C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 257–260

Combinatoire/*Combinatorics*
(Logique/*Logic*)

Demi-reconstruction de l'opérateur clôture transitive

Imed Boudabbous [a], Jamel Dammak [b]

[a] Département de méthodes quantitatives, Faculté des sciences economiques et de gestion de Sfax, BP 1088, Université de Sfax, 3018 Sfax, Tunisie

[b] Département de mathématiques, Faculté des sciences de Sfax, BP 802, Université de Sfax, 3018 Sfax, Tunisie

Reçu le 20 décembre 2001 ; accepté le 7 janvier 2002

Note présentée par Jean-Yves Girard.

Résumé Boudabbous et Cherif [1] ont montré que l'opérateur clôture transitive est reconstructible au sens de Fraïssé et au sens de Ulam. Nous examinons le problème analogue en termes de demi-reconstruction. ***Pour citer cet article : I. Boudabbous, J. Dammak, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 257–260.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Half-reconstruction of the operator transitive closure

Abstract Boudabbous and Cherif [1] showed that the operator transitive closure is reconstructible in the sense of Fraïssé and of Ulam. We examine the analagous problem in the terms of half-reconstruction. ***To cite this article: I. Boudabbous, J. Dammak, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 257–260.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Étant donné un ensemble E, une *relation binaire et irréflexive* R de base E est une application de $E \times E$ dans $\{+,-\}$ telle que pour tout $x \in E$, $R(x,x) = -$. Dans la suite, nous considérons uniquement des relations binaires et irréflexives de base finie. Pour toute partie X de E, la *restriction* de la relation R à X, notée $R_{|X}$, est la relation de base X définie par : pour tous $x, y \in X$, $(R_{|X})(x,y) = R(x,y)$.

Soit R une relation de base E, la *clôture transitive* de R est la relation, notée $ct(R)$, de base E définie par : pour tous $x \neq y \in E$, $ct(R)(x,y) = +$ s'il existe des éléments $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ de E tels que $R(x_i, x_{i+1}) = +$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. À chaque relation R de base E est associée sa relation *duale*, notée R^*, de base E définie comme suit : pour tous $x, y \in E$, $R^*(x,y) = R(y,x)$. Une relation est *hémimorphe* à R si elle est isomorphe à R ou à R^*.

Étant donné un entier $k \geqslant 1$, deux relations R et R' de même base E sont *k-hypomorphes modulo l'opérateur clôture transitive, noté* (mod *ct*), (*resp. k-hémimorphes* (mod *ct*)) lorsque pour toute partie X de E telle que $|X| \leqslant k$, les restrictions $ct(R_{|X})$ et $ct(R'_{|X})$ sont isomorphes (resp. hémimorphes). Une relation R est *k-reconstructible* (mod *ct*) (resp. k-demi-reconstructible (mod *ct*)) lorsque pour toute relation R', si R et R' sont k-hypomorphes (mod *ct*) (resp. k-hémimorphes (mod *ct*)), alors $ct(R)$ et $ct(R')$ sont isomorphes (resp. hémimorphes). Par analogie avec les problèmes de reconstruction dus à Ulam [5] et

Adresses e-mail : Imed.Boudabbous@fsegs.rnu.tn (I. Boudabbous); Jamel.Dammak@fss.rnu.tn (J. Dammak).

S1631-073X(02)02262-8/FLA

Fraïssé [2], O. Echi a posé le problème suivant de reconstruction de l'opérateur clôture transitive. Existe-t-il un entier $k \geqslant 1$ pour lequel toutes les relations sont k-reconstructibles (mod *ct*). En [1], Boudabbous et Cherif ont apporté une réponse positive en montrant que l'entier $k = 4$ convient.

Suite à ce résultat, Boudabbous a posé le problème analogue de *demi-reconstruction de l'opérateur clôture transitive*. Plus précisément, existe-t-il un entier $k \geqslant 1$ pour lequel toutes les relations sont k-demi-reconstructibles (mod *ct*).

Dans un premier temps, une réponse positive est apportée dans le cas des relations connexes orientées et dans le cas des relations indécomposables, définies comme suit. Une relation R de base E est *connexe orientée* lorsque pour tous $x \neq y \in E$, il existe des éléments $x_0 = x, \ldots, x_k = y$ de E tels que pour $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $R(x_i, x_{i+1}) \neq R(x_{i+1}, x_i)$. Par ailleurs, une partie X de la base E d'une relation R est un *intervalle* de R (*voir* Fraïssé [3]) lorsque pour tous $a, b \in X$ et $x \in E - X$, $R(a, x) = R(b, x)$ et $R(x, a) = R(x, b)$. Par exemple, ϕ, $\{x\}$ $(x \in E)$ et E sont des intervalles de R, appelés intervalles *triviaux*. Une relation, dont tous les intervalles sont triviaux, est *indécomposable*.

THÉORÈME 1. – *Les relations binaires, irréflexives, connexes orientées et de base finie sont* 5-*demi-reconstructibles* (mod *ct*).

THÉORÈME 2. – *Les relations binaires, irréflexives, indécomposables et de base finie sont* 6-*demi-reconstructibles* (mod *ct*).

Ces deux résultats permettent ensuite de conclure dans le cas général.

THÉORÈME 3. – *Les relations binaires, irréflexives et de base finie sont* 8-*demi-reconstructibles* (mod *ct*).

Enfin, on peut vérifier que les seuils 5 et 8 respectivement dans les Théorèmes 1 et 3 sont optimaux. Par contre, nous ne savons pas si les relations indécomposables sont k-demi-reconstructibles (mod *ct*), pour un entier $k < 6$.

2. Préliminaires

À toutes relations R et R′ 2-hémimorphes (mod *ct*), de même base E, est associée la *relation de différence* $D_{R,R'}$ (Lopez [4]) définie sur E de la façon suivante : pour tous $x \neq y \in E$, $D_{R,R'}(x, y) = +$ lorsqu'il existe des éléments $x_0 = x, \ldots, x_k = y$ de E tels que pour $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $R(x_i, x_{i+1}) \neq R'(x_i, x_{i+1})$. La relation $D_{R,R'}$ est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées *classes de différence* de R et de R'.

Dans le paragraphe précédent, nous avons défini les relations connexes orientées, ce qui nous permet de définir les composantes connexes orientées comme suit. Étant donnée une relation R de base E, une partie X de E, maximale pour l'inclusion telle que $R_{|X}$ est connexe orientée, est une *composante connexe orientée* de R. Nous utilisons aussi les relations connexes et fortement connexes. Une relation R de base E est *connexe* (resp. *fortement connexe*) si pour tous $x \neq y \in E$, il existe des éléments $x_0 = x, \ldots, x_k = y$ de E tels que pour $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $R(x_i, x_{i+1}) = +$ ou $R(x_{i+1}, x_i) = +$ (resp. $R(x_i, x_{i+1}) = +$). De même, une partie X de E, maximale pour l'inclusion telle que $R_{|X}$ est connexe (resp. fortement connexe), est une *composante connexe* (resp. *fortement connexe*) de R.

3. Démonstration du Théorème 1

Dans les trois propositions suivantes R et R' désignent des relations 5-hémimorphes (mod *ct*).

PROPOSITION 1. – *Si C est une classe de différence de R et de R', alors $ct(R'/C)$ et $ct(R^*/C)$ sont isomorphes.*

Afin d'énoncer la deuxième proposition, remarquons que pour toute classe de différence C de R et de R', comme $R_{|C}$ est connexe orientée, il existe une unique composante connexe orientée $O(C)$ de R

qui contient C. Par ailleurs, rappelons qu'une relation R de base E est *complète* lorsque pour tous $x \neq y \in E$, $R(x,y) = +$. Autrement dit, une relation est fortement connexe si et seulement si sa clôture transitive est complète. Rappelons, enfin qu'une relation R de base E est un ordre total lorsque pour tous $x \neq y \in E$, $R(x,y) \neq R(y,x)$ et lorsque pour tous $x, y, z \in E$, si $R(x,y) = R(y,z) = +$, alors $R(x,z) = +$.

PROPOSITION 2. – *Si C est une classe de différence de R et de R' telle que $C \neq O(C)$, alors ou bien $ct(R/C)$ et $ct(R'/C)$ sont complètes ou bien $ct(R/C)$ et $ct(R'/C)$ sont des ordres totaux. Il s'ensuit que $ct(R/C), ct(R^*/C)$ et $ct(R'/C)$ sont isomorphes.*

Le résultat suivant, dont découle immédiatement le Théorème 1, s'obtient à partir des Propositions 1 et 2.

PROPOSITION 3. – *Si pour toute classe de différence C de R et de R', $C \neq O(C)$, alors $ct(R)$ et $ct(R')$ sont isomorphes.*

De plus, pour établir cette proposition, on utilise, par une méthode de recollement, le lemme suivant :

LEMME 1. – *Étant données des relations R et R' 4-hémimorphes* (mod *ct*)*. Si C est une classe de différence de R et de R' telle que $C \neq O(C)$, alors C est un intervalle de R et de R'.*

4. Démonstration du Théorème 2

En fait, l'indécomposabilité nous permet d'obtenir le résultat suivant qui renforce de façon significative le Théorème 2.

THÉORÈME 4. – *Soient R et R' des relations* 6-*hémimorphes* (mod *ct*)*, si R est indécomposable, alors $ct(R') = ct(R)$ ou $ct(R') = ct(R^*)$.*

Tout d'abord on vérifie que la 6-hémimorphie (mod *ct*) préserve la forte connexité.

PROPOSITION 4. – *Deux relations* 6-*hémimorphes* (mod *ct*) *ont les mêmes composantes fortement connexes.*

Dans la suite de ce paragraphe, R et R' désignent des relations 6-hémimorphes (mod *ct*) de même base E. Le Théorème 4 découle alors des quatre résultats suivants puisqu'ils permettent de montrer que, quitte à échanger R et R^*, pour tous $x \neq y \in E$, si x et y n'appartiennent pas à la même composante fortement connexe de R, alors $R_{|\{x,y\}} = R'_{|\{x,y\}}$.

PROPOSITION 5. – *Si R est indécomposable, alors pour toute composante connexe orientée D de R, ou bien $R'_{|D} = R_{|D}$ ou bien $R'_{|D} = R^*_{|D}$.*

Afin d'énoncer les trois lemmes suivants, nous utilisons les définitions suivantes : étant donnés des éléments distincts x et y de E, $\{x,y\}$ est *orientée* si $R(x,y) \neq R(y,x)$, $\{x,y\}$ est *pleine* si $R(x,y) = R(y,x) = +$ et $\{x,y\}$ est *vide* si $R(x,y) = R(y,x) = -$.

LEMME 2. – *Soit $X = \{a,b,c,d\}$ une partie à 4 éléments de E telle que $R(a,b) = R'(a,b)$ et $R(c,d) \neq R'(c,d)$. Si $\{a,b\}$ et $\{c,d\}$ sont les seules paires orientées de X et si $\{a,c\}$ est pleine, alors $\{b,c\}$ ou $\{a,d\}$ est pleine.*

LEMME 3. – *Soit $X = \{a,b,c,d,e\}$ une partie à 5 éléments de E telle que $R(a,b) = R'(a,b)$ et $R(d,e) \neq R'(d,e)$. Si $\{a,b\}$ et $\{d,e\}$ sont les seules paires orientées de X et si $\{a,c\}$ et $\{c,d\}$ sont pleines, alors l'une des paires $\{b,c\}$, $\{c,e\}$, $\{b,d\}$ ou $\{a,e\}$ est pleine.*

LEMME 4. – *Étant donnée une composante fortement connexe D de R, telle que $|D| > 1$, considérons des éléments a, b de D et des éléments distincts c, d de $E - D$ tels que $\{a,c\}$ et $\{b,d\}$ sont orientées. Si $R(a,c) = R'(a,c)$ (resp. $R^*(a,c) = R'(a,c)$), alors $R(b,d) = R'(b,d)$ (resp. $R^*(b,d) = R'(b,d)$).*

5. Démonstration du Théorème 3

Nous utilisons les relations particulières suivantes. Les relations P, Q et D sont définies sur $\{a, b, c\}$ par : $P^{-1}(\{+\}) = \{(a, c), (b, c)\}$, $Q^{-1}(\{+\}) = \{(a, c), (b, c), (a, b), (b, a)\}$, $D^{-1}(\{+\}) = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$. Enfin, δ est la relation définie sur $\{a, b, c, d\}$ par : $\delta^{-1}(\{+\}) = \{(a, b), (b, c), (c, a)\} \cup \{(x, d);\ x \in \{a, b, c\}\}$. Par commodité, l'ensemble ayant pour éléments $P,\ P^*,\ Q,\ Q^*,\ D,\ D^*,\ \delta$ et δ^*, considérés à isomorphie près, est noté M. En outre, $\mathcal{M}$ désigne la classe des relations R de base E telles que pour toute partie X de E, $R_{|X} \notin M$.

Tout d'abord remarquons que le résultat suivant découle de la preuve du théorème de Boudabbous et Cherif [1] concernant la 4-reconstruction (mod *ct*) des relations.

COROLLAIRE 1. – *Considérons des relations R et R' 4-hémimorphes* (mod *ct*) *de même base E. Supposons, en outre que R et R' sont 3-hypomorphes* (mod *ct*) *et que pour toute partie X de E telle que $|X| = 4$, $R_{|X}$ et $R'_{|X}$ sont isomorphes dès que $R_{|X} \in M$ ou $R'_{|X} \in M$. Sous ces hypothèses, $ct(R)$ et $ct(R')$ sont isomorphes.*

Dans la preuve du Théorème 3, nous utilisons la proposition suivante qui découle de la Proposition 4 et du Lemme 4.

PROPOSITION 6. – *Soient R et R' des relations 6-hémimorphes* (mod *ct*)*, pour toute composante connexe C de R, $ct(R_{|C})$ et $ct(R'_{|C})$ sont hémimorphes.*

Esquisse de la preuve du théorème 3. – Considérons des relations R et R' 8-hémimorphes (mod *ct*). Par la Proposition 6, on peut supposer que R admet plusieurs composantes connexes $C_1, \ldots, C_k$. Puisque $C_1, \ldots, C_k$ sont aussi des composantes connexes de $ct(R)$ et de $ct(R')$, il suffit de montrer que ou bien pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, $ct(R_{|C_i})$ et $ct(R'_{|C_i})$ sont isomorphes ou bien pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, $ct(R^*_{|C_i})$ et $ct(R'_{|C_i})$ sont isomorphes. Notons I l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $R_{|C_i} \in \mathcal{M}$. Pour tout $i \in I$, comme d'une part $R_{|C_i}$ et $R'_{|C_i}$ et d'autre part $R^*_{|C_i}$ et $R'_{|C_i}$ vérifient les hypothèses du Corollaire 1, $ct(R_{|C_i})$, $ct(R^*_{|C_i})$ et $ct(R'_{|C_i})$ sont isomorphes. En utilisant, aussi la Proposition 6, on peut donc supposer que $|\{1, \ldots, k\} - I| \geqslant 2$. Étant donné $i \in \{1, \ldots, k\} - I$, considérons une partie X de C_i telle que $R_{|X} \in M$. Quitte à échanger R et R^*, on peut supposer que $R_{|X}$ et $R'_{|X}$ sont isomorphes. Pour tout $j \neq i \in \{1, \ldots, k\} - I$ et pour toute partie Y de C_j telle que $R_{|Y} \in M$, comme $ct(R_{|X \cup Y})$ et $ct(R'_{|X \cup Y})$ sont hémimorphes, $R_{|Y}$ et $R'_{|Y}$ sont isomorphes. Il découle alors du corollaire 1 que $ct(R_{|C_j})$ et $ct(R'_{|C_j})$ sont isomorphes. En échangeant dans ce qui procède i et j, on obtient aussi l'isomorphie entre $ct(R_{|C_i})$ et $ct(R'_{|C_i})$, ce qui permet de conclure.

Références bibliographiques

[1] Y. Boudabbous, B. Cherif, Clôture transitive et reconstruction, C. R. Acad. Sci., Série I 331 (2000) 5–10.
[2] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Sympos. Math. (1970) 203–251.
[3] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in : M. Pouzet, D. Richard (Eds.), Order, Description and Roles, North-Holland, 1984, pp. 313–342.
[4] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317.
[5] S.M. Ulam, A Collection of Mathematical Problems, Interscience, New York, 1960.