C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 11–14

Équations différentielles/*Differential Equations*

La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences

Jacques Sauloy

Laboratoire Émile Picard, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062, Toulouse cedex, France

Reçu et accepté le 26 octobre 2001

Note présentée par Bernard Malgrange.

Résumé Selon le lemme d'Adams, à la première pente du polygone de Newton d'une équation aux q-différences est associé un système complet de solutions convergentes. Nous en déduisons l'existence d'une filtration canonique par les pentes des modules aux q-différences, telle que le passage au gradué associé est un foncteur fidèle, exact et compatible avec le produit tensoriel. Pour citer cet article : J. Sauloy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 11–14. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The canonical slope filtration of a q-difference module

Abstract According to Adams' lemma, to the first slope of the Newton polygon of a q-difference equation is associated a full complement of convergent solutions. We draw from this the existence of a canonical filtration by the slopes of q-difference modules, such that the associated graded module functor is faithful, exact and tensor compatible. To cite this article: J. Sauloy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 11–14. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Notations. – Soit q un nombre complexe de module > 1. La lettre K désignera l'un des corps suivants : $\mathcal{M}(\mathbf{C})$, le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$; $\mathbf{C}(\{z\})$, le corps des séries de Laurent convergentes ; $\mathbf{C}((z))$, le corps des séries de Laurent formelles. On notera alors σ l'automorphisme $f(z) \mapsto f(qz)$ de K, v_0 sa valuation z-adique et $\mathcal{D}_q = K\langle T, T^{-1}\rangle$ l'algèbre de Öre des polynômes de Laurent non commutatifs, caractérisée par les relations :

$$\forall x \in K,\ \forall k \in \mathbf{Z}, \quad T^k x = \sigma^k(x) T^k.$$

Un tel polynôme $P \in \mathcal{D}_q$ modélise donc l'opérateur aux q-différences $P(\sigma)$.

1. Introduction

Comme pour les équations différentielles, l'étude locale de l'équation aux q-différences d'ordre n :

$$a_0\sigma^n f + a_1\sigma^{n-1} f + \cdots + a_n f = 0, \quad a_0, \ldots, a_n \in K,\ a_0 a_n \neq 0, \tag{1}$$

Adresse e-mail : sauloy@picard.ups-tlse.fr (J. Sauloy).

S1631-073X(02)02179-9/FLA

fait intervenir un *polygone de Newton*, introduit par Adams *(voir* [1,2]). C'est l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ de l'ensemble :

$$\big\{(i,j) \mid 0 \leqslant i \leqslant n,\ a_i \neq 0,\ j \geqslant v_0(a_i)\big\}.$$

Nous le noterons $N(P)$, $P(T)$ désignant le polynôme non commutatif $a_0T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_n$. Les pentes finies de $N(P)$ sont les rationnels :

$$\mu_1 = \frac{d_1}{r_1} < \cdots < \mu_k = \frac{d_k}{r_k},$$

où les entiers r_i et d_i sont l'abscisse et l'ordonnée du i-ème vecteur frontière. Il sera commode d'introduire la *fonction de Newton associée,* une application de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{N}$ à support fini :

$$\lambda \mapsto r_P(\lambda) = \begin{cases} r_i & \text{si } \lambda = \mu_i, \\ 0 & \text{si } \lambda \notin \{\mu_1 \ldots, \mu_k\}. \end{cases}$$

Ce polygone obéit aux règles de calcul habituelles. Par ramification, on peut rendre entières les pentes. À la pente μ sont alors associées des solutions de la forme $\theta^{\mu} e_c F(l)$, où $\sigma\theta = z\theta$, $\sigma e_c = c e_c$, $\sigma l = l + 1$ et F est un polynôme dont les coefficients sont des séries formelles en z, de degré majoré par la multiplicité de l'exposant c.[1] On doit à Adams les résultats suivants :

1. Le système des solutions formelles ainsi associées à la pente μ_i est de rang maximal, soit r_i.
2. Si les coefficients de (1) sont convergents, les solutions formelles attachées à la première pente le sont aussi. Précisément, si $K = \mathbf{C}(\{z\})$, les séries formelles coefficients des polynômes F attachés à la première pente appartiennent à K.

Ce dernier énoncé, le *lemme d'Adams*, est tout à fait caractéristique des équations aux q-différences. Il est en outre facile d'en déduire la même assertion dans le cas où $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$, car l'équation fonctionnelle (1) propage la méromorphie : c'est aussi une propriété caractéristique des équations aux q-différences. Ce lemme fondamental a été exhumé par Changgui Zhang après des décennies de sommeil et utilisé pour obtenir des factorisations canoniques (*voir* [8]). Il était d'ailleurs implicite dans les calculs menant à des résultats analogues de Birkhoff (*voir* [5]). Nous donnons dans cette Note une interprétation abélienne du lemme d'Adams, en termes de *filtration canonique par les pentes.* Nous montrons de plus les excellentes propriétés abéliennes et tensorielles du gradué associé, similaires à celles axiomatisées par Saavedra dans [13], et *opposées* à celles axiomatisées par Yves André dans [3]. Nos résultats admettent au moins deux applications importantes :

- Ils permettent de ramener la classification *analytique*[2] des équations irrégulières à celle des équations pures (une seule pente), qui est classique, et à celle des extensions d'objets purs. Cette dernière étape, qui repose sur une interprétation homologique des opérateurs de Stokes, est franchie dans [12] grace à une nouvelle méthode de resommation due à Changgui Zhang.
- Ils permettent de déduire la théorie de Galois des équations irrégulières de la théorie dans le cas fuchsien, telle qu'elle est exposée dans [14] et [15]. C'est l'objet de [16].

2. Principaux résultats

2.1. Le polygone de Newton d'un module aux q-différences

L'équation (1) est modélisée par le *module aux q-différences* $M_P = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q.P$, un objet de la catégorie $\mathrm{Diff\,Mod}(K,\sigma)$ des $\mathcal{D}_q$-modules à gauche de longueur finie ; de plus, d'après le *lemme du vecteur cyclique* de Birkhoff (*voir* [6]), tout objet de $\mathrm{Diff\,Mod}(K,\sigma)$ est de la forme M_P et, $\mathcal{D}_q$ étant euclidien à gauche, on peut choisir P unitaire de degré minimum.

Des résultats d'Adams, il résulte que, si P est à pentes entières (on s'y ramène par ramification), M_P admet une suite de composition dont les objets sont de rang 1. La méthode de Gabber exposée dans [7] permet de définir le polygone de Newton du module M_P, de montrer qu'il est intrinsèque (cela résulte du théorème de Jordan–Holder) et que c'est celui de P ; ce dernier point résulte de la suite exacte

$$0 \to M_{P'} \to M_{P'P''} \to M_{P''} \to 0$$

et du calcul direct de $N(P'P'')$. Un objet de rang 1 est de la forme $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q.(T-u)$, où u est défini à une unité près. Son polygone de Newton admet une seule pente, d'abscisse 1 et d'ordonnée $v_0(u)$. Nous noterons r_M la fonction de Newton associée au polygone de Newton de M.

Dans [10] est explicitée la structure tensorielle de $\mathrm{Diff\,Mod}(K,\sigma)$, qui en fait une catégorie tannakienne. Dans le cas d'objets M_P et M_Q de rang 1, avec $P = T - u$ et $Q = T - v$, on a $M_P \otimes M_Q = M_R$ avec $R = T - uv$. On en déduit les énoncés suivants :

THÉORÈME 1 (additivité et multiplicativité du polygone de Newton). – (i) *Pour toute suite exacte* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, *on a* $r_M = r_{M'} + r_{M''}$.

(ii) *La fonction de Newton d'un produit tensoriel est le produit de Cauchy des fonctions de Newton des facteurs :* $r_{M_1\otimes M_2}(\mu) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} r_{M_1}(\mu_1) r_{M_2}(\mu_2)$.

(iii) *Un sous-module et un quotient d'un module pur de pente* μ *sont purs de pente* μ. *Une extension et une somme de deux modules purs de même pente* μ *sont aussi purs de pente* μ. *Le seul morphisme entre des modules purs de pentes différentes est* 0.

2.2. La filtration par les pentes

On voit donc que, μ étant arbitraire, tout module M admet un sous-module maximal de pente μ. Si de plus μ est la plus petite pente et qu'elle est entière, on déduit du lemme d'Adams que ce sous-module a pour rang $r_M(\mu)$. Un argument de descente galoisienne entraîne alors que c'est encore vrai si μ est rationnelle. En itérant, on définit la *filtration canonique par les pentes* $(F^{\leqslant\mu}M)_{\mu\in\mathbf{Q}}$.

THÉORÈME 2. – (i) *Un module aux* q*-différences* M *de plus petite pente* μ_1 *admet un sous-module pur de pente* μ_1 *maximal et celui-ci est de rang* $r_M(\mu_1)$.

(ii) *Un module aux* q*-différences* M *de pentes* $\mu_1 < \cdots < \mu_k$ *admet une unique filtration ascendante dont quotients sont purs de pentes croissantes ; ces pentes sont* $\mu_1, \ldots, \mu_k$.

Si l'on applique un morphisme, on tire du théorème 1 et de l'assertion d'unicité ci-dessus le

THÉORÈME 3. – *Tout morphisme est strict. En particulier, la filtration canonique est fonctorielle.*

2.3. Le gradué associé

On peut donc associer à tout module M son gradué $\mathrm{gr}(M)$, qui est somme directe (indexée par $\mathbf{Q}$) de modules purs $M(\mu)$. En ce qui concerne le produit tensoriel, un raisonnement d'algèbre linéaire joint à l'assertion d'unicité du théorème 2 permet de prouver que notre filtration vérifie l'axiome FE3 de [13], IV.2.1, p. 214 :

$$F^{\leqslant\mu}(M_1 \otimes M_2) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} F^{\leqslant\mu_1}M_1 \otimes F^{\leqslant\mu_2}M_2.$$

THÉORÈME 4. – *Le foncteur* gr *est exact, fidèle et commute au produit tensoriel.*

L'exactitude vient classiquement du fait que tous les morphismes sont stricts. Le reste est prouvé dans *loc. cit.* pour les espaces vectoriels sous-jacents seulement, mais cela suffit clairement dans notre cas.

Remarque (la classification formelle). – Dans le cas formel, on obtient un sous-module pur de rang maximal pour *chaque* pente, et M est isomorphe à $\mathrm{gr}(M)$. On retrouve ainsi la classification *formelle* telle qu'elle est exposée dans [9] et dans [10].

[1] Le polygone de Newton admet des interprétations en termes d'indices (*voir* [4]), de croissance des solutions (*voir* [11]) et de décomposition formelle (*voir* [9]).

[2] Pour la classification *formelle,* voir *infra,* à la fin de 2.3.

Références bibliographiques

[1] Adams C.R., On the linear ordinary q-difference equations, Ann. Math., Série 2, 30 (2) (1929) 195–205.
[2] Adams C.R., Linear q-difference equations, Bull. Amer. Math. Soc. (1931) 361–399.
[3] André Y., Filtrations de type Hasse–Arf et monodromie p-adique, Preprint de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, 2001.
[4] Bézivin J.-P., Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, Aequationes Math. 43 (1992) 159–176.
[5] Birkhoff G.D., Guenther P.E., Note on a canonical form for the linear q-difference system, Proc. Nat. Acad. Sci. 27 (4) (1941) 218–222.
[6] Di Vizio L. Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck–Katz conjecture on p-curvatures, Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, no 286, 2000.
[7] Katz N., On the calculation of some differential Galois groups, Invent. Math. 87 (1987) 13–61.
[8] Marotte F., Zhang C., Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, Ann. Inst. Fourier 50 (6) (2000) 1859–1890.
[9] Praagman C., The formal classification of linear difference equations, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A 86 (1983).
[10] van der Put M., Singer M.F., Galois Theory of Difference Equations, Lecture Notes in Math., Vol. 1666, Springer-Verlag, 1997.
[11] Ramis J.-P., About the growth of entire functions solutions to linear algebraic q-difference equations, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 6, I (1) (1992) 53–94.
[12] Ramis J.-P., Sauloy J., Zhang C., Local analytic classification of irregular q-difference equations, 2001 (in preparation).
[13] Saavedra Rivano N., Catégories tannakiennes, Lecture Notes in Math., Vol. 265, Springer-Verlag, 1972.
[14] Sauloy J., Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, Ann. Inst. Fourier 50 (4) (2000) 1021–1071.
[15] Sauloy J., Galois theory of Fuchsian q-difference equations, 2001 (soumis).
[16] Sauloy J., Local Galois theory of irregular q-difference equations, 2002 (in preparation).
[17] http ://picard.ups-tlse.fr/~saulou (exposés au groupe de travail « Équations aux q-différences »).