C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 189–194

Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

The range of the derivative of a differentiable bump

Thierry Gaspari

Mathématiques pures de Bordeaux (MPB), UMR 5467 CNRS, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

Received 23 November 2001; accepted 26 November 2001

Note presented by Michel Talagrand.

Abstract We study the range of the derivative of a Frechet differentiable bump. X is an infinite dimensional separable C^p-smooth Banach space. We first prove that any connected open subset of X^* containing 0 is the range of the derivative of a C^p-bump. Next, analytic subsets of X^* which satisfy a natural linkage condition are the range of the derivative of a C^1-bump. We find analogues of these results in finite dimensions. We finally show that $f'(\mathbb{R}^2)$ is the closure of its interior, if f is a C^2-bump on $\mathbb{R}^2$. ***To cite this article: T. Gaspari, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 189–194.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

L'image de la dérivée d'une fonction bosse différentiable

Résumé Nous étudions l'image de la dérivée d'une fonction bosse Fréchet différentiable. X est un espace de Banach séparable de dimension infinie et C^p-lisse. Tout d'abord nous montrons que tout ouvert connexe de X^* contenant 0 est l'image de la dérivée d'une bosse de classe C^p. Ensuite, les parties analytiques de X^* qui vérifient une condition naturelle de liaison sont l'image de la dérivée d'une bosse de classe C^1. Nous trouvons des résultats analogues en dimension finie. Finalement, nous prouvons que si f est une C^2-bosse sur $\mathbb{R}^2$, $f'(\mathbb{R}^2)$ est l'adhérence de son intérieur. ***Pour citer cet article : T. Gaspari, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 189–194.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Version française abrégée

Une bosse est une fonction définie sur un espace X, à valeurs réelles, et à support borné. Nous étudions l'ensemble $f'(X) = \{f'(x), x \in X\}$, qui est l'image de la dérivée de f, où f est une bosse Fréchet différentiable et X un espace de Banach. Nous nous intéressons tout d'abord aux relations liant les ouverts connexes et les images de dérivées. Rappelons que si f est une bosse Fréchet différentiable, alors $f'(X)$ est connexe. Cette extension du théorème de Darboux est démontrée par J. Malỳ dans [5]. Nous obtenons une sorte de réciproque.

THÉORÈME 1. – *Soit X un espace de Banach séparable, de dimension infinie, tel qu'existent $p \geqslant 1$ et une bosse $b : X \to \mathbb{R}$, p fois continûment Fréchet différentiable, telle que $\|b^{(p)}\|_\infty$ est finie. Tout ouvert connexe de X^* contenant* 0 *est l'image de la dérivée d'une bosse de classe* C^p.

E-mail address: gaspari@math.u-bordeaux.fr (T. Gaspari).

S1631-073X(02)02223-9/FLA

Pour démontrer ce théorème, le raisonnement est le suivant : nous construisons des parties de X^*, que nous appellerons des tubes, qui sont l'image de la dérivée d'une bosse de classe C^p. Nous montrons alors que chaque point de U peut être joint à 0 par une union finie de ces tubes. X étant séparable et lisse, X^* est séparable [4]. Ceci nous permet de recouvrir U par une union dénombrable d'unions finies de tubes vérifiant une certaine propriété de liaison. Mais chacune de ces unions finies de tubes est l'image de la dérivée d'une fonction bosse de classe C^p. Nous sommons alors toutes ces fonctions, en ayant auparavant effectué les homothéties ou translations nécessaires pour que leurs supports soient disjoints. Ceci donne une fonction de classe C^p dont la dérivée a pour image U.

Par des techniques similaires, on obtient en dimension finie le

THÉORÈME 2. – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ contenant* 0 *est l'image de la dérivée d'une bosse Fréchet différentiable.*

Le résultat suivant est une condition suffisante sur les parties analytiques de X^* pour qu'elles soient l'image de la dérivée d'une bosse de classe C^1. Nous savons déjà que l'image de la dérivée d'une bosse C^1 est un ensemble analytique qui contient 0. De plus, si f est une bosse C^1 et si f' est lipschitzienne, alors il existe $M > 0$ tel que tout point de $f'(X)$ peut être joint à 0 par un chemin $\gamma : [0,1] \to f'(X)$ qui est M-lipschitzien. Ainsi, le théorème 3 ci dessous est une réciproque partielle à ces résultats. Nous utiliserons les multiindices, dont nous rappelons d'abord quelques notations. Soit $k \geqslant 0$ et $\sigma = (q_j)_{j\geqslant 0}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Si $q_k \neq 0$ et $q_j = 0$ pour tout $j > k$, alors $k = |\sigma|$ est appelé la longueur de σ. Si $j \in \mathbb{N}$, $\sigma[j] = q_j$, et $\sigma_{|j}$ est le multiindice $(\sigma[0], \ldots, \sigma[j], 0, \ldots)$. Si $k \geqslant 1$ et $\sigma = (q_0, \ldots, q_k, 0, \ldots)$, alors $\sigma-$ est le multiindice $(q_0, \ldots, q_{k-1}, 0, \ldots)$. Si $|\sigma| = 0$, alors on convient que $\sigma- = (0, \ldots, 0, \ldots) = 0$.

THÉORÈME 3. – *Soit X un espace de Banach séparable, de dimension infinie, tel qu'il existe une bosse $b : X \to \mathbb{R}$ de classe* C^1 *telle que $\|b'\|_\infty$ est finie. Soit F une partie de X^*. S'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X^*$ continue sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et une suite sommable $(\delta_k)_{k\geqslant 0}$ telles que*

$$\begin{cases} \varphi(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = F \quad \textit{et} \quad \varphi(0, \ldots, 0, \ldots) = 0 \\ \textit{pour tout } k \geqslant 0, \quad |\sigma| = k \Rightarrow [\varphi(\sigma-), \varphi(\sigma)] \subset \operatorname{int}(F) \quad \textit{et} \quad \|\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)\| < \delta_k \end{cases}$$

alors F est l'image de la dérivée d'une bosse de classe C^1.

La méthode pour démontrer ce théorème est la suivante : si σ est un multiindice, si $k \geqslant 0$, alors il existe un nombre $\alpha > 0$ assez petit pour que $[\varphi(\sigma_{|k}), \varphi(\sigma_{|k+1})] + \alpha B_{X^*} \subset \operatorname{int}(F)$. Nous appliquons alors une variante du théorème 1, qui nous donne une bosse C^1, notée $g_{\sigma_{|k}}$, telle que $g'_{\sigma_{|k}}(X) = [0, \varphi(\sigma_{|k+1}) - \varphi(\sigma_{|k})] + \alpha B_{X^*}$ et $g'_{\sigma_{|k}}$ est égale à $\varphi(\sigma_{|k+1}) - \varphi(\sigma_{|k})$ sur un ouvert non vide $\Omega_{\sigma|k}$. Cette construction peut être effectuée pour tout σ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et tout $k \geqslant 0$. Nous transformons les bosses obtenues par des homothéties et des translations, pour obtenir la propriété suivante : si $k \geqslant 0$, si σ et τ sont deux multiindices différents de longueur k, alors $g_{\sigma_{|k}}$ et $g_{\tau_{|k}}$ ont des supports disjoints, et le support de $g_{\sigma_{|k}}$ est inclus dans l'ouvert $\Omega_{\sigma|k-1}$. Enfin, nous sommons toutes ces fonctions bosses et obtenons le résultat souhaité. Ce théorème est plus large que le résultat obtenu récemment et indépendamment par [3]. Nous construisons un compact de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant la condition du théorème 3 mais qui n'est pas l'image de la dérivée d'une bosse C^1. Par conséquent, le théorème 3 n'est plus vrai en dimension finie. Néanmoins, la condition du théorème 3 peut être étendue en dimension finie :

THÉORÈME 4. – *Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. S'il existe une suite sommable $(\delta_k)_{k\geqslant 0}$, une suite d'entiers $(q_k)_{k\geqslant 0}$, avec $q_0 = 0$, et une fonction $\varphi : D = \prod_{k\geqslant 0} \{0, \ldots, q_k\} \to \mathbb{R}^n$ continue sur D telle que*

$$\begin{cases} \varphi(D) = F, \quad \varphi(0) = 0 \quad \textit{et}, \quad \textit{pour tout } k \geqslant 0 \textit{ et } \sigma \textit{ dans } D, \\ |\sigma| = k \Rightarrow [\varphi(\sigma-), \varphi(\sigma)] \subset \operatorname{int}(F) \quad \textit{et} \quad \|\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)\| < \delta_k \end{cases}$$

alors F est l'image de la dérivée d'une bosse de classe C^1.

To cite this article: T. Gaspari, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 189–194

Ce dernier résultat est en fait identique à celui de [2]. L'avantage est que le théorème 4 s'étend en dimension infinie, contrairement au résultat de [2]. Ces points seront détaillés dans un article à venir.

Finalement, on répond partiellement à une question ouverte posée dans [2] : si $n \geqslant 2$, si f est une C^1-bosse sur $\mathbb{R}^n$, $f'(\mathbb{R}^n)$ est-il l'adhérence de son intérieur ? On obtient le

THÉORÈME 5. – *Soit f une C^2-bosse de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors $f'(\mathbb{R}^2)$ est l'adhérence de son intérieur.*

Introduction

A bump is a function from a space X to $\mathbb{R}$ with a bounded nonempty support. We study the set $f'(X) = \{f'(x),\ x \in X\}$, which is the range of the derivative of f, when f is a Frechet differentiable bump and X is a Banach space. We first study the relationship between open connected sets and ranges of derivative. Let us recall that $f'(X)$ is connected as soon as f is a Frechet differentiable bump. This extension of Darboux's theorem is proved by J. Malý in [5]. We obtain a kind of reciprocal.

THEOREM 1. – *Let X be an infinite dimensional separable Banach space so that there are $p \geqslant 1$ and a bump $b : X \to \mathbb{R}$, p times continuously Frechet differentiable, such that $\|b^{(p)}\|_\infty$ is finite. Any connected open subset of X^* containing 0 is the range of the derivative of a C^p-bump.*

In finite dimensions, we prove the following result:

THEOREM 2. – *Let n be in $\mathbb{N}^*$. Every connected open subset of $\mathbb{R}^n$ containing 0 is the range of the derivative of a Frechet differentiable bump.*

The next result is a sufficient condition on an analytic subset of X^* so that it is the range of the derivative of a C^1-bump. We already know that the range of the derivative of a C^1-bump is an analytic set containing 0. Moreover, if f is a C^1-bump and f' is Lipschitz continuous, then there exists $M > 0$ such that each point of $f'(X)$ can be joined to 0 by a M-Lipschitzian path $\gamma : [0,1] \to f'(X)$. Thus Theorem 3 below is a partial reciprocal to these results. We need multiindices. Let us recall some notations about them. Let $k \geqslant 0$ and $\sigma = (q_j)_{j\geqslant 0}$ in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. If $q_k \neq 0$ and $q_j = 0$ for all $j > k$, then $k = |\sigma|$ is called the length of σ. If $j \in \mathbb{N}$, $\sigma[j] = q_j$, and $\sigma_{|j}$ is the multiindex $(\sigma[0], \ldots, \sigma[j], 0, \ldots)$. If $k \geqslant 1$ and $\sigma = (q_0, \ldots, q_k, 0, \ldots)$, then $\sigma-$ is the multiindex $(q_0, \ldots, q_{k-1}, 0, \ldots)$. If $|\sigma| = 0$, then $\sigma- = (0, \ldots, 0, \ldots) = 0$.

THEOREM 3. – *Let X be an infinite dimensional separable Banach space so that there is a C^1-bump $b : X \to \mathbb{R}$ such that $\|b'\|_\infty$ is finite and F a subset of X^*. If there are a function $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X^*$ continuous on $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and a summable sequence $(\delta_k)_{k\geqslant 0}$ so that*

$$\begin{cases} \varphi(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = F \quad \textit{and} \quad \varphi(0, \ldots, 0, \ldots) = 0 \\ \textit{for all } k \geqslant 0, \quad |\sigma| = k \Rightarrow [\varphi(\sigma-), \varphi(\sigma)] \subset \operatorname{int}(F) \quad \textit{and} \quad \|\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)\| < \delta_k \end{cases}$$

then F is the range of the derivative of a C^1-bump.

This theorem is a strict extension of a recent and independent work of the authors of [3]. There is an analogue of Theorem 3 in finite dimensions:

THEOREM 4. – *Let F be a closed subset of $\mathbb{R}^n$. If there are a summable sequence $(\delta_k)_{k\geqslant 0}$, a sequence $(q_k)_{k\geqslant 0}$ of integers, with $q_0 = 0$, and a function $\varphi : D = \prod_{k\geqslant 0}\{0, \ldots, q_k\} \to \mathbb{R}^n$ continuous on D such that*

$$\begin{cases} \varphi(D) = F, \quad \varphi(0) = 0 \quad \textit{and}, \quad \textit{for all } k \geqslant 0 \textit{ and } \sigma \textit{ in } D, \\ |\sigma| = k \Rightarrow [\varphi(\sigma-), \varphi(\sigma)] \subset \operatorname{int}(F) \quad \textit{and} \quad \|\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)\| < \delta_k \end{cases}$$

then F is the gradient range of a C^1-bump.

Finally, we try to answer the following question of [2]: when f is a C^1-bump, is $f'(\mathbb{R}^n)$ equal to the closure of its interior? We answer partially:

THEOREM 5. – *The range of the derivative of a* C^2*-bump from* $\mathbb{R}^2$ *to* $\mathbb{R}$ *is the closure of its interior.*

1. Connected open subsets of X^* and ranges of derivative

The range of the derivative of a Frechet differentiable bump is connected [5]. We can remark that this Darboux property does not remain true if the function is not real valued. Indeed, J. Saint-Raymond gives in [6] a Frechet differentiable function f, from an open connected subset of $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$, so that the Jacobian takes exactly two values. We are now going to outline the proof of Theorem 1. We use the same methods as in [1] to prove the existence of a C^p-bump b_0 so that $B_{X^*} \subset b_0'(X)$ and $\|b_0^{(p)}\|$ is finite. For the proof of Theorem 1 we need a plateau function on X. We compose b_0 by a suitable C^∞-bump on $\mathbb{R}$ and we obtain a C^p-plateau function b_1 on X, that means a C^p-bump which is constant on the unit ball of X. Thanks to b_0 and b_1 we obtain that there is a constant K such that for all y^* in X^*, there is a C^p-bump g_{y^*} and a real number $a > 0$ so that $y^* + aB_{X^*} \subset g'_{y^*}(X) \subset K\|y^*\|B_{X^*}$ and $\|x\| \leqslant 1 \Rightarrow g'_{y^*}(x) = y^*$. An induction based on this result yields the following result:

LEMMA 1. – *Let* $y_0^*, \dots, y_n^*$ *be points of* X^* *so that* $y_0^* = 0$. *There is a* C^p*-bump* $f_{y_n^*}$ *so that*:
(i) y_n^* *is in* $\operatorname{int}(f'_{y_n^*}(X))$.
(ii) $f'_{y_n^*}(X) \subset \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n-1} B(y_i^*, (K+1)\|y_{i+1}^* - y_i^*\|)$.
(iii) $\exists \delta > 0,\ \|x\| \leqslant \delta \Rightarrow f'_{y_n^*}(x) = y_n^*$.

Proof of Theorem 1. –
Step 1: *Each point* y^* *in* U *can be joined to* 0 *with a good finite union of balls.*
More precisely, we put $\mathcal{A} = \{y^* \in U,\ \exists n > 0,\ \exists (y_0^* = 0, y_1^*, \dots, y_n^* = y^*) \in U^{n+1}$ so that

$$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad B\big(y_i^*, (K+1)\big\|y_{i+1}^* - y_i^*\big\|\big) \subset U\big\}.$$

Then, using the connectedness of U, we prove that $\mathcal{A} = U$.

Step 2: *There is a* C^p*-bump* f *such that* $U = f'(X)$.
Lemma 1 and step 1 prove the existence of $(f_{y^*})_{y^* \in U}$ such that $U = \bigcup_{y^* \in U} f'_{y^*}(X)$ and f_{y^*} is a C^p-bump for all y^* in U. Since X is separable and C^p-smooth, its dual is separable (*see* [4]). By Lindelof's theorem [7], there is a sequence $(f_n)_{n \geqslant 1}$ of C^p-bumps so that

$$U = \bigcup_{n \geqslant 1} f_n'(X).$$

After possible homotheties we have that for all n, $\operatorname{Supp}(f_n) \subset B_X$. X is infinite dimensional so there exists a sequence $(x_n)_{n \geqslant 1}$ in X such that $\forall n \geqslant 1,\ \|x_n\| < 7$ and, if $n \neq q$ then $\|x_n - x_q\| > 3$. We put then

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 1} f_n(x - x_n). \qquad \square$$

In fact, this proof gives us a stronger version of Theorem 1, which will be needed in the proof of Theorem 3:

PROPOSITION 1. – *Let* U *be a connected open subset of* X^* *containing* 0. *Let* $(z_n^*)_{n \geqslant 1}$ *be a sequence of points of* U. *There is a* C^1*-bump* f *such that* $f'(X) = U$ *and such that for all* n, f' *is equal to* z_n^* *on a nonempty open ball of* X.

Theorem 1 is obviously false in finite dimensions, because if f is a C^1-bump on $\mathbb{R}^n$ then $f'(\mathbb{R}^n)$ is compact. However, we can prove Theorem 2, which is an analogue of Theorem 1 in finite dimensions. Detailed proofs of Theorem 2 will be published elsewhere.

2. Well-linked sets and ranges of derivative

Let X be an infinite dimensional separable Banach space such that there is a C^1-bump $b : X \to \mathbb{R}$ so that $\|b'\|_\infty$ is finite. Let F be a subset of X^*. We say that F satisfies $(\mathcal{A}_\infty)$ if there are a function $\varphi : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to X^*$ continuous on $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ and a summable sequence $(\delta_k)_{k\geqslant 0}$ such that

$$\begin{cases} \varphi(\mathbb{N}^\mathbb{N}) = F \quad \text{and} \quad \varphi(0,\ldots,0,\ldots) = 0 \\ \text{for all } k \geqslant 0, \quad |\sigma| = k \Rightarrow [\varphi(\sigma-), \varphi(\sigma)] \subset \mathrm{int}(F) \quad \text{and} \quad \|\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)\| < \delta_k. \end{cases}$$

Subsets which satisfy $(\mathcal{A}_\infty)$ are well linked. For the proof of Theorem 3 we need the following remark. Since X is infinite dimensional there is always a sequence $(w_k)_{k\geqslant 0}$ so that $w_k \in B(x, \frac{\beta}{2})$ for all k, and $\|w_k - w_q\| > \beta/5$ if $k \neq q$. We write $w_k = w_k(x, \beta)$.

Proof of Theorem 3. –
Step 1: *We introduce an induction.*
Let us introduce the induction
$\mathcal{P}(k)$: "For all σ in $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ so that $|\sigma| = k$, there is a C^1-bump h_σ so that
(i) $\exists x_\sigma \in B_X$, $0 < \alpha_\sigma < 1/2^k$ so that $h'_\sigma(x) = \varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)$ $\forall x \in B(x_\sigma, 2\alpha_\sigma)$.
(ii) $\mathrm{Supp}(h_\sigma) \subset B(x_{\sigma-}, \alpha_{\sigma-}) \subset B_X$.
(iii) If $|\tau| = |\sigma|$ and $\tau \neq \sigma$, then $\mathrm{Supp}(h_\sigma) \cap \mathrm{Supp}(h_\tau) = \emptyset$."

Step 2: $\mathcal{P}(0)$ *holds.*
Let σ be in $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, with $|\sigma| = 0$. There is $0 < \varepsilon_\sigma < \delta_0$ so that $[0, \varphi(\sigma)] + \varepsilon_\sigma B_{X^*} \subset \mathrm{int}(F)$. We apply Proposition 1 and obtain a C^1-bump g_σ such that $g'_\sigma(X) = [0, \varphi(\sigma)] + \varepsilon_\sigma B_{X^*}$ and g'_σ is equal to $\varphi(\sigma)$ on a nonempty open ball. There is $M_\sigma > 0$ so that $\mathrm{Supp}(g_\sigma) \subset M_\sigma B_X$. Let us define then

$$h_\sigma(x) = \frac{1}{12M_\sigma} g_\sigma\bigl(12M_\sigma\bigl(x - w_{\sigma[0]}(0,1)\bigr)\bigr).$$

Then the bumps h_σ satisfy (i)–(iii) of the induction.

Step 3: $\mathcal{P}(k)$ *holds for all* $k \geqslant 0$.
Let us fix $k \geqslant 0$ and suppose that $\mathcal{P}(k)$ holds. If $|\sigma| = k+1$, we take ε_σ small and we apply Proposition 1. It gives a C^1-bump g_σ so that $g'_\sigma(X) = [\varphi(\sigma-), \varphi(\sigma)] + \varepsilon_\sigma B_{X^*} - \varphi(\sigma-) \subset \mathrm{int}(F)$ and g'_σ is equal to $\varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)$ on a nonempty open ball. Let M_σ be large enough to have $\mathrm{Supp}(g_\sigma) \subset M_\sigma B_X$. We put

$$h_\sigma(x) = \frac{\alpha_{\sigma-}}{12M_\sigma} g_\sigma\left(\frac{12M_\sigma}{\alpha_{\sigma-}}\bigl(x - w_{\sigma[k+1]}(x_{\sigma-}, \alpha_{\sigma-})\bigr)\right).$$

We then prove that h_σ satisfies all that we want. Thus $\mathcal{P}(k+1)$ holds. We remark that, if $|\sigma| = k$, $x_\sigma \in B(x_{\sigma-}, \alpha_{\sigma-}) \subset B(x_{\sigma-}, 1/2^{k-1})$. Thus $\|x_\sigma - x_{\sigma-}\| < 1/2^{k-1}$.

Step 4: *The sum f of all the h_σ is a* C^1*-bump.*
We put

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{|\sigma|=k} h_\sigma(x).$$

For $k \geqslant 0$ we put $G_k(x) = \sum_{|\sigma|=k} h_\sigma(x)$. For all σ, $h'_\sigma(X) = g'_\sigma(X) = [0, \varphi(\sigma) - \varphi(\sigma-)] + \varepsilon_\sigma B_{X^*}$. Thus

$$\bigl\|G'_k(x)\bigr\| \leqslant \sup\bigl\{\bigl\|h'_\sigma(x)\bigr\|,\ |\sigma| = k\bigr\} \leqslant 2\delta_k.$$

We use the mean value theorem and we obtain that

$$\bigl|G_k(x)\bigr| \leqslant \sup\bigl\{\bigl|h_\sigma(x)\bigr|,\ |\sigma| = k\bigr\} \leqslant \sup\bigl\{\bigl\|h'_\sigma\bigr\|_\infty\bigl(\|x\| + 1\bigr),\ |\sigma| = k\bigr\} \leqslant 4\delta_k.$$

Step 5: $f'(X)$ *is equal to* F.

Let

$$f_k(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} G_j(x).$$

If $k \geqslant 0$, if σ is a multiindex with length k, then $G_j'(x_\sigma) = \varphi(\sigma_{|j}) - \varphi(\sigma_{|j-1})$ for all $0 \leqslant j \leqslant k$. Thus

$$|\sigma| = k \Rightarrow f_k'(x_\sigma) = \varphi(\sigma).$$

With this and with the uniform convergence of $(f_k')_k$, the continuity of φ and (1), we can prove that $f'(X) = F$. This ends the proof. $\square$

In finite dimensions, compact subsets which satisfy condition $(\mathcal{A}_\infty)$ are not necesseraly the range of the derivative of a C^1-bump. Indeed, we can construct a compact subset P of $\mathbb{R}^2$ which satisfies condition $(\mathcal{A}_\infty)$ but which is not the range of the derivative of a C^1-bump. Because of its form, we call this set a comb. We put

$$P_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \text{there is } q \geqslant 1 \text{ so that } \left| x - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^q} \right) \right| \leqslant \frac{1}{8^q} \right\} \quad \text{(comb's teeth)}$$

$$\text{and} \quad P_2 = \big([-1, 2] \times [-1, 0]\big) \cup \big([1, 2] \times [-1, 1]\big).$$

Finally we put

$$P = \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) + (P_1 \cup P_2).$$

Of course this construction can be done in $\mathbb{R}^n$ for all $n \geqslant 2$. Using the tops of the teeth of P, we can prove that there is no C^1-bump f on $\mathbb{R}^n$ such that $f'(\mathbb{R}^n) = P$. Notice that if H is an infinite dimensional separable Hilbert space, then $P \times B_H$ is a subset of $\mathbb{R}^2 \times H$ which satisfies condition $(\mathcal{A}_\infty)$, hence is the range of the derivative of a C^1-bump on $\mathbb{R}^2 \times H$.

By the way, Theorem 3 has an analogue in finite dimensions, this is Theorem 4. Once again a detailed proof of this result will be given elsewhere. In the same paper we will also prove that this last theorem is nothing but Theorem 12 of [2]. Their result does not extend as stated to the infinite dimensional case, whereas Theorem 4 does.

References

[1] D. Azagra, R. Deville, Jame's theorem fails for starlike bodies, J. Functional Anal. 180 (2) (2001) 328–346.

[2] J.M. Borwein, M. Fabian, I. Kortezov, P.D. Loewen, The range of the gradient of a continuously differentiable bump, J. Nonlinear Convex Anal. 2 (2001) 1–19.

[3] J.M. Borwein, M. Fabian, P.D. Loewen, The range of the gradient of a Lipschitz C^1-smooth bump in infinite dimensions, Preprint, 2001.

[4] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, Smoothness and Renormings in Banach Spaces, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math., Vol. 64, 1993.

[5] J. Malý, The Darboux property for gradients, Real Anal. Exchange 22 (1996/1997) 167–173.

[6] J. Saint-Raymond, Local inversion for differentiable functions and Darboux property, Preprint, 2001.

[7] G.F. Simmons, Introduction to Topology and Modern Analysis, Internat. Ser. Pure Appl. Math., 1963.