C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 11–16

Théorie des groupes/*Group Theory*

Formules de caractères pour des représentations irréductibles du groupe symplectique en caractéristique p

Sébastien Foulle

Institut Girard Desargues, Université Lyon I, 21, avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 20 mars 2002 ; accepté après révision le 29 avril 2002

Note présentée par Michel Duflo.

Résumé On obtient des formules de caractères pour certaines représentations irréductibles du groupe $\mathrm{Sp}(2m, \overline{\mathbb{F}_p})$ en égale caractéristique. Ces formules peuvent sortir du domaine de validité de la conjecture de Lusztig, ainsi pour tout $s \leqslant \frac{p-3}{2}$ on a une formule de caractère pour $L(s\,\omega_m)$. On démontre ces résultats à l'aide de la théorie des paires duales et de la formule modulaire de Verlinde. ***Pour citer cet article : S. Foulle, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 11–16.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Character formulas of irreducible representations of the symplectic group in prime characteristic

Abstract We obtain character formulas of some irreducible representations of $\mathrm{Sp}(2m, \overline{\mathbb{F}_p})$ in equal characteristic. These formulas can be outside the validity domain of the Lusztig conjecture, for instance for all $s \leqslant \frac{p-3}{2}$ we get the character of the irreducible representation with highest weight $s\omega_m$. The proof uses dual pairs theory and the modular Verlinde formula. ***To cite this article: S. Foulle, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 11–16.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

All vector spaces are defined over the ground field $\overline{\mathbb{F}_p}$, with p prime. Let V be a vector space of dimension $2m$ endowed with a symplectic form Q_V. Set $G = \mathrm{Sp}(V)$ and let H be a maximal torus in G. Let $P = X(H)$ be the group of characters of H and let P^+ be the set of dominant weights relative to a Borel subgroup. There is a $\mathbb{Z}$ -basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ of P such that the fundamental weights are $\omega_l = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l$, and thus $P^+ = \mathbb{N}\,\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}\,\omega_m$. For each $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i \in P^+$ let $Y(\lambda)$ be the Young diagram with λ_i boxes on the ith row for all i. We write $L(\lambda)$ for the irreducible G-module with highest weight λ and $L(\lambda)_\mu$ its μ-weight space.

Adresse e-mail : foulle@desargues.univ-lyon1.fr (S. Foulle).

S1631-073X(02)02421-4/FLA

Let Y be a Young diagram. A tableau of shape Y is a filling of the boxes of Y with positive integers. A tableau T is a $\mathrm{Sp}(V)$-standard tableau of shape Y if it satisfies:

(1) T is a semi-standard tableau on $Y(\lambda)$, i.e., the numbering is strictly increasing in the columns and nondecreasing in the rows.

(2) The labels of T are $\leqslant 2m$.

(3) If $t_1 < t_2 < \cdots$ are the labels of the first column of T, then $t_{i+1} > 2i$ for all i.

The weight of T is $\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varepsilon_i$, with

$$\mu_i = (\text{number of boxes of } T \text{ with label } 2i) - (\text{number of boxes of } T \text{ with label } 2i-1).$$

For all j let $T[j]$ be the Young diagram of all boxes with a label $\leqslant j$. For any Young diagram Y, we denote the number of boxes of Y by $\mathrm{card}(Y)$.

Let n be an auxiliary integer and let Y be a Young diagram with at most n boxes on the first line. We write $c(Y)$ for the number of boxes on the columns n and $n-1$ of Y.

THEOREM 0.1. – *Suppose $n \geqslant 2$ and $p \geqslant 2n+3$. Let $\lambda \in P^+$ with $\lambda_1 = n$ and $p - 2m \geqslant 2n - c(Y(\lambda))$. Then $\dim L(\lambda)_\mu$ is the number of $\mathrm{Sp}(V)$-standard tableaux T on $Y(\lambda)$ with weight μ such that for all $i \leqslant m$ one has $p - 2i \geqslant 2n - c(T[2i])$, and if $p - 2i = 2n - c(T[2i])$ we exclude the tableaux such that $2i-1$ is in the column n of $Y(\lambda)$, $2i$ is not, $2i$ is in the column $(n-1)$ of $Y(\lambda)$ and $2i-1$ is not.*

In particular this leads to a character formula for $L(s\omega_m)$ for all s such that $2 \leqslant s \leqslant \frac{p-3}{2}$.

For $n = 1$ we have a similar formula which we shall now describe. In this particular case, a recursive formula for $\dim L(\lambda)$ was proved in [4] under the hypothesis of 0.2. The following result provides a direct fomula.

THEOREM 0.2. – *If $l \geqslant m + 2 - p$, then $\dim L(\omega_l)_\mu$ is the number of $\mathrm{Sp}(V)$-standard tableaux T on $Y(\lambda)$ with weight μ such that for all $i \leqslant m$, one has $i + 2 - p \leqslant \mathrm{card}(T[2i])$.*

For instance if $p = 2$, all weights of $L(\omega_m)$ are conjuguate to ω_m and $\dim L(\omega_m) = 2^m$.

We also recover the characters formulas of [10] for $L(\frac{p-1}{2}\omega_m)$ and $L(\frac{p-3}{2}\omega_m + \omega_{m-1})$. The preceding results together with the Steinberg tensor product theorem give us a character formula for $L(\lambda)$ when $\lambda = \lambda_0 + p\lambda_1 + \cdots + p^l\lambda_l$ and each λ_i satisfies the hypothesis of Theorem 1.1 or Theorem 1.2. For instance we have the character of $L(s\omega_m)$ for any s in characteristic 2 and $\dim L(s\omega_m) = 2^{mr}$, where r is the number of 1 in the 2-adic decomposition of s.

Sketch of the proof. – Following the ideas of [7] and [8], the proof is based on some dual pair [5] and the modular Verlinde formula [3].

At first we explain the process in null characteristic. Let W be an auxiliary vector space of dimension $2n$ endowed with a symplectic form Q_W. Then $V \otimes W$ is a quadratic space with form $Q_V \otimes Q_W$. Let $S = S^+ \oplus S^-$ be the spin representation of $\mathrm{Spin}(V \otimes W)$. Since $\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W)$ is simply connected, its natural action on $V \otimes W$ lifts to $\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{Spin}(V \otimes W)$. Thus S becomes a $(\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W))$-module and it is a $(\mathrm{Sp}(V), \mathrm{Sp}(W))$ dual pair in the sense of [5]. This implies the following theorem.

THEOREM 0.3. – *We have the following equality between $(\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W))$-modules*

$$S = \bigoplus_{Y(\lambda) \subset R(m,n)} L_V(\lambda) \otimes L_W(\check{\lambda}).$$

We should explain the notations used in the preceding result. Here $R(m,n)$ is the rectangle with m rows and n columns. The notation $Y(\lambda) \subset R(m,n)$ means that $Y(\lambda)$ is contained in $R(m,n)$, and the first box in the first row of $Y(\lambda)$ is the same as the first box in the first row of $R(m,n)$. Let $\mathcal{C} = R(m,n) \backslash Y(\lambda)$.

Applying a 180 degrees rotation to $\mathcal{C}$ and then a transposition gives $Y(\check{\lambda})$ (*see* Example 1 of the French version).

Let V_+ be a maximal isotropic subspace of V and set $L = V_+ \otimes W$. As a $\mathrm{Sp}(W)$-module, S is isomorphic to $\Lambda L = (\Lambda W)^{\otimes m}$. Set $\Lambda^\mu W = \bigotimes_{i=1}^m \Lambda^{\mu_i+n} W$ where $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \varepsilon_i$. From Theorem 0.3 one deduces $\dim L_V(\lambda)_\mu = [\Lambda^\mu W : L_W(\check{\lambda})]$, where $[\Lambda^\mu W : L_W(\check{\lambda})]$ is the multiplicity of $L_W(\check{\lambda})$ in the $\mathrm{Sp}(W)$-module $\Lambda^\mu W$.

When the ground field is $\overline{\mathbb{F}_p}$, S is still a $(\mathrm{Sp}(V), \mathrm{Sp}(W))$ dual pair (*cf.* [1]) and the formula becomes

$$\dim L_V(\lambda)_\mu = \left[\Lambda^\mu W : T_W(\check{\lambda})\right],$$

where $T_W(\beta)$ is the indecomposable tilting $\mathrm{Sp}(W)$-module with highest weight β and $[\Lambda^\mu W : T_W(\check{\lambda})]$ is the multiplicity, as a direct summand, of $T_W(\check{\lambda})$ in the $\mathrm{Sp}(W)$-tilting module $\Lambda^\mu W$. Thus we have to decompose $\Lambda^\mu W$ as a direct sum of $T_W(\nu)$. By induction this reduces to the decomposition of $\Lambda^l W \otimes T_W(\beta)$.

For simplicity we drop the W in $T_W(\lambda)$ and other notations and write $T(\lambda)$. Let $\mathcal{W}_{\mathrm{aff}}$ be the affine Weyl group generated by the Weyl group of $\mathrm{Sp}(W)$ and the affine reflection $s_0 : \lambda \mapsto \lambda - (\lambda(h_0) - p)\alpha_0$ with h_0 the highest coroot and α_0 the highest short root. We denote by $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ the simple roots and $\{h_i\}_{i\in I}$ the corresponding coroots. Next we define $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes P$ and the fundamental alcove $C_{\mathrm{fond}} = \{\lambda \in P_{\mathbb{R}} \mid (\lambda+\rho)(h_0) < p$ and $0 < (\lambda+\rho)(h_i)$ for all $i\}$. We are interessed by $C^0 = C_{\mathrm{fond}} \cap P^+$, which is not empty if and only if $p \geqslant 2n$.

From now on we assume $p \geqslant 2n$, and this implies $\Lambda^l W = T(\omega_l) \oplus T(\omega_{l-2}) \oplus \cdots$ with all ω_l in $\overline{C_{\mathrm{fond}}}$. We still have to decompose $\Lambda^l W \otimes T(\beta)$, $\beta \in P^+$. For simplicity we assume $p \geqslant 2n+2$.

LEMMA 0.4. – (i) *If β does not belong to C^0, then $\Lambda^l W \otimes T(\beta)$ is a direct sum of $T(\nu)$ with $\nu \in P^+ \setminus C^0$.*

(ii) *If β belongs to C^0 we have the formula*

$$\Lambda^l W \otimes T(\beta) = \bigoplus_{\gamma \in C^0} T(\gamma)^{D_\gamma} \oplus T,$$

where T is a direct sum of $T(\nu)$ with $\nu \in P^+ \setminus C^0$, $D_\gamma = \sum_{w\in\mathcal{W}_{\mathrm{aff}}} \varepsilon(w) C_{w(\gamma+\rho)-\rho}$ and C_γ is defined by the characteristic 0 *decomposition $\Lambda^l W \otimes L(\beta) = \bigoplus L(\gamma)^{C_\gamma}$.*

This is a straightforward consequence of the modular Verlinde formula [3]. If $\check{\lambda}$ belongs to C^0 the Lemma 0.4(i) shows that T can be neglected to obtain $\dim L_V(\lambda)_\mu$, and the formula for D_γ together with the calculus of C_γ gives the character of $L_V(\lambda)$.

Nous obtenons des formules de caractères pour tous les groupes classiques, mais on se restreint ici aux groupes symplectiques faute de place. On trouvera les démonstrations complètes dans [2].

1. Les formules de caractères

On prend pour corps de base $K = \overline{\mathbb{F}_p}$ où p est un nombre premier, et on considère un espace vectoriel V sur K de dimension $2m$ muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée Q_V. On pose $G = \mathrm{Sp}(V)$, H désigne un tore maximal de G et $\mathcal{W}$ le groupe de Weyl de G. Soit $P = X(H)$ le groupe des caractères de H et P^+ l'ensemble des poids dominants relativement à un sous-groupe de Borel. Il existe une $\mathbb{Z}$-base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ de P telle que les poids fondamentaux sont les $\omega_l = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_l$, d'où $P^+ = \mathbb{N}\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N}\omega_m$. On associe à $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i \in P^+$ le diagramme de Young $Y(\lambda)$ avec λ_1 boîtes sur la première ligne,

λ_2 boîtes sur la seconde ligne, etc. Enfin pour tout $\lambda \in P^+$ on note $L(\lambda)$ le G-module irréductible sur K de plus haut poids λ et $L(\lambda)_\mu$ son sous-espace de poids μ.

Soit Y un diagramme de Young. Un tableau de forme Y est un remplissage des boîtes de Y par des entiers > 0. Un tableau T est dit $\mathrm{Sp}(V)$-standard de forme Y si et seulement si :

(1) T est un tableau semi-standard de forme Y, ce qui signifie que la numérotation est strictement croissante dans chaque colonne et croissante au sens large dans chaque ligne.

(2) Les numéros de T sont $\leqslant 2m$.

(3) Si $t_1 < t_2 < \cdots$ sont les numéros des boîtes situées sur la première colonne de T, on a $t_{i+1} > 2i$ pour tout i.

Le poids de T est $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \varepsilon_i$, avec

$$\mu_i = (\text{nombre de boîtes de } T \text{ ayant le numéro } 2i) - (\text{nombre de boîtes de } T \text{ ayant le numéro } 2i-1).$$

Pour tout j on note $T[j]$ le diagramme constitué des boîtes ayant un numéro $\leqslant j$. Enfin pour tout diagramme de Young Y, on note $\mathrm{card}(Y)$ le nombre total de ses boîtes.

Fixons un entier n auxiliaire et soit Y un diagramme de Young avec au plus n boîtes sur sa première ligne. On note $c(Y)$ le nombre de boîtes sur les colonnes n et $n-1$ de Y.

THÉORÈME 1.1. – *On suppose $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2n+3$. Soit $\lambda \in P^+$ tel que $\lambda_1 = n$ et $p - 2m \geqslant 2n - c(Y(\lambda))$. Alors $\dim L(\lambda)_\mu$ est le nombre de tableaux $\mathrm{Sp}(V)$-standards T de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ tels que pour tout $i \leqslant m$, on a $p - 2i \geqslant 2n - c(T[2i])$, et si $p - 2i = 2n - c(T[2i])$ on exclut les tableaux tels que $2i-1$ figure sur la colonne n de $Y(\lambda)$, $2i$ n'y figure pas, $2i$ figure sur la colonne $n-1$ de $Y(\lambda)$ et $2i-1$ n'y figure pas.*

Si on omet la condition faisant intervenir p, on retrouve la combinatoire de caractéristique 0 de [9]. La condition portant sur $p - 2m$ montre que les formules obtenues peuvent être en dehors du domaine de validité de la conjecture de Lusztig [6]. Ainsi pour tout s vérifiant $2 \leqslant s \leqslant \frac{p-3}{2}$ on a une formule de caractère pour $L(s\,\omega_m)$.

Dans le cas $n = 1$ on a un énoncé similaire que l'on décrit ci-dessous. On notera que dans [4] on trouve une formule itérative pour calculer les dimensions des $L(\omega_l)$ sous l'hypothèse du Théorème 1.2. Nous obtenons une formule directe pour ces dimensions et celles des sous-espaces de poids.

THÉORÈME 1.2. – *Si $l \geqslant m + 2 - p$, $\dim L(\omega_l)_\mu$ est le nombre de tableaux $\mathrm{Sp}(V)$-standards T de forme $Y(\lambda)$ et de poids μ tels que pour tout $i \leqslant m$ on ait $i + 2 - p \leqslant \mathrm{card}(T[2i])$.*

Si $p = 2$ par exemple, tous les poids de $L(\omega_m)$ sont conjugués à ω_m et $\dim L(\omega_m) = 2^m$.

Les formules des Théorèmes 1.1 et 1.2 sont stables au sens suivant : si on place une ligne de n boîtes avant la première ligne de $Y(\lambda)$, on obtient un nouveau diagramme pour $\mathrm{Sp}_{2m+2}(K)$ qui vérifie toujours les hypothèses des Théorèmes 1.1 ou 1.2. On obtient donc des formules de caractères pour la limite inductive $\mathrm{Sp}_\infty(K)$ des $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ (l'inclusion $\mathrm{Sp}_{2m-2}(K) \subset \mathrm{Sp}_{2m}(K)$ correspond à la suppression de la racine simple courte $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ du diagramme de Dynkin de $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$).

Nous retrouvons également les formules de caractères de [10] pour $L(\frac{p-1}{2}\omega_m)$ et $L(\frac{p-3}{2}\omega_m + \omega_{m-1})$. Les résultats précédents et le théorème du produit tensoriel de Steinberg permettent d'obtenir une formule de caractère pour $L(\lambda)$ lorsque $\lambda = \lambda_0 + p\lambda_1 + \cdots + p^l\lambda_l$ et chaque λ_i satisfait aux conditions du Théorème 1.1 ou du Théorème 1.2. On a par exemple le caractère de $L(s\omega_m)$ pour tout s en caractéristique 2 et $\dim L(s\omega_m) = 2^{mr}$, où r est le nombre de 1 dans l'écriture 2-adique de s.

2. Esquisse de la preuve

Nous obtenons les formules précédentes en suivant la démarche exposée dans [7] et [8], les deux outils principaux étant une paire duale particulière [5] et la formule modulaire de Verlinde [3].

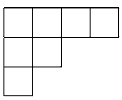
On explique d'abord le procédé en caractéristique 0. Soit W un espace vectoriel auxiliaire de dimension $2n$ muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée Q_W. On munit $V \otimes W$ du produit scalaire $Q_V \otimes Q_W$. Soit $S = S^+ \oplus S^-$ la représentation spin de $\mathrm{Spin}(V \otimes W)$. Comme $\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W)$ est simplement connexe, son action naturelle sur $V \otimes W$ se relève en $\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{Spin}(V \otimes W)$. Il en résulte une structure de $(\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W))$-module sur S. On a alors une $(\mathrm{Sp}(V), \mathrm{Sp}(W))$ paire duale au sens de [5], d'où le théorème ci-dessous.

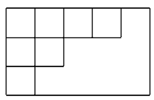
THÉORÈME 2.1. – *On a l'égalité suivante entre* $(\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(W))$*-modules*

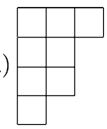
$$S = \bigoplus_{Y(\lambda) \subset R(m,n)} L_V(\lambda) \otimes L_W(\check{\lambda}).$$

Il reste à expliquer les notations utilisées dans l'énoncé précédent. L'inclusion $Y(\lambda) \subset R(m,n)$ signifie que $Y(\lambda)$ est contenu dans un rectangle $R(m,n)$ de m lignes et n colonnes, la première boîte de la première ligne de $Y(\lambda)$ étant la même que celle de $R(m,n)$. Soit $\mathcal{C}$ le complémentaire de $Y(\lambda)$ dans $R(m,n)$. En lui appliquant une rotation de 180 degrés et en passant au diagramme transposé on trouve $Y(\check{\lambda})$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1. – Si $m = 3$, $n = 5$ et $\lambda = 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$, on a $\check{\lambda} = 3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 1\varepsilon_4 + 0\varepsilon_5$.

$Y(\lambda)$ 



$Y(\check{\lambda})$ 

La première figure est celle de $Y(\lambda)$, la seconde représente l'inclusion $Y(\lambda) \subset R(3,5)$ et la troisième montre $Y(\check{\lambda})$.

Soit V_+ un sous-espace totalement isotrope maximal de V et posons $L = V_+ \otimes W$. En tant que $\mathrm{Sp}(W)$-module, S s'identifie à $\Lambda L = (\Lambda W)^{\otimes m}$. En particulier on retrouve $\Lambda W = \bigoplus_{k=0}^{n} L_W(\omega_k)^{n-k+1}$ dans le cas $m = 1$. Posons $\Lambda^\mu W = \bigotimes_{i=1}^{m} \Lambda^{\mu_i + n} W$ où $\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \varepsilon_i$. On déduit du théorème que la dimension de $L_V(\lambda)$ est la multiplicité de $L_W(\check{\lambda})$ dans ΛL vu comme $\mathrm{Sp}(W)$-module. On a plus précisément $\dim L_V(\lambda)_\mu = [\Lambda^\mu W : L_W(\check{\lambda})]$, où $[\Lambda^\mu W : L_W(\check{\lambda})]$ est la multiplicité de $L_W(\check{\lambda})$ dans le $\mathrm{Sp}(W)$-module $\Lambda^\mu W$.

Lorsque K est de caractéristique p, S est encore une $(\mathrm{Sp}(V), \mathrm{Sp}(W))$ paire duale (*cf.* [1]), et en adaptant le procédé on obtient la formule

$$\dim L_V(\lambda)_\mu = \left[\Lambda^\mu W : T_W(\check{\lambda})\right],$$

où $T_W(\beta)$ désigne le $\mathrm{Sp}(W)$-module basculant indécomposable de plus haut poids β, et $[: \Lambda^\mu W : T_W(\check{\lambda})]$ est la multiplicité, comme facteur direct, de $T_W(\check{\lambda})$ dans le $\mathrm{Sp}(W)$-module basculant $\Lambda^\mu W$. Pour en déduire des formules de caractères, on doit écrire les $\Lambda^l W$ et les $T_W(\alpha) \otimes T_W(\beta)$ comme sommes directes de modules $T_W(\gamma)$.

On travaille maintenant avec $\mathrm{Sp}(W)$ et on emploie les notations $T(\lambda)$, $P^+, \ldots$ pour $T_W(\lambda)$, $P_W^+, \ldots$. On définit le groupe de Weyl affine $\mathcal{W}_{\mathrm{aff}}$ comme étant le groupe engendré par $\mathcal{W}$ et la symétrie affine s_0 : $\lambda \mapsto \lambda - (\lambda(h_0) - p)\alpha_0$ avec h_0 la plus grande coracine et α_0 la plus grande racine courte. On désigne par $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des racines simples et par $\{h_i\}_{i \in I}$ les coracines correspondantes. On pose $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes P$ et on définit l'alcôve fondamentale $C_{\mathrm{fond}} = \{\lambda \in P_{\mathbb{R}} \mid (\lambda + \rho)(h_0) < p$ et $0 < (\lambda + \rho)(h_i)$ pour tout $i\}$. On pose enfin $C^0 = C_{\mathrm{fond}} \cap P^+$, et C^0 est non vide si et seulement si $p \geqslant 2n$, ce qu'on suppose jusqu'à la fin de l'article.

Sous cette hypothèse on a $\Lambda^l W = T(\omega_l) \oplus T(\omega_{l-2}) \oplus \cdots$ et tous les poids fondamentaux sont dans l'adhérence de l'alcôve fondamentale. Il reste à trouver la décomposition de $T(\alpha) \otimes T(\beta)$ avec $\alpha, \beta \in P^+$.

C'est un module basculant et on a donc $T(\alpha) \otimes T(\beta) = \oplus T(\gamma)^{n_\gamma}$. La formule suivante permet le calcul de n_γ pour $\gamma \in C^0$.

THÉORÈME 2.2 (Formule modulaire de Verlinde [3]). – *Soit* $\gamma \in C^0$.

(i) *Si* α *ou* β *n'appartient pas à* C^0, *alors* $n_\gamma = 0$.

(ii) *Si* α *et* β *appartiennent à* C^0 *on a* $n_\gamma = \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathrm{aff}}} \varepsilon(w) K_{w(\gamma+\rho)-\rho}$ *où les* K_γ *sont les constantes de Kostant, i.e., on a* $L(\alpha) \otimes L(\beta) = \bigoplus L(\gamma)^{K_\gamma}$ *en caractéristique* 0.

Il nous suffit de décomposer les $\Lambda^l W \otimes T(\beta)$ pour obtenir les formules de caractères. Si $p \geqslant 2n+2$ par exemple, tous les poids fondamentaux sont dans C^0 et on déduit immédiatement de ce qui précède la décomposition

$$\Lambda^l W \otimes T(\beta) = \bigoplus_{\gamma \in C^0} T(\gamma)^{D_\gamma} \oplus T,$$

où T est somme directe de certains $T(\nu)$ avec $\nu \in P^+ \setminus C^0$, $D_\gamma = \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathrm{aff}}} \varepsilon(w) C_{w(\gamma+\rho)-\rho}$ et C_γ est défini par la décomposition de caractéristique zéro $\Lambda^l W \otimes L(\beta) = \bigoplus L(\gamma)^{C_\gamma}$. Si $\check{\lambda}$ appartient à C^0 le Théorème 2.2.(i) montre que T n'apporte aucune contribution au calcul de $\dim L_V(\lambda)_\mu$, et la proposition suivante combinée à la formule $D_\gamma = \sum_{w \in \mathcal{W}_{\mathrm{aff}}} \varepsilon(w) C_{w(\gamma+\rho)-\rho}$ permet de calculer le caractère de $L_V(\lambda)$.

PROPOSITION 2.3. – *En caractéristique* 0 *on a pour tout* $l \leqslant \dim W$: $\Lambda^l W \otimes L(\beta) = \bigoplus_{(\gamma_1,\gamma)} L(\gamma)$ *où les couples* (γ_1, γ) *sont obtenus comme suit.*

(i) *On ajoute* r *boîtes* ($r \leqslant l$), *au plus une par ligne, à* $Y(\beta)$, *de manière à obtenir un diagramme de Young* Y_1, *et* γ_1 *est l'unique poids dominant tel que* $Y_1 = Y(\gamma_1)$.

(ii) *On retranche* $s = l - r$ *boîtes, au plus une par ligne, à* Y_1, *de manière à obtenir un diagramme de Young* Y, *et* γ *est l'unique poids dominant tel que* $Y = Y(\gamma)$.

Références bibliographiques

[1] A.M. Adamovich, G.L. Rybnikov, Tilting modules for classical groups and Howe duality in positive characteristic, Transform. Groups 1 (1996) 1–34.

[2] S. Foulle, Character formulas for classical groups in equal characteristic, en préparation.

[3] G. Georgiev, O. Mathieu, Fusion rings for modular representations of Chevalley groups, Contemp. Math. 175 (1994) 89–100.

[4] R. Gow, Construction of $p-1$ irreducibles modules with fundamental highest weight for the symplectic group in characteristic p, J. London Math. Soc. 58 (2) (1998) 619–632.

[5] R. Howe, Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond, in: The Schur Lectures, Tel Aviv, 1992, Israel Math. Conf. Proc., Vol. 8, 1995, pp. 1–182.

[6] G. Lusztig, Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups, in: The Santa Cruz Conference on Finite Groups, 1979, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 37, 1980, pp. 313–317.

[7] O. Mathieu, G. Papadopoulo, A character formula for a family of simple modular representations of GL_n, Comment. Math. Helv. 74 (1999) 280–296.

[8] O. Mathieu, Tilting modules and their applications, in: Analysis on Homogeneous Spaces and Representation Theory of Lie Groups, Adv. Stud. Pure Math., Vol. 26, 2000, pp. 145–212.

[9] R.A. Proctor, Young tableaux, Gel'fand patterns, and branching rules for classical groups, J. Algebra 164 (1994) 299–360.

[10] I.D. Suprunenko, A.E. Zalesskii, Representations of dimension $(p^n \pm 1)/2$ of the symplectic group of degree $2n$ over a field of characteristic p, Vestnik Akad. Navuk. BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Navuk 6 (1987) 9–15.