C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 133–138

Analyse complexe/*Complex Analysis*

Asymptotic zero distribution of sections and tails of Mittag–Leffler functions

Natalya Zheltukhina

Department of Mathematics, Bilkent University, 06533 Bilkent, Ankara, Turkey

Received 6 May 2002; accepted 13 May 2002

Note presented by Jean-Pierre Kahane.

Abstract We study the asymptotic (as $n \to \infty$) zéro distribution of $(1-\lambda)s_n(z) - \lambda t_{n+1}(z)$, where $\lambda \in \mathbb{C}$, s_n is nth section, t_n is nth tail of the power series of Mittag–Leffler function $E_{1/\rho}$ of order $\rho > 1$. Our results generalize the results by Edrei, Saff and Varga for the case $\lambda = 0$. ***To cite this article: N. Zheltukhina, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 133–138.***

Distribution asymptotique des zéros pour les sections et les restes des fonctions de Mittag–Leffler

Résumé On étudie la distribution asymptotique (quand $n \to \infty$) des zéros de $(1-\lambda)s_n(z) - \lambda t_{n+1}(z)$, où $\lambda \in \mathbb{C}$, s_n est la $n$ème section, t_n est le $n$ème reste du developpement de la fonction de Mittag–Leffler $E_{1/\rho}$ d'ordre $\rho > 1$. On généralise les résultats obtenus par Edrei, Saff et Varga dans le cas $\lambda = 0$. ***Pour citer cet article : N. Zheltukhina, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 133–138.***

Version française abrégée

Étant donné une fonction entière transcendente (1.1), on definie par (1.2) ses sections $s_n(z, f)$ et ses restes $t_n(z, f)$. On note $R_1, R_2, R_3, \ldots, \lim_{n\to\infty} R_n = \infty$, les points de discontinuité de l'indice central de (1.1).

Soit $\mathcal{M}_n(\lambda, f)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, l'ensemble des zéros de l'équation $I_n(R_n z; \lambda, f) = 0$, où $I_n(R_n z; \lambda, f)$ est defini (1.3). En particulier, $\mathcal{M}_n(0, f)$ (resp. $\mathcal{M}_{n-1}(1, f)$) coincide avec l'ensemble des zéros de $s_n(R_n z, f)$ ($t_n(R_{n-1} z, f)$). Soit $\mathcal{M}(\lambda, f)$ l'ensemble des points d'accumulation de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(\lambda, f)$.

En 1924, Szegö [10] a etudié l'asymptotique (quand $n \to \infty$) de distribution des zéros de $I_n(nz; \lambda, \mathrm{e}^z)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitraire. Notons, que $R_n = n$ pour $f(z) = \mathrm{e}^z$. Szegö a découvert que l'ensemble de tous les zéros de $I_n(nz; \lambda, \mathrm{e}^z)$ est fortement lié à la courbe $S = \{z : |z\,\mathrm{e}^{1-z}| = 1\}$ dite la courbe de Szegö. Ce lien est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME S ([10]). – *On a les égalités* : (i) $\mathcal{M}(0, \mathrm{e}^z) = S \cap \{z : |z| \leqslant 1\}$, (ii) $\mathcal{M}(1, \mathrm{e}^z) = S \cap \{z : |z| \geqslant 1\}$, (iii) $\mathcal{M}(\lambda, \mathrm{e}^z) = S$, *pour* $\lambda \neq 0, 1$.

Dieudonné [3] a redécouvert les résultats de [10] en 1935 en utilisant une méthode différente. Les travaux de Szegö's et Dieudonné's [10], [3] ont suscité un grand intérêt aux distributions des zéros des sections et

E-mail address: natalya@fen.bilkent.edu.tr (N. Zheltukhina).

S1631-073X(02)02442-1/FLA

des restes des fonctions entières (e.g., [6] et les références de loc.cit.). En particulier, les domaines sans zéros des sections et des restes de e^z ont été etudié dans [1,2].

En 1983, Edrei, Saff et Varga [5] ont etudié la distribution asymptotiques des zéros des sections de la fonction de Mittag–Leffler (1.4) d'ordre $\rho > 1$. À la différence de la fonction exponentielle e^z, la fonction de Mittag–Leffler $E_{1/\rho}(z)$, $\rho > 1$, admet des zéros, qui donne lieu a une partie des zéros de $s_n(R_n z, E_{1/\rho})$ par le théorème de Hurwitz. Dans [5], il a été démontré que $s_n(R_n z, E_{1/\rho})$ accumulent près de la courbe $S_1(\rho) = S'(\rho) \cup S''(\rho)$, où les courbes $S'(\rho)$ et $S''(\rho)$ sont définies par (1.5) et (1.6) et appartiennent au disque unité. Plus précisement, on a le résultat suivant.

THÉORÈME ESV ([5]). – *$\mathcal{M}_0(0, E_{1/\rho}) = S_1(\rho)$, où $\mathcal{M}_0(\lambda, E_{1/\rho})$ est defini par* (1.7).

Ce théorème est une consequence des résultats beaucoup plus precis et compliques de [5], qui sont liés à la description des domaines sans zéros de $s_n(R_n z, E_{1/\rho})$. La similitude entre $E_{1/\rho}(z)$ (donné par le Théorème ESV) et e^z (donné par Théorème S(i)) suggère la question suivante. Est-ce que l'analogue du résultat de Szegö pour $I_n(nz; \lambda, e^z)$ est vrai pour $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$? Quel est l'analogue de la partie de la courbe de Szegö S qui se trouve à l'exterieur du disque unité ? Comment decrire les domaines sans zéros pour $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitraire ? Pour $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ quels sont des analogues d'autres résultats de [5] liés aux propriétés asymptotiques de $s_n(R_n z, E_{1/\rho}) = I_n(R_n z; 0, E_{1/\rho})$? Notre objectif dans ce travail est de répondré à ces questions.

Notre premier résultat est l'analogue direct du Théorème S de Szegö. On definit la corbe $S_2(\rho)$ par (2.1) et on pose $S(\rho) = S_1(\rho) \cup S_2(\rho)$.

THÉORÈME 1. – *On a les egalités suivant* : (i) $\mathcal{M}_0(0, E_{1/\rho}) = S_1(\rho)$, (ii) $\mathcal{M}_0(1, E_{1/\rho}) = S_2(\rho)$, (iii) $\mathcal{M}_0(\lambda, E_{1/\rho}) = S(\rho)$, *pour* $\lambda \neq 0,1$.

Le Théorème 1 repond à la question de prolongation de la courbe $S_1(\rho)$ à l'exterieur du disque unité. Il implique aussi que tous les zéros de $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ se trouve a l'aproximité de la courbe $S(\rho)$ et de deux rayon $\arg z = \pm\pi/(2\rho)$. Notons que la courbe $S(\rho)$ admet des asymptotes $\arg z = \pm\pi/(2\rho)$ (tandis que la courbe de Szegö S n'a pas d'asymptotes).

Le théorème suivant est concerné par des domaines sans zéros de $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$. Il a été démontré dans [5] dans le cas $\lambda = 0$ ([5], Théorème 5).

THÉORÈME 2. – *Soient δ_1, δ_2 et h des constantes positives. Alors, pour tout n suffisament grand, $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ n'annule pas dans $\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i$, où les domaines Ω_i, $i = 1, \ldots, 5$, sont definies par* (2.2).

Les deux théoremès suivants donnent des informations sur la distribution des zéros de $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ au voisinage des points de la courbe $S(\rho)$.

THÉORÈME 3. – *Quand $n \to \infty$,* (2.3) *est verifié uniformement sur tout ensemble compact du plan ζ.*

THÉORÈME 4. – I. *Soit $\xi = \xi(\phi)$, $0 < \phi < \pi/(2\rho)$ un point fixe sur $S'(\rho) \cup S_2(\rho)$. Soit $\tau = |\zeta|^\lambda \sin(\phi\rho) - \rho\phi$. On definit les suites $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ par* (2.4). *Alors, quand $n \to \infty$,* (2.5) *est verifié uniformement sur tout ensemble compact du plan ζ.*

II. *Soit $\xi = e^{-1/\rho} e^{i\phi}$, $\pi/(2\rho) < \phi \leqslant \pi$, un point fixe sur la portion circulaire $S''(\rho)$ de $S(\rho)$. On definit les suites $\{\tau'_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{\varepsilon'_n\}_{n=1}^\infty$ par* (2.6). *Alors, quand $n \to \infty$,* (2.7) *est verifié uniformement sur tout ensemble compact du plan complexe.*

Le Théorème 3 décrit la distribution des zéros de $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ dans le voisinage du point $z = 1$ et est démontré dans [5] (Théorème 1, p. 10) dans le cas $\lambda = 0$. Les résultats correspondant pour $I_n(nz; 0, e^z) = s_n(nz, e^z)$ et $I_n(nz; 1, e^z) = -t_{n+1}(nz, e^z)$ sont obtenus dans [9] et [11]. Le Théorème 4 peut être consideré comme une generalisation des Théorèmes 2 and 3 de [5]. Ce qui est surprenant, c'est que si on prolonge la courbe $S_1(\rho)$ à l'exterieur du disque unité par la courbe $S_2(\rho)$ qui a la même équation dans les coordonées polaires que $S'(\rho)$, le comportement de $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ dans un voisinage de $S'(\rho)$ et $S_2(\rho)$ est aussi similair.

To cite this article: N. Zheltukhina, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 133–138

Pour étudier le comportement asymptotique de $I_n(R_nz;\lambda, E_{1/\rho})$, on l'écrit sous la forme $I_n(R_nz;\lambda, E_{1/\rho}) = (1-\lambda)E_{1/\rho}(R_nz) - t_{n+1}(R_nz, E_{1/\rho})$. Le comportement asymptotique du premier terme est bien connu. Pour $|z|<1$, le comportement asymptotique du second terme a été étudié dans [5]. Pour $|z|>1$, on utilise la représentation $t_{n+1}(R_nz, E_{1/\rho}) = (R_nz)^{n+1}E_{1/\rho}\big(R_nz, 1+\frac{n+1}{\rho}\big)$, où $E_{1/\rho}(z,\mu)$ est la fonction généralisée de Mittag–Leffler définie (3.4). Cette fonction $E_{1/\rho}(z,\mu)$ admet une représentation integrale commode ([4], p. 127). En appliquant la méthode de Laplace pour l'integral correspondant, on détermine le comportement asymptotique (quand $n\to\infty$) de $t_{n+1}(R_nz, E_{1/\rho})$ à l'exterieur du disque unité.

1. Introduction

For a transcendental entire function

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_0 > 0, \tag{1.1}$$

denote by

$$s_n(z,f) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{and} \quad t_n(z,f) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \tag{1.2}$$

its nth section and nth tail respectively. Denote by $R_1, R_2, R_3, \ldots$ the discontinuity points of the central index of f. One has $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ (see [8, pp. 5–6]). Let $\mathcal{M}_n(\lambda, f)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, be the set of all roots of the equation $I_n(R_nz;\lambda,f)=0$, where

$$I_n(R_nz;\lambda,f) = (1-\lambda)s_n(R_nz,f) - \lambda t_{n+1}(R_nz,f). \tag{1.3}$$

In particular, $\mathcal{M}_n(0,f)$ coincides with the set of zeros of $s_n(R_nz,f)$ and $\mathcal{M}_{n-1}(1,f)$ coincides with the set of zeros of $t_n(R_{n-1}z,f)$. Define $\mathcal{M}(\lambda,f)$ to be the set of all accumulation points of $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{M}_n(\lambda,f)$.

In 1924, Szegö [10] proved a remarkable theorem on the asymptotic behavior of the roots of the equation $I_n(nz;\lambda,\mathrm{e}^z)=0$ (note that $R_n=n$ for $f(z)=\mathrm{e}^z$), wherein the so-called Szegö curve $S:=\{z:|z\,\mathrm{e}^{1-z}|=1\}$ played a key role.

THEOREM S ([10]). – *One has* (i) $\mathcal{M}(0,\mathrm{e}^z) = S\cap\{z:|z|\leqslant 1\}$, (ii) $\mathcal{M}(1,\mathrm{e}^z) = S\cap\{z:|z|\geqslant 1\}$, (iii) $\mathcal{M}(\lambda,\mathrm{e}^z) = S$ *for* $\lambda\neq 0,1$.

In [5], Edrei, Saff and Varga studied the distribution of the zeros of sections $s_n(R_nz, E_{1/\rho})$ of the Mittag–Leffler function of order $\rho>1$,

$$E_{1/\rho}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\Gamma(1+j/\rho)}, \quad 1<\rho<\infty. \tag{1.4}$$

For the function $E_{1/\rho}(z)$ (*see* [7, p. 26]), we have $R_n = \Gamma(1+n/\rho)/\Gamma(1+(n-1)/\rho)$. Consider the main result of [5]. Edrei, Saff and Varga [5] discovered that the zeros of $s_n(R_nz, E_{1/\rho})$ are related with the curve $S_1(\rho) = S'(\rho)\cup S''(\rho)$, where

$$S'(\rho) = \left\{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : r\leqslant 1,\ |\phi|\leqslant\frac{\pi}{2\rho},\ r^{\rho}\cos(\phi\rho) - 1 - \rho\log r = 0\right\}, \tag{1.5}$$

$$S''(\rho) = \left\{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : \frac{\pi}{2\rho} < \phi < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho},\ r = \mathrm{e}^{-1/\rho}\right\}. \tag{1.6}$$

The arguments of the zeros of $E_{1/\rho}(z)$ for $1<\rho<\infty$ tend to $\pm\pi/(2\rho)$ as $|z|\to\infty$. Hence, there are zeros of $s_n(R_nz, E_{1/\rho})$ whose arguments are close to $\pm\pi/(2\rho)$. Denote

$$\mathcal{M}_0(\lambda, E_{1/\rho}) = \mathcal{M}(\lambda, E_{1/\rho})\Big\backslash\left\{z : \arg z = \pm\frac{\pi}{2\rho}\right\}. \tag{1.7}$$

Edrei, Saff and Varga proved the following theorem which is an analogue of part (i) of Theorem S.

THEOREM ESV ([5]). – $\mathcal{M}_0(0, E_{1/\rho}) = S_1(\rho)$.

This theorem is a corollary of much more precise and complicated results of [5] related to the description of zero-free regions for $s_n(R_n z, E_{1/\rho})$. The similarity between the zero distribution of sections of $E_{1/\rho}(z)$ (given by Theorem ESV) and the zero distribution of sections of e^z (given by Theorem S, part (i)) provokes the following questions. Does an analogue of Szegö's result hold for $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$? What is the analogue of the part of Szegö's curve S lying in the exterior of the unit disc? What is the description of zero-free regions for $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ for arbitrary $\lambda \in \mathbb{C}$? Can analogues of other results of [5] related to asymptotic properties of $s_n(R_n z, E_{1/\rho}) = I_n(R_n z; 0, E_{1/\rho})$ be developed for $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$? The aim of our work is to answer these questions.

2. Results

Denote by

$$S(\rho) = S_1(\rho) \cup S_2(\rho), \quad \rho > 1,$$

where

$$S_2(\rho) = \left\{ z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : r \geqslant 1,\ |\phi| \leqslant \frac{\pi}{2\rho},\ r^\rho \cos(\rho\phi) - 1 - \rho \log r = 0 \right\}. \tag{2.1}$$

The first result of our work can be considered as a complete analogue of Szegö's Theorem S.

THEOREM 1. – *One has* (i) $\mathcal{M}_0(0, E_{1/\rho}) = S_1(\rho)$, (ii) $\mathcal{M}_0(1, E_{1/\rho}) = S_2(\rho)$, (iii) $\mathcal{M}_0(\lambda, E_{1/\rho}) = S(\rho)$, *for* $\lambda \neq 0,1$.

Theorem 1 answers the question how to continue the curve $S(\rho)$ into the exterior of the unit disc. It also implies that zeros of $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ may lie only in the vicinity of curve $S(\rho)$ and two rays $\arg z = \pm\pi/(2\rho)$. Note that the curve $S(\rho)$ has asymptotes $\arg z = \pm\pi/(2\rho)$, while the original Szegö curve S does not have any linear asymptote.

For given $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ and $h > 0$, let us introduce the following regions.

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : \delta_1 < r \leqslant 1,\ |z-1| \geqslant \delta_1,\ |\phi| \leqslant \tfrac{\pi}{2\rho} - \delta_2,\ r^\rho \cos(\rho\phi) - 1 - \rho\log r \geqslant 0 \right\},\\
\Omega_2 &= \left\{ z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : |\phi| \leqslant \tfrac{\pi}{2\rho} - \delta_2,\ r^\rho \cos(\rho\phi) - 1 - \rho\log r \leqslant -h \right\},\\
\Omega_3 &= \left\{ z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : r \geqslant \mathrm{e}^{-1/\rho} + h,\ |\phi| \geqslant \tfrac{\pi}{2\rho} + \delta_2 \right\},\\
\Omega_4 &= \left\{ z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : \delta_1 < r \leqslant \mathrm{e}^{-1/\rho} - h,\ |\phi| \geqslant \tfrac{\pi}{2\rho} + \delta_2 \right\},\\
\Omega_5 &= \left\{ z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : r \geqslant 1,\ |\phi| \leqslant \tfrac{\pi}{2\rho} - \delta_2,\ r^\rho \cos(\rho\phi) - 1 - \rho\log r \geqslant h \right\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

The next theorem deals with the zero-free regions of $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$.

THEOREM 2. – *Let* δ_1, δ_2 *and* h *be given positive constants. Then, for all sufficiently large* n, $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ *has no zeros in* $\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i$.

Theorem 2 can be viewed as an extension of Theorem 5 of [5].

The next two theorems give information on the zero distribution of $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ in the neighborhood of points on the curve $S(\rho)$. The distribution in the neighborhood of the point $z = 1$ is characterized by the use of the complementary error function,

$$\operatorname{erfc}(\zeta) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\zeta \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v.$$

THEOREM 3. – *As* $n \to \infty$, *we have*

$$\left(1 + \left(\frac{2}{\rho n}\right)^{1/2}\zeta\right)^{-n} \left\{E_{1/\rho}(R_n)\right\}^{-1} I_n\left(R_n\left(1 + \left(\frac{2}{\rho n}\right)^{1/2}\zeta\right); \lambda, E_{1/\rho}\right) \to \mathrm{e}^{\zeta^2}\left\{\frac{\operatorname{erfc}(\zeta)}{2} - \lambda\right\} \tag{2.3}$$

uniformly on every compact set of the ζ-plane.

Theorem 3 can be viewed as an extension of Theorem 1 of [5]. The proof of Theorem 3 is based on the well-known asymptotic expression for Mittag–Leffler function of order $\rho > 1$ and Theorem 1 from [5].

THEOREM 4. – I. *Let $\xi = \xi(\phi)$, $0 < \phi < \frac{\pi}{2\rho}$, be a fixed point on $S'(\rho) \cup S_2(\rho)$. Let $\tau = |\zeta|^\lambda \sin(\phi\rho) - \rho\phi$, and let the sequences $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ and $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ be defined by the conditions*

$$\tau_n \equiv \frac{\tau}{\rho} n (\operatorname{mod} 2\pi), \quad -\pi < \tau_n \leqslant \pi, \quad \textit{and} \quad \varepsilon_n = \frac{\log n}{2(1-\xi^\rho)n} - \frac{\zeta - \mathrm{i}\tau_n}{(1-\xi^\rho)n}. \tag{2.4}$$

Then, as $n \to \infty$,

$$\frac{I_n(R_n\xi(1+\varepsilon_n); \lambda, E_{1/\rho})\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^n \xi^n (1+\varepsilon_n)^n} \to \begin{cases} (1-\lambda)(2\pi\rho)^{1/2} \mathrm{e}^{(\rho+1)/(2\rho)(\xi^\rho - 1)} \mathrm{e}^\zeta - \dfrac{\xi}{1-\xi} & \textit{if } |\xi| < 1, \\ -\lambda(2\pi\rho)^{1/2} \mathrm{e}^{(\rho+1)/(2\rho)(\xi^\rho - 1)} \mathrm{e}^\zeta - \dfrac{\xi}{1-\xi} & \textit{if } |\xi| > 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

uniformly on every compact set of the ζ-plane.

II. *Let $\xi = \mathrm{e}^{-1/\rho} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $\frac{\pi}{2\rho} < \phi \leqslant \pi$, be a fixed point on $S''(\rho)$, and let the sequences $\{\tau'_n\}_{n=1}^\infty$ and $\{\varepsilon'_n\}_{n=1}^\infty$ be defined by the conditions*

$$\tau'_n \equiv (n+1)\phi (\operatorname{mod} 2\pi), \quad -\pi < \tau'_n \leqslant \pi, \quad \textit{and} \quad \varepsilon'_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho}\right)\frac{\log n}{n} - \frac{\zeta - \mathrm{i}\tau'_n}{n+1}. \tag{2.6}$$

Then

$$I_n\big(R_n\xi(1+\varepsilon'_n); \lambda, E_{1/\rho}\big)\frac{\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^n\xi^n(1+\varepsilon'_n)^n} \to \frac{(\lambda-1)(2\pi\,\mathrm{e}^{(1-\rho)/\rho})^{1/2}}{\rho^{1/2-1/\rho}\Gamma(1-1/\rho)} \mathrm{e}^{-\zeta} - \frac{\xi}{1-\xi} \tag{2.7}$$

uniformly on every compact set of the ζ-plane.

It is worth mentioning that the arguments of I_n in Theorem 4 are the same as in Theorems 2 and 3 of [5].

3. Method of proof

The basis of our study is the following theorem that deals with the asymptotic expressions for $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ in different domains of $\mathbb{C}$.

THEOREM A. – *Let δ_1, δ_2 be given positive constants, and $\rho > 1$. Then, as $n \to \infty$,*

$$\frac{I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^n z^n} = -\lambda\rho \frac{\mathrm{e}^{R_n^\rho z^\rho}\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^n z^n}\big(1+\mathrm{o}(1)\big) - \frac{z}{1-z}\big(1+\mathrm{o}(1)\big), \tag{3.1}$$

$$\textit{if} \quad z \in \left\{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : r \geqslant 1,\ |\phi| \leqslant \frac{\pi}{2\rho},\ |z-1| \geqslant \delta_1\right\},$$

$$\frac{I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^n z^n} = (1-\lambda)\rho \frac{\mathrm{e}^{R_n^\rho z^\rho}\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^n z^n}\big(1+\mathrm{o}(1)\big) - \frac{z}{1-z}\big(1+\mathrm{o}(1)\big), \tag{3.2}$$

$$\textit{if} \quad z \in \left\{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : \delta_1 < r \leqslant 1,\ |\phi| \leqslant \frac{\pi}{2\rho},\ |z-1| \geqslant \delta_1\right\},$$

$$\frac{I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^n z^n} = \frac{(\lambda-1)}{\Gamma(1-1/\rho)} \frac{\Gamma(1+n/\rho)}{R_n^{n+1} z^{n+1}}\big(1+\mathrm{o}(1)\big) - \frac{z}{1-z}\big(1+\mathrm{o}(1)\big), \tag{3.3}$$

$$\textit{if} \quad z \in \left\{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} : r > \delta_1,\ |\phi| \geqslant \frac{\pi}{2\rho} + \delta_2\right\}.$$

In all expressions above, $\mathrm{o}(1)$ *is uniform with respect to* z.

We remark that, in the special case $\lambda = 1$, $|z| < 1$, one can find the asymptotic expression for $I_n(R_n z; 1, E_{1/\rho})$ in [5, Lemma 9.2].

Theorems 1, 2 and 4 can be derived from Theorem A. The proof of Theorem A consists of three steps.

Step 1. We rewrite $I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho})$ as follows

$$\begin{aligned} I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho}) &= (1-\lambda)E_{1/\rho}(R_n z) - t_{n+1}(R_n z, E_{1/\rho}) \\ &= (1-\lambda)E_{1/\rho}(R_n z) - (R_n z)^{n+1} E_{1/\rho}\left(R_n z; 1 + \frac{n+1}{\rho}\right), \end{aligned}$$

where

$$E_{1/\rho}(z,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)\right\}^{-1} z^k, \quad \rho > 0,\ \mu \in \mathbb{C}, \tag{3.4}$$

is a generalized Mittag–Leffler function studied by Djrbashian in [4, p. 117].

Step 2. Using a well-known asymptotic expression for $E_{1/\rho}(R_n z)$ and an integral representation (*see* [4]) for $E_{1/\rho}(R_n z, 1 + (n+1)/\rho)$, we get the following expressions for $I_n(R_n z, \lambda, E_{1/\rho})$:

$$I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho}) = -\lambda\rho\, \mathrm{e}^{R_n^\rho z^\rho}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big) - \frac{\rho (R_n z)^{n+1}}{2\pi \mathrm{i}} \int_{L(\pi/(2\rho)+\delta_2/2, R_n)} \frac{\mathrm{e}^{\zeta^\rho}\zeta^{-(n+1)}}{\zeta - R_n z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

if $|z| > 1$ and $|\arg z| \leqslant \pi/(2\rho)$,

$$I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho}) = \frac{(\lambda - 1)}{R_n z \Gamma(1 - 1/\rho)}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big) - \frac{\rho (R_n z)^{n+1}}{2\pi \mathrm{i}} \int_{L(\pi/(2\rho)+\delta_2/2, R_n)} \frac{\mathrm{e}^{\zeta^\rho}\zeta^{-(n+1)}}{\zeta - R_n z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

if $|z| > 0$ and $|\arg z| > \pi/(2\rho) + \delta_2/(2\rho)$,

$$I_n(R_n z; \lambda, E_{1/\rho}) = (1-\lambda)\rho\, \mathrm{e}^{R_n^\rho z^\rho}\big(1 + \mathrm{o}(1)\big) - \frac{\rho (R_n z)^{n+1}}{2\pi \mathrm{i}} \int_{L(\pi/(2\rho)+\delta_2/2, R_n)} \frac{\mathrm{e}^{\zeta^\rho}\zeta^{-(n+1)}}{\zeta - R_n z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

if $0 < |z| < 1$ and $|\arg z| \leqslant \pi/(2\rho)$,

where $L(\alpha, H)$ $(H > 0,\ 0 < \alpha \leqslant \pi)$ is a contour following nondecreasing direction of $\arg\zeta$ and consisting of two rays $\{\arg\zeta = \pm\alpha,\ |\zeta| \geqslant H\}$ and an arc $\{-\alpha \leqslant \arg\zeta \leqslant \alpha\}$ of a circle $|\zeta| = H$.

Step 3. We show that the main contribution to

$$K_n(z) := \int_{L(\pi/(2\rho)+\delta_2/2, R_n)} \frac{\mathrm{e}^{\zeta^\rho}\zeta^{-(n+1)}}{\zeta - R_n z}\,\mathrm{d}\zeta$$

comes from the neighborhood of the point $\zeta = R_n$, and we find an asymptotic expression for $K_n(z)$ by using Laplace's method.

Acknowledgements. The author is grateful to Professors I.V. Ostrovskii and C.Y. Yıldırım for constant attention to this work and for useful discussions.

References

[1] J.D. Buckholtz, A characteriation of the exponential series, Part II, Amer. Math. Monthly 73 (1966) 121–123.
[2] A.J. Carpenter, R.S. Varga, J. Waldvogel, Asymptotics for the partial sums of e^z, I, Rocky Mountain J. Math. 21 (1) (1991) 99–120.
[3] J. Dieudonné, Sur les zéros des polynomes-sections de e^x, Bull Soc. Math. France 70 (1935) 333–351.
[4] M.M. Djrbashian, Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain, Nauka, Moskow, 1966 (in Russian).
[5] A. Edrei, E.B. Saff, R.S. Varga, Zeros of sections of power series, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1002, 1983, pp. 1–115.
[6] I.V. Ostrovskii, On zero distribution of sections and tails of power series, Israel Math. Conf. Proc. 15 (2001) 297–310.
[7] G. Pólya, G. Szegö, Problems and Theorems in Analysis, I, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
[8] G. Pólya, G. Szegö, Problems and Theorems in Analysis, II, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
[9] D.J. Newman, T.J. Rivlin, The zeros of the partial sums of the exponential function, J. Approx. Theory 5 (1972) 405–412.
[10] G. Szegö, Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellsch. 23 (1924) 50–64.
[11] C.Y. Yıldırım, A sum over the zeros of partial sums of e^z, J. Ramanujan Math. Soc. 6 (1, 2) (1991) 51–66.