ p\right) = a_i - c_i$, ce qui entraîne immédiatement qu'il existe k tel que $v_i(g_k\circ p) = a_i - c_i$.

3.7. COROLLAIRE. - <u>Dans la situation de 3.5, soit</u> Q <u>l'idéal de</u> $\mathcal{O}_{C,\underline{0}}$ <u>définissant</u> $C\cap D$ <u>dans</u> C <u>en</u> $\underline{0}$

$a - c = \text{mult}\, Q$.

<u>Démonstration</u> : Q est engendré par $g_1,\ldots,g_s,h_o,h_1$. C'est encore une conséquence de corollaire 1, théorème 24 [5].

3.8. COROLLAIRE. - <u>Toujours dans la situation de 3.5, supposons de plus</u> C <u>analytiquement irréductible en</u> $\underline{0}$. <u>Soit</u> Γ <u>le semi-groupe des valeurs de</u> $\mathcal{O}_{C,\underline{0}} = \{v(f\circ p)\ \ f\in\mathcal{O}_{C,\underline{0}}\}$. $g_1,\ldots,g_s$ <u>étant définis comme en 1.2, soit</u> $S_V = \left\{v\left(\sum_{k=1}^{s} g_k \ell_k\circ p\right)\ \ \ell_k\in\mathcal{O}_{C,\underline{0}}\right\}$. <u>Alors</u> $\tau + a - c \in S_V \Leftrightarrow c - 1 - \tau \notin \Gamma \quad 0 \leq \tau \leq c-1$.

<u>Démonstration</u> : supposons $\tau + a - c \in S_V$. Il existe $\ell_1,\ldots,\ell_s \in \mathcal{O}_{C,\underline{0}}$ tels que $v(\Sigma g_k\ell_k\circ p) = \tau + a - c$. Montrons que $c - 1 - \tau \in \Gamma$ est impossible. En effet, il existerait $f \in \mathcal{O}_{C,\underline{0}}$ tel que $v(f) = c - 1 - \tau$ et on aurait

$$\text{res}\ \frac{f(\Sigma g_k\ell_k\circ p)\, d(x_1\circ p)}{\frac{\partial(h_o,h_1)}{\partial(x_2,x_3)}\circ p} = 0 .$$

Or, la valuation de cette forme est $v(f) + v(\Sigma g_k\ell_k\circ p) - a$ d'après 3.3

et donc $c-1-\tau+\tau+a-c-a = -1$ à cause des hypothèses. Cette forme n'aurait donc pas un résidu nul.

Il suffit maintenant de constater que le nombre des $\mu \in S_V$ tels que $a-c \leq \mu \leq a-1$ est égal au nombre des $\tau \notin \Gamma$ tels que $0 \leq \tau \leq c-1$. Or, ce dernier est égal à $\delta = \ell g\left(p_* \mathcal{O}_{\overline{C}}\right)_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{C,\underline{0}}$. Quant au premier, c'est $\ell g\ \omega_{C,\underline{0}} / p_* \Omega^1_{\overline{C},\underline{0}} = \delta$.

3.9. PROPOSITION. - Dans la situation de 3.5 et 3.7, si μ désigne le nombre de Milnor de C en $\underline{0}$

$$\mu = c + \operatorname{mult} Q - \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,\underline{0}}/Q - r + 1$$

où Q est l'idéal de $\mathcal{O}_{C,\underline{0}}$ définissant $C \cap D$ dans C en $\underline{0}$, D étant n'importe quelle courbe liée géométriquement à C dans une intersection complète.

Démonstration : par définition $\mu = 2\delta - r + 1$ où r désigne le nombre de branches de C (voir [1]).

D'après 3.5,

$$\delta = \ell g\left(p_* \mathcal{O}_{\overline{C}}\right)_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{C,\underline{0}} = \ell g\ \omega_{C,\underline{0}} / \mathcal{H}om\left(p_* \mathcal{O}_{\overline{C}}, \omega_C\right)_{\underline{0}}$$

$$= \ell g\left(\omega_C \otimes \omega_V^{-1}\right)_{\underline{0}} / \left[\mathcal{H}om\left(p_* \mathcal{O}_{\overline{C}}, \omega_C\right) \otimes \omega_V^{-1}\right]_{\underline{0}}$$

$$= -\ell g\ \mathcal{O}_{C,\underline{0}} / \left[\omega_C \otimes \omega_V^{-1}\right]_{\underline{0}} + \ell g\ \mathcal{O}_{C,\underline{0}} / \left[\mathcal{H}om\left(p_* \mathcal{O}_{\overline{C}}, \omega_C\right) \otimes \omega_V^{-1}\right]_{\underline{0}}$$

$$= -\operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,\underline{0}}/Q - \delta + a .$$

On en déduit $2\delta = a - \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,\underline{0}}/Q = c + \operatorname{mult} Q - \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,\underline{0}}/Q$

$$\mu = c - r + 1 + \operatorname{mult} Q - \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C,\underline{0}}/Q .$$

3.7. Un exemple : soit $(C,\underline{0})$ la courbe définie par $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$. Son idéal est engendré par 3 générateurs $f_o = y^2 - xz$,

$f_1 = x^3 - yz$, $f_2 = z^2 - x^2y$ lié par 2 relations $r^1 = (z,y,x)$, $r^2 = (x^2,z,y)$. Soit V la courbe intersection complète définie par $h_o = \Sigma\lambda_i f_i$, $h_1 = \Sigma\mu_i f_i$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$. La courbe D liée à V a alors pour équations

$$g_1 = -x^2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) + z(\lambda_o\mu_2 - \lambda_2\mu_o) - y(\lambda_o\mu_1 - \mu_o\lambda_1)$$

$$g_2 = z(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) - y(\lambda_o\mu_2 - \lambda_2\mu_o) + x(\lambda_o\mu_1 - \mu_o\lambda_1)$$

$$\det \frac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(y,z)} = (\lambda_o\mu_1 - \mu_o\lambda_1)(xz - 2y^2) + (\lambda_o\mu_2 - \lambda_2\mu_o)(4yz - x^3) - (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(yx^2 + 2z^2)$$

On a donc,

si $\lambda_o\mu_1 - \mu_o\lambda_1 \neq 0$ $\quad a_V = 8 - 3 + 1 = 6$

si $\lambda_o\mu_1 - \mu_o\lambda_1 = 0$ $\quad a_V = 9 - 3 + 1 = 7$.

Dans le premier cas, $a_V - c = 3$, dans le second cas $a_V - c = 4$. On a évidemment $c = 3$ et $\mu = 4 = \mathcal{O}_V - \mathrm{rg}\,\mathcal{O}_{C\cap D, \underline{0}} = 6 - 2 = 7 - 3$. Le premier cas est le cas général où la tangente à C est distincte de la tangente à D . Dans le second cas C et D ont même tangente .

REFERENCES.

[1] R.O. BUCHWEITZ et G.M. GREUEL : Le nombre de Milnor, équisingularité et déformations de singularités de courbes réduites, CRAS 288 - (35-38) 1979.

[2] M. LEJEUNE-JALABERT : Le théorème "AF + BG" de Max-Noether (à paraître).

[3] C. PESKINE - L. SZPIRO : Liaison des variétés algébriques I . Inventiones math. 26, 271-302 (1974).

[4] J.P. SERRE : Sur les modules projectifs, séminaire Dubreil-Pisot, 60-61, n°2.

[5] O. ZARISKI, P. SAMUEL : Commutative algebra, Van Nostrand.

(mars 1980)