C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1–4

Théorie des nombres/*Number Theory*

Formes linéaires en polyzêtas et intégrales multiples

Stéphane Fischler

Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75005 Paris, France

Reçu le 22 février 2002 ; accepté le 29 avril 2002

Note présentée par Christophe Soulé.

Résumé Le problème considéré ici est de définir des familles d'intégrales n-uples, munies d'une action de groupe comme dans les travaux de Rhin–Viola [5,6], dont les valeurs soient des formes linéaires, sur le corps des rationnels, en les polyzêtas de poids au plus n. On généralise pour cela les approches de Vasilyev [10] et Sorokin [7], en les reliant par un changement de variables. On décrit aussi une structure de groupe pour une intégrale n-uple qui donne, pour $n=2$ et $n=3$, celles obtenues par Rhin et Viola. ***Pour citer cet article : S. Fischler, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1–4.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Linear forms in multiple zeta values and multiple integrals

Abstract The problem we consider is to define families of n-dimensional integrals, endowed with group actions as in Rhin–Viola's work [5,6], the values of which are linear forms, over the rationals, in multiple zeta values of weight at most n. We generalize Vasilyev's [10] and Sorokin's [7] approaches, and give a change of variables that connects them to each other. We describe a group structure for a n-dimensional integral that specializes, for $n=2$ and $n=3$, to the ones obtained by Rhin and Viola. ***To cite this article: S. Fischler, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1–4.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Après la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ par Apéry [1], plusieurs variantes ont été proposées, parmi lesquelles celles de Beukers [2] et Sorokin [8]. Dans ces deux preuves, les formes linéaires en 1 et $\zeta(3)$ sont écrites comme des intégrales triples : $B(N)=\int_{[0,1]^3}\frac{x^N(1-x)^N y^N(1-y)^N z^N(1-z)^N}{(1-z(1-y(1-x)))^{N+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ pour Beukers, et $S(N)=\int_{[0,1]^3}\frac{x^N(1-x)^N y^N(1-y)^N z^N(1-z)^N}{(1-xy)^{N+1}(1-xyz)^{N+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ pour Sorokin. Or on constate que ces formes linéaires coïncident. Si on croit à la philosophie des périodes [4], l'égalité de ces intégrales doit pouvoir se démontrer par une suite de changements de variables et d'applications des règles d'additivité (par rapport à l'intégrande ou au domaine) et du théorème de Stokes. En l'occurrence, un seul changement de variables suffit (*voir* le Corollaire 2.2).

Les intégrales $B(N)$ ont été généralisées par Vasilyev [9], qui pose $\delta_k(x_1,\ldots,x_n)=1-x_k\delta_{k-1}(x_1,\ldots,x_n)$ pour $n\geqslant 2$ et $k\in\{1,\ldots,n\}$ avec $\delta_0=1$, et considère

$$\int_{[0,1]^n}\frac{\prod_{k=1}^n x_k^N(1-x_k)^N}{\delta_n(x_1,\ldots,x_n)^{N+1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n. \tag{1}$$

Adresse e-mail : fischler@dma.ens.fr (S. Fischler).

S1631-073X(02)02424-X/FLA

Il démontre que pour $N=0$ cette intégrale vaut $2(-1)^{n-1}\mathrm{Li}_n((-1)^{n-1})$, donc est un multiple rationnel de $\zeta(n)$, et [10] que pour $n=5$ (respectivement $n=4$) et N quelconque c'est une forme linéaire en 1, $\zeta(3)$ et $\zeta(5)$ (respectivement 1, $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$). Il conjecture que pour tous n et N on obtient une forme linéaire en 1 et les valeurs de ζ aux entiers compris entre 2 et n ayant la même parité que n.

D'autre part, les intégrales $S(N)$ sont à rapprocher de celles que Sorokin introduit [7] en relation avec $\zeta(2,2,\ldots,2)$, quand $n=2r$ est pair :

$$\int_{[0,1]^n} \frac{(y_1y_2)^{rN+(r-1)}(y_3y_4)^{(r-1)N+(r-2)}\cdots(y_{n-1}y_n)^N\prod_{k=1}^n(1-y_k)^N}{\prod_{k\in\{2,\ldots,n\}\mathrm{pair}}(1-y_1y_2\cdots y_k)^{N+1}}\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n. \tag{2}$$

Au paragraphe 2 ci-dessous, on définit deux familles d'intégrales, qui généralisent (1), donc $B(N)$, d'une part, (2) et $S(N)$ d'autre part, et on montre que ces deux familles se correspondent par un changement de variables. On montre en outre qu'un groupe agit sur ces intégrales, de manière analogue à ce que Rhin et Viola considèrent [5,6] pour obtenir les meilleures mesures d'irrationalité connues pour $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. Au paragraphe 3, on définit une autre famille d'intégrales n-uples, qui généralise (1) et sur laquelle agit aussi un groupe ; on retrouve alors dans les cas particuliers $n=2$ et $n=3$ les groupes obtenus par Rhin et Viola.

On adopte la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. – On dit qu'une famille de nombres $I(\underline{p})\in\mathbb{R}_+^*\cup\{\infty\}$, paramétrés par $\underline{p}\in\mathbb{Z}^s$, admet pour groupe de Rhin–Viola un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_s(\mathbb{Z})$ si $I(g\underline{p})/I(\underline{p})$ est un rationnel (ou ∞) pour tous $g\in G$ et $\underline{p}\in\mathbb{Z}^s$ (avec $\infty/\infty=1$).

Dans ce texte, on considère des familles d'intégrales n-uples dont les valeurs (lorsqu'elles sont finies) sont conjecturalement des formes linéaires sur $\mathbb{Q}$ en les polyzêtas de poids au plus n. On peut espérer que, pour de bons choix des exposants $\underline{p}$, ces intégrales soient assez petites et qu'on ait un contrôle sur le dénominateur des coefficients de la forme linéaire. Alors l'étude de la valuation p-adique des nombres $I(g\underline{p})/I(\underline{p})$, quand g parcourt G et p un certain ensemble de nombres premiers, peut permettre d'améliorer ce contrôle du dénominateur, donc de raffiner des mesures d'irrationalité ou d'indépendance linéaire de certains polyzêtas.

Davantage de détails, en particulier sur l'action des groupes de Rhin–Viola, seront donnés dans [3].

2. Une généralisation commune des intégrales de Vasilyev et de Sorokin

Dans tout ce texte, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour $k\in\{0,\ldots,n\}$ et $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in[0,1]^n$ on pose $D_k(\underline{x})=\sum_{j=0}^k(-1)^jx_nx_{n-1}\cdots x_{n-j+1}$. On a alors $D_0(\underline{x})=1$, $D_1(\underline{x})=1-x_n$, $D_2(\underline{x})=1-x_n(1-x_{n-1})$ et $D_n(\underline{x})=\delta_n(\underline{x})$. À tout $\underline{p}=(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,c_2,\ldots,c_n)\in\mathbb{Z}^{3n-1}$ on associe l'intégrale (éventuellement infinie)

$$J(\underline{p})=\int_{[0,1]^n}\frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k}}{\prod_{k=2}^n D_k(\underline{x})^{c_k}}\,\frac{\prod_{k\in\{2,\ldots,n-2\}\mathrm{pair}}D_k(\underline{x})}{\prod_{k\in\{3,\ldots,n-1\}\mathrm{impair}}D_k(\underline{x})}\,\frac{\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n}{D_n(\underline{x})}.$$

Par ailleurs, à tout $\underline{P}=(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n,C_2,\ldots,C_n)\in\mathbb{Z}^{3n-1}$ on associe

$$K(\underline{P})=\int_{[0,1]^n}\frac{\prod_{k=1}^n y_k^{A_k}(1-y_k)^{B_k}}{\prod_{k=2}^n(1-y_1y_2\cdots y_k)^{C_k+1}}\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n.$$

Cette intégrale est finie si, et seulement si, on a $A_k\geqslant 0$, $B_k\geqslant 0$ et $\sum_{j=2}^k(C_j+1-B_j)^+\leqslant B_1+k-1$ pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$ en notant $\alpha^+=\max(\alpha,0)$. L'intérêt des intégrales $K(\underline{P})$ (donc du théorème suivant) est qu'elles se développent « naturellement » en séries multiples, dont on peut espérer démontrer que ce sont des formes linéaires sur $\mathbb{Q}$ en les polyzêtas de poids au plus n.

THÉORÈME 2.1. – *Pour tout* $\underline{p} \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ *on a* $J(\underline{p}) = K(\underline{P})$, *où* $\underline{P}$ *est donné en fonction de* $\underline{p}$ *par :*

$$A_k = a_{n+1-k} \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n, \quad B_k = b_{n+1-k} \text{ pour } 2 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et } B_1 = a_{n-1} + b_n - c_2 - c_3 - \cdots - c_n,$$

$$C_k = a_{n+1-k} + b_{n+1-k} - c_k - c_{k+1} - \cdots - c_n \quad \text{pour tout } k \in \{2, \ldots, n\} \text{ pair},$$

$$C_k = c_k + c_{k+1} + \cdots + c_n - a_{n-k} \quad \text{pour tout } k \in \{3, \ldots, n\} \text{ impair, avec la convention } a_0 = 0.$$

Ce résultat provient du changement de variables défini par $x_k = y_{n+1-k}$ pour $k \equiv n \bmod 2$ et $x_k = \frac{(1-y_1\cdots y_{n-k})y_{n+1-k}}{1-y_1\cdots y_{n+1-k}}$ pour $k \not\equiv n \bmod 2$. On peut bien sûr l'inverser, donc exprimer $\underline{p}$ en fonction de $\underline{P}$.

COROLLAIRE 2.2. – *Avec les notations de l'introduction, on a* $B(N) = S(N)$ *pour tout* $N \geqslant 0$, *et l'intégrale* (1) *est égale à* $\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^N(1-y_k)^N}{\prod_{k\in\{2,\ldots,n\}\text{pair}}(1-y_1\cdots y_k)^{N+1}} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$ *si n est pair, et à* $\int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n y_k^N(1-y_k)^N}{(1-y_1\cdots y_n)^{N+1}\prod_{k\in\{2,\ldots,n\}\text{pair}}(1-y_1\cdots y_k)^{N+1}} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$ *si n est impair.*

Pour $N = 0$, l'intégrale (1) vaut donc $\sum_{l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_{n/2} \geqslant 1} \frac{1}{l_1^2 l_2^2 \cdots l_{n/2}^2}$ si n est pair, et $\sum_{l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_{(n-1)/2} \geqslant l_{(n+1)/2} \geqslant 1} \frac{1}{l_1^2 l_2^2 \cdots l_{(n-1)/2}^2 l_{(n+1)/2}}$ si n est impair. Le résultat de Vasilyev selon lequel cette intégrale égale $2(-1)^{n-1}\mathrm{Li}_n((-1)^{n-1})$ se ramène ainsi à une identité linéaire entre polyzêtas, qu'on doit pouvoir démontrer de manière combinatoire (*voir* [11]).

PROPOSITION 2.3. – *Si* $n \geqslant 3$, *la famille* $(K(\underline{P}))$ *admet un groupe de Rhin–Viola d'ordre* 32, *isomorphe à* $(V \times V) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *où* $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *est le groupe de Klein et* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *agit en permutant les facteurs de* $V \times V$. *Cela provient d'analogues des transformations* σ *et* χ *de* [6], *et du changement de variables défini par* $y'_k = \frac{1-y_1\cdots y_{n-k+1}}{1-y_1\cdots y_{n-k+2}}$ *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$ (*avec la convention* $y_{n+1} = 0$).

3. Une généralisation du groupe de Rhin–Viola

À tout $\underline{p} = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ on associe (avec la notation δ_k utilisée dans l'introduction) :

$$L(\underline{p}) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{k=1}^n x_k^{a_k}(1-x_k)^{b_k}}{\prod_{k=2}^n \delta_k(\underline{x})^{c_k}} \frac{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}{\delta_n(\underline{x})}.$$

On pose $\varrho_n = c_n - b_n$ et $\varrho_{n-1} = c_{n-1} - 1 - b_{n-1}$, puis $\varrho_k = \varrho_{k+2}^+ + c_k - 1 - b_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n-2\}$ avec la convention $c_1 = 1$. Alors l'intégrale $L(\underline{p})$ est finie si, et seulement si,on a $a_k \geqslant 0$, $b_k \geqslant 0$ et $\varrho_k \leqslant a_{k-1}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, avec la convention $a_0 = 0$.

Notons σ l'automorphisme de $\mathbb{Z}^{3n-1}$ qui échange a_1 et b_2, ainsi que a_2 et b_1, en fixant les autres coordonnées. Notons ψ celui qui à $\underline{p}$ associe $\underline{p}' = (a'_1, \ldots, a'_n, b'_1, \ldots, b'_n, c'_2, \ldots, c'_n)$ défini par :

$$a'_k = a_{n+1-k} \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n, \quad b'_k = b_{n+2-k} \quad \text{pour } 2 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad b'_1 = a_{n-1} + b_n - c_n,$$

$$c'_k = a_{n+2-k} + b_{n+2-k} + c_{n+1-k} - b_{n+1-k} - a_{n-k} \quad \text{pour } 2 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$c'_n = a_2 + b_2 - b_1.$$

Alors des changements de variables montrent qu'on a $L(\underline{p}) = L(\sigma(\underline{p})) = L(\psi(\underline{p}))$ pour tout $\underline{p}$. En outre, notons χ l'automorphisme de $\mathbb{Z}^{3n-1}$ qui fixe toutes les composantes, sauf a_n et c_n qu'il échange et b_n qu'il remplace par $a_n + b_n - c_n$; il vérifie $L(\underline{p}) = \frac{a_n!b_n!}{c_n!(a_n+b_n-c_n)!} L(\chi(\underline{p}))$ pour tout $\underline{p} \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ tel que a_n, b_n, c_n et $a_n + b_n - c_n$ soient positifs.

PROPOSITION 3.1. – *Si* $n \geqslant 3$, *la famille* $(L(\underline{p}))$ *paramétrée par* $\underline{p} \in \mathbb{Z}^{3n-1}$ *admet un groupe de Rhin–Viola d'ordre* 32, *isomorphe à* $(V \times V) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *qui est engendré par* σ, ψ *et* χ.

Remarque 1. – Peut-être y a-t-il un lien entre les intégrales $L(\underline{p})$ et $K(\underline{P})$ qui permette d'expliquer le parallélisme entre les Propositions 2.3 et 3.1 ?

Pour obtenir une structure de groupe plus riche que celle de la Proposition 3.1, on peut se restreindre aux intégrales $L(\underline{p})$ telles que $c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$. Pour conserver l'action de σ et ψ, on doit imposer en outre $a_1 + b_2 = a_3 + b_3$ si $n = 3$, et les relations suivantes si $n \geqslant 4$:

$$a_2 = b_1 \text{ et } b_n = c_n \text{ et } a_k + b_{k+1} = a_{k+2} + b_{k+2} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \ldots, n-2\}.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des $\underline{p}$ vérifiant ces relations ; il est stable par σ et ψ. Notons φ l'automorphisme de $\mathcal{E}$ qui stabilise toutes les coordonnées, sauf a_{n-1} et c_n qu'il échange, b_{n-1} qu'il remplace par $a_{n-1}+b_{n-1}-c_n$ et b_n qu'il remplace par $a_{n-1} + b_n - c_n$. On a alors $L(\underline{p}) = \frac{a_{n-1}!b_{n-1}!}{c_n!(a_{n-1}+b_{n-1}-c_n)!} L(\varphi(\underline{p}))$ pour tout $\underline{p} \in \mathcal{E}$ tel que a_{n-1}, b_{n-1}, c_n et $a_{n-1} + b_{n-1} - c_n$ soient positifs.

THÉORÈME 3.2. – *La famille des $L(\underline{p})$, pour $\underline{p} \in \mathcal{E}$, admet un groupe de Rhin–Viola G engendré par σ, ψ et φ. Plus précisément* (*en se restreignant aux $\underline{p} \in \mathcal{E}$ pour lesquels les quotients ont un sens*) :

- *Pour $n \geqslant 4$, le groupe G est isomorphe à $(\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc d'ordre 72 ; il laisse stable $\frac{L(\underline{p})}{a_{n-1}!b_{n-1}!a_2!b_3!}$ si $n \geqslant 5$, et $\frac{L(\underline{p})}{a_3!b_3!a_2!}$ si $n = 4$.*
- *Pour $n = 3$, le groupe G est isomorphe à $H \rtimes \mathfrak{S}_5$, où H est l'hyperplan $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_5 = 0$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$; il laisse stable $\frac{L(\underline{p})}{a_1!a_2!a_3!b_1!b_2!b_3!(a_2+b_3-c_3)!(b_1+b_3-c_3)!}$.*
- *Pour $n = 2$, le groupe G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$, et laisse stable $\frac{L(\underline{p})}{a_1!a_2!b_1!b_2!(a_1+b_2-c_2)!}$.*

Pour $n \in \{2, 3\}$, on retrouve exactement les situations considérées par Rhin et Viola. Pour $n = 2$, le groupe diédral $\mathcal{D}_5$ de [5] est exactement celui engendré par ψ et σ. Pour $n = 3$, on pose $x = x_2$, $y = 1 - x_1$ et $z = x_3$; la transformation ϑ^2 de [6] est alors $\psi \circ \sigma$, et $\vartheta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ est donné par $(\varphi\sigma\psi\sigma\varphi\sigma)^2\varphi$.

Pour $n = 3$, un phénomène mystérieux se produit dans [6] : lorsqu'on impose la relation $a_1 + b_2 = a_3 + b_3$, ce qui permet d'avoir une action de groupe, les intégrales obtenues sont des formes linéaires en 1 et $\zeta(3)$ seulement : $\zeta(2)$ n'apparaît plus. On peut se demander si un phénomène analogue survient pour $n \geqslant 4$.

Remarque 2. – Dans tout ce texte, les propriétés de χ et φ proviennent, comme dans [5] et [6], de la formule $\int_0^1 \frac{x^a(1-x)^b}{(1+\beta x)^{c+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{a!b!}{c!(a+b-c)!}\int_0^1 \frac{x^c(1-x)^{a+b-c}}{(1+\beta x)^{a+1}}\,\mathrm{d}x$. Un analogue de cette formule, dans lequel le dénominateur serait de la forme $(1 + \beta x)^{c+1}(1 + \beta' x)^{c'+1}$, permettrait d'enrichir les structures de groupe obtenues ici.

Remerciements. Je remercie Pierre Cartier et Tanguy Rivoal, dont les questions sont à l'origine de ce travail, ainsi que Jacky Cresson et Michel Waldschmidt.

Note ajoutée aux épreuves : Le Corollaire 2.2 a été obtenu, indépendamment et par une méthode différente, par Zlobin [12].

Références bibliographiques

[1] R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque 61 (1979) 11–13.
[2] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. 11 (3) (1979) 268–272.
[3] S. Fischler, Groupes de Rhin–Viola et intégrales multiples, J. Théor. Nombres Bordeaux, soumis.
[4] M. Kontsevich, D. Zagier, Periods, in: Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, Springer, 2001, pp. 771–808.
[5] G. Rhin, C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$, Acta Arith. 77 (1) (1996) 23–56.
[6] G. Rhin, C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$, Acta Arith. 97 (3) (2001) 269–293.
[7] V.N. Sorokin, A transcendence measure for π^2, Sb. Math. 187 (12) (1996) 1819–1852.
[8] V.N. Sorokin, Apéry's theorem, Moscow Univ. Math. Bull. 53 (3) (1998) 48–52.
[9] D.V. Vasilyev, Some formulas for Riemann zeta-function at integer points, Moscow Univ. Math. Bull. 51 (1) (1996) 41–43.
[10] D.V. Vasilyev, On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd integers, Doklady NAN Belarusi (Reports of the Belarus National Academy of Sciences) 45 (5) (2001) 36–40 (en russe).
[11] M. Waldschmidt, Valeurs zêta multiples : une introduction, J. Théor. Nombres Bordeaux 12 (2) (2000) 581–595.
[12] S. Zlobin, Integrals represented as linear forms in generalized polylogarithms, Mat. Zametki 71 (5) (2002) 782–787 (en russe).