

# Sur la compacité des multimesures (I)

Kenny Koffi Siggini

BP 75, Lomé, Togo

Reçu le 15 septembre 2001 ; accepté après révision le 8 avril 2002

Note présentée par Paul Malliavin.

---

## Résumé

Soit  $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  l'espace des multimesures positives  $\mathcal{K}$ -régulières définies sur une tribu  $\mathcal{B}$  à valeurs dans l'espace  $\text{ck}(E)$  des parties convexes compactes non vides d'un espace de Banach  $E$ . Nous caractérisons les parties compactes de  $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  pour la  $s$ -topologie c'est à dire la moins fine des topologies rendant continues les applications  $M \rightarrow M(A)$ ,  $A \in \mathcal{B}$ . Le cas des mesures réelles positives a été traité entre autres par Topsøe [6], Grothendieck [3]. *Pour citer cet article : K.K. Siggini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 949–952.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## On compactness of set-valued measures (I)

## Abstract

Let  $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  be the space of positive  $\mathcal{K}$ -regular set-valued measures defined on a  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$  with values in the space of all compact non empty convex subsets of a Banach space  $E$ . We characterize the compact subsets of  $\widetilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  endowed with the weakest topology for which all mappings  $M \rightarrow M(A)$ ,  $A \in \mathcal{B}$  are continuous. The case of real nonnegative measures has been investigated by Topsøe [6], Grothendieck [3] and others. *To cite this article : K.K. Siggini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 949–952.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## 1. Notations et définitions

Soient  $E$  un espace de Banach  $E'$  son dual topologique,  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E$  et  $E'$ ,  $\text{ck}(E)$  l'espace des parties convexes compactes non vides de  $E$  muni de la distance de Hausdorff. Notons que muni de cette distance,  $\text{ck}(E)$  est un espace complet [1]. Étant donné  $X, Y$  des parties de  $E$  on note  $X + Y$  l'ensemble des éléments  $x + y$  avec  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . On désigne par  $\delta^*(\cdot|X)$  l'application de  $E'$  dans  $[-\infty, +\infty]$  définie pour tout  $y \in E'$  par  $\delta^*(y|X) = \sup\{y(x); x \in X\}$ , et  $\overline{\text{co}}X$  l'enveloppe fermée convexe de  $X$ . La lettre  $T$  désigne un ensemble quelconque;  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{K}$  des ensembles de parties de  $T$  et  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -algèbre engendrée par l'ensemble des parties  $A$  de  $T$  telles que pour tout  $K \in \mathcal{K}$ ,  $A \cap K \in \mathcal{K}$ . Dans la suite les lettres  $G, K, A$  avec ou sans indices, désigneront un élément de  $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{B}$  respectivement.

DÉFINITION 1. – On dit que  $\mathcal{K}$  est compact (resp. semi-compact) si toute famille (resp. famille dénombrable) d'éléments de  $\mathcal{K}$  qui possède la propriété de l'intersection finie a une intersection non vide.

DÉFINITION 2 ([2]). – On dit qu'une application  $M$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\text{ck}(E)$  est une multimesure si  $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$  pour tous  $A, B$  disjoints et si pour toute suite disjointe  $(A_n)$  de  $\mathcal{B}$  de réunion  $A$ , la série de terme général  $M(A_n)$  est convergente avec  $M(A) = \sum_n M(A_n)$ .

Signalons qu'une application  $M$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\text{ck}(E)$  est une multimesure si et seulement si  $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$  pour tous  $A, B$  disjoints et si pour tout  $y \in E'$   $\delta^*(y|M(\cdot)) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A \mapsto \delta^*(y|M(A))$ ) est une mesure [2].

DÉFINITION 3. – Une multimesure  $M$  de  $\mathcal{B}$  dans  $\text{ck}(E)$  est dite :

- positive si pour tout  $A \in \mathcal{B}$ ,  $0 \in M(A)$  où 0 est l'élément neutre de l'addition dans  $E$  ;
- $\mathcal{K}$ -régulière si pour tout  $A \in \mathcal{B}$ ,  $M(A) = \text{c}\bar{o} \cup \{M(K); K \subset A, K \in \mathcal{K}\}$ .

Nous notons  $\tilde{M}_+(T, \text{ck}(E))$  l'ensemble des multimesures positives définies sur  $\mathcal{B}$  à valeurs dans  $\text{ck}(E)$  et  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  le sous-ensemble de  $\tilde{M}_+(T, \text{ck}(E))$  formé de multimesures  $\mathcal{K}$ -régulières. L'ensemble des mesures réelles positives (resp. positives  $\mathcal{K}$ -régulières) définies sur  $\mathcal{B}$  est noté  $M_+(T)$  (resp.  $M_+(T, \mathcal{K})$ ). Soit  $m \in M_+(T, \mathcal{K})$ , pour tout  $A \in \mathcal{B}$   $m(A) = \sup\{m(K); K \in \mathcal{K}, K \subset A\}$ .

DÉFINITION 4 ([6]). – On appelle topologie de la convergence étroite ou simplement topologie étroite sur  $M_+(T)$  la moins fine des topologies rendant continue l'application  $m \rightarrow m(T)$  et semi-continues inférieurement les applications  $m \rightarrow m(G)$ ,  $G \in \mathcal{G}$ .

DÉFINITION 5. – On appelle  $s$ -topologie sur  $\tilde{M}_+(T, \text{ck}(E))$  (resp.  $M_+(T)$ ) la moins fine des topologies rendant continues les applications  $M \rightarrow M(A)$ ,  $A \in \mathcal{B}$ . Muni de la  $s$ -topologie  $\tilde{M}_+(T, \text{ck}(E))$  est un espace régulier.

Soit  $(m_i)$  une suite généralisée d'éléments de  $M_+(T)$ ;  $(m_i)$  converge étroitement c'est à dire pour la topologie étroite vers  $m \in M_+(T)$  si et seulement si  $\lim m_i(T) = m(T)$  et pour tout  $G \in \mathcal{G}$ ,  $\liminf m_i(G) \geq m(G)$ . Dire qu'une suite généralisée  $(M_i)$  converge dans  $\tilde{M}_+(T, \text{ck}(E))$  vers  $M$  pour la  $s$ -topologie revient à dire que  $\lim M_i(A) = M(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{B}$ .

DÉFINITION 6. – Soit  $X$  un ensemble,  $A \subset X$  et  $(x_i)$ ,  $i \in I$ , une suite généralisée d'éléments de  $X$ . On dit que  $x_i \in A$  cofinalement s'il existe  $i \in I$  tel que pour tout  $j \in I$ ,  $j \geq i$  alors  $x_j \in A$ .

Une suite généralisée  $(x_i)$ ,  $i \in I$ , est appelée ultrasuite généralisée si pour toute partie  $B$  de  $X$ ,  $x_i \in B$  ou bien  $x_i \in X \setminus B$  cofinalement.

On trouvera dans ([4], p. 81) les propriétés que nous utilisons ici pour les ultrasuites généralisées. Dans un espace topologique régulier pour qu'une partie soit relativement compacte il faut et il suffit que toute ultrasuite généralisée d'éléments de cette partie soit convergente i.e. que toute suite généralisée d'éléments de cette partie contienne une sous-suite généralisée convergente.

Sur  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{K}$  nous définissons les axiomes suivants :

- (I)  $\mathcal{K}$  est stable pour les réunions finies, les intersections dénombrables et  $\emptyset \in \mathcal{K}$ .
- (II)  $\mathcal{G}$  est stable pour les réunions et les intersections finies,  $\emptyset \in \mathcal{G}$ .
- (III) Pour tout  $K \in \mathcal{K}$ , pour tout  $G \in \mathcal{G}$ ,  $K \setminus G \in \mathcal{K}$ .
- (IV)  $\mathcal{G}$  sépare les éléments de  $\mathcal{K}$  c'est à dire que pour tout  $K, K' \in \mathcal{K}$  disjoints, il existe  $G, G'$  dans  $\mathcal{G}$  disjoints tels que  $K \subset G$  et  $K' \subset G'$ .
- (V)  $\mathcal{K}$  est semi-compact.

Signalons que ces axiomes sont ceux de Topsøe [6] et que (I) et (IV) impliquent : «  $\mathcal{G}$  domine  $\mathcal{K}$  », c'est à dire que pour tout  $K \in \mathcal{K}$  il existe  $G \in \mathcal{G}$  tel que  $G \supset K$ .

LEMME 7. – Soit  $m$  une mesure réelle positive  $\mathcal{K}$ -régulière définie sur  $\mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{G}$  sépare les éléments de  $\mathcal{K}$  alors  $\mu(K) = \inf\{\mu(G); G \supseteq K, G \in \mathcal{G}\}$ .

Le résultat suivant est formulé pour les suites généralisées dans [6, Theorem 7].

PROPOSITION 8. – Soient  $T$  un ensemble,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{K}$  des ensembles de parties de  $T$  qui satisfont aux axiomes (I)–(V). Soient  $M_+(T, \mathcal{K})$  l'espace des mesures réelles positives  $\mathcal{K}$ -régulières définies sur  $\mathcal{B}$  muni de la  $s$ -topologie, et  $H$  une partie de  $M_+(T, \mathcal{K})$  telle que  $\sup\{m(T); m \in H\} < +\infty$ . Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes entre elles.

- (1)  $H$  est relativement compacte.  
 (2) (i)  $\forall K \in \mathcal{K}, \inf_{G \supseteq K} (\sup\{m(G \setminus K); m \in H\}) = 0$ .  
 (ii)  $\forall A \in \mathcal{B}, \inf_{K \subseteq A} (\sup\{m(A \setminus K); m \in H\}) = 0$ .  
 (3) (i)  $\forall K \in \mathcal{K}, \inf_{G \supseteq K} (\sup\{m(G \setminus K); m \in H\}) = 0$ .  
 (ii)  $\inf_K (\sup\{m(T \setminus K); m \in H\}) = 0$ .  
 (4) (i)  $\forall K \in \mathcal{K}, \inf_{G \supseteq K} (\sup\{m(G \setminus K); m \in H\}) = 0$ .  
 (ii) Toute suite généralisée d'éléments de  $H$  contient une sous-suite généralisée qui converge étroitement dans  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K})$ .

*Démonstration.* – Il suffit d'appliquer ([6], Theorem 7) à la suite généralisée constituée par l'ensemble  $H$  lui-même, muni de la relation d'ordre « diffuse » définie par  $m \leq m'$  pour tout  $(m, m') \in H \times H$  (C'est le raisonnement fait dans [6], Corollary 2).

**THÉORÈME 9.** – Soient  $E$  un espace de Banach,  $T$  un ensemble,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{K}$  des ensembles de parties de  $T$  qui satisfont aux axiomes (I)–(V). Soit  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  l'espace des multimesures positives  $\mathcal{K}$ -régulières définies sur  $\mathcal{B}$  à valeurs dans  $\text{ck}(E)$  muni de la  $s$ -topologie. Alors pour toute partie  $H$  de  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

- (1)  $H$  est relativement compacte dans  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  ;  
 (2) (i)  $\{\delta^*(y|M(\cdot)); M \in H, y \in E', |y| \leq 1\}$  est relativement compact dans  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K})$  muni de la  $s$ -topologie.  
 (ii)  $\{M(T); M \in H\}$  et  $\{M(G); M \in H\}$ , pour tout  $G \in \mathcal{G}$ , sont relativement compacts dans  $\text{ck}(E)$ .

*Démonstration.* – Supposons (1) vérifiée. Alors (2(ii)) découle de la continuité des applications  $M \rightarrow M(A), A \in \mathcal{B}$  de  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  dans  $\text{ck}(E)$ . Munissons  $E'$  de la topologie faible  $\sigma(E', E)$  et sa boule unité fermée  $B'(0, 1)$  de la topologie induite par celle de  $E'$ . Pour tout  $K \in \text{ck}(E)$   $\delta^*(\cdot|K) : B'(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $y \rightarrow \delta^*(y|K)$ ) est continue ; on en déduit la continuité de l'application  $\theta$  de  $B'(0, 1) \times \tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  dans  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K})$  qui à  $(y, M)$  associe  $\theta(y, M) = \delta^*(y|M(\cdot))$ . Soit  $\overline{H}$  l'adhérence de  $H$ ,  $B'(0, 1) \times \overline{H}$  est une partie compacte de  $B'(0, 1) \times \tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$ . Donc  $\{\delta^*(y|M(\cdot)); M \in H, |y| \leq 1\}$  étant inclus dans  $\theta(B'(0, 1) \times \overline{H})$ , est relativement compact dans  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K})$ .

Prouvons que (2)  $\Rightarrow$  (1). Soit  $(M_i), i \in I$ , une ultrasuite généralisée d'éléments de  $H$ . D'après (ii), les ultrasuites  $(M_i(T))$  et  $(M_i(G))$  sont convergentes dans  $\text{ck}(E)$ .

Posons  $N(G) = \lim_i M_i(G)$  et  $\tilde{M}(A) = \text{c}\bar{o} \bigcup_{K \subseteq A} \bigcap_{G \supseteq K} N(G)$  pour tout  $A \in \mathcal{B}$  ;  $\tilde{M}(A) \in \text{ck}(E)$  car pour tout  $G, N(G) \subset \lim_i M_i(T)$ . L'application  $\tilde{M} : \mathcal{B} \rightarrow \text{ck}(E)$  ( $A \rightarrow \tilde{M}(A)$ ) appartient à  $\tilde{M}_+(T, \mathcal{K}, \text{ck}(E))$  ([5], Théorème 2, p. 158). Pour tout  $y \in E', A,$

$$\delta^*(y|\tilde{M}(A)) = \sup_{K \subseteq A} \inf_{G \supseteq K} \delta^*(y|N(G)) \quad \text{et} \quad \delta^*(y|N(G)) = \lim_i \delta^*(y|M_i(G)).$$

Soit  $y \in E', (\delta^*(y|M_i(\cdot)))$  est une ultrasuite généralisée d'éléments de  $\{\delta^*(y|M(\cdot)); y \in E', |y| \leq 1, M \in H\}$ . Alors d'après l'hypothèse (2(i)), il existe  $m_y \in \tilde{M}_+(T, \mathcal{K})$  tel que pour tout  $A \lim_i \delta^*(y|M_i(A)) = m_y(A)$ . On a

$$\begin{aligned} \delta^*(y|\tilde{M}(K)) &= \inf_{G \supseteq K} \lim_i \delta^*(y|M_i(G)) = \inf_{G \supseteq K} \left\{ \lim_i \delta^*(y|M_i(K)) + \lim_i \delta^*(y|M_i(G \setminus K)) \right\} \\ &= \lim_i \delta^*(y|M_i(K)) \end{aligned}$$

(Proposition 8 et (2(i))). On a

$$\delta^*(y|\tilde{M}(A)) = \sup_{K \subseteq A} \delta^*(y|\tilde{M}(K)) = \sup_{K \subseteq A} \lim_i \delta^*(y|M_i(K)) = \sup_{K \subseteq A} m_y(K) = m_y(A) = \lim_i \delta^*(y|M_i(A)).$$

On vient de montrer que pour tout  $A$  et tout  $y \in E', |y| \leq 1, \lim_i \delta^*(y|M_i(A)) = \delta^*(y|\tilde{M}(A))$ . Prouvons maintenant que  $(M_i(A))$  converge vers  $\tilde{M}(A)$  dans  $\text{ck}(E)$ . Il suffit de montrer que pour tout  $A, (M_i(A))$

est une suite généralisée de Cauchy. Supposons qu'il existe  $B_0 \in \mathcal{B}$  pour lequel  $(M_i(B_0))$  ne soit pas de Cauchy. Alors il existe  $\epsilon_0$  tel que pour tout  $i \in I$  on puisse trouver  $k_i \geq i$ ,  $j_i \geq i$  et  $y_i \in B'(0, 1)$  qui vérifient  $|\delta^*(y_i | M_{k_i}(B_0)) - \delta^*(y_i | M_{j_i}(B_0))| > \epsilon_0$ . Considérons les suites généralisées  $(\delta^*(y_i | M_{k_i}(\cdot)))$ ,  $(\delta^*(y_i | M_{j_i}(\cdot)))$ ;  $i \in I$ . D'après l'hypothèse (2(i)), on peut trouver deux sous-suites généralisées, l'une de  $(\delta^*(y_i | M_{k_i}(\cdot)))$  et l'autre de  $(\delta^*(y_i | M_{j_i}(\cdot)))$ , ayant les mêmes indices et qui convergent respectivement vers  $\mu$  et  $\mu'$ . Nous noterons ces deux sous-suites comme les suites elles-mêmes.

Comme pour  $G \in \mathcal{G}$ ,  $(M_i(G))$  est convergente dans  $\text{ck}(E)$ ,

$$\lim_i \left( \sup_{|y| < 1} |\delta^*(y | M_{k_i}(G)) - \delta^*(y | M_{j_i}(G))| \right) = 0.$$

De l'inégalité

$$|\delta^*(y_i | M_{k_i}(G)) - \delta^*(y_i | M_{j_i}(G))| \leq \sup_{|y| < 1} |\delta^*(y | M_{k_i}(G)) - \delta^*(y | M_{j_i}(G))|,$$

on déduit que pour tout  $G$ ,

$$\mu(G) = \lim_i \delta^*(y_i | M_{k_i}(G)) = \lim_i \delta^*(y_i | M_{j_i}(G)) = \mu'(G).$$

Par conséquent  $\mu(K) = \mu'(K)$  pour tout  $K \in \mathcal{K}$  (Lemme 7).

Ces mesures étant  $\mathcal{K}$ -régulières, elles sont égales sur  $\mathcal{B}$ . D'où il existe  $i_0 \in I$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $i \geq i_0$ ,  $|\delta^*(y_i | M_{j_i}(B_0)) - \delta^*(y_i | M_{k_i}(B_0))| < \epsilon_0/2$ . Ceci est absurde.

### Références bibliographiques

- [1] C. Castaing, M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Math., Vol. 580, Springer, 1977.
- [2] A. Coste, Contribution à la théorie de l'intégration multivoque, Thèse Université Pierre et Marie Curie, 1977.
- [3] A. Grothendieck, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type  $C(K)$ , Canadian J. Math. 5 (1953) 129–173.
- [4] J.L. Kelley, General Topology, Springer-Verlag, New York, 1955.
- [5] K.K. Siggini, Sur les multi-applications tendues (I), J. Rech. Sci. Univ. Bénin 4 (1) (2000) 155–159.
- [6] F. Topsøe, Compactness in spaces of measures, Studia Mathematica XXXVI (1950) 195–212.