C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 259–262

Topologie/*Topology*

Espaces productivement de Fréchet

Francis Jordan, Frédéric Mynard

Department of Mathematics, Hume Hall, University of Mississippi, University, MS 38677, USA

Reçu le 28 mai 2002 ; accepté le 3 juin 2002

Note présentée par Gustave Choquet.

Résumé Les espaces topologiques dont le produit avec chaque espace fortement de Fréchet est de Fréchet sont caractérisés de façon interne. Ceci résout un problème resté longtemps ouvert. ***Pour citer cet article : F. Jordan, F. Mynard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 259–262.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Productively Fréchet spaces

Abstract The class of topological spaces whose product with every strongly Fréchet space is also Fréchet is characterized internally. This solves a long standing problem. ***To cite this article: F. Jordan, F. Mynard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 259–262.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Un espace topologique X est dit *de Fréchet* si pour tout point x et tout sous-ensemble A tel que $x \in \operatorname{cl} A$, il existe une suite dans A qui converge vers x. Cette propriété n'est pas stable par produit, même si les facteurs sont des espaces compacts de Fréchet. Par exemple le produit de deux espaces compacts de Fréchet n'est pas forcément de Fréchet [19]. Aussi la recherche de conditions sur un couple (X, Y) d'espaces de Fréchet pour que le produit $X \times Y$ soit de Fréchet a-t-elle mobilisée beaucoup d'attention depuis des années [1,2,5–10,12–16,19,20].

Il est bien connu que si le produit de deux espaces de Fréchet contenant chacun une suite libre ($x_n \neq x_p$ pour $p \neq n$) est de Fréchet, alors chaque facteur est *fortement de Fréchet*, c'est-à-dire que si une suite décroissante de sous-ensembles A_n admet x comme point d'adhérence, il existe une suite $x_n \in A_n$ qui converge vers x. Aussi la classe d'espaces dont le produit avec chaque espace de Fréchet est de Fréchet, est-elle triviale. Plus précisement, c'est la classe des espaces finiment engendrés [1] [11], qui est triviale dans la mesure où tout espace finiment engendré et séparé est discret. Il est donc naturel de chercher à caractériser les espaces dont le produit avec chaque espace fortement de Fréchet est de Fréchet. Plusieurs résultats dans ce sens ont été obtenus par le passé.

Avant d'énoncer ces résultats, reformulons la définition d'un espace fortement de Fréchet. Deux familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de sous-ensembles *se grillent* si $A \cap B \neq \emptyset$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{B}$. On écrit alors $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$. En considérant la classe φ_ω des filtres à base dénombrable, on peut définir deux types d'adhérence pour un filtre $\mathcal{F}$:

$$\operatorname{adh} \mathcal{F} = \bigcup_{\mathcal{G}\#\mathcal{F}} \lim \mathcal{G}, \qquad \operatorname{adh}_{\mathrm{First}} \mathcal{F} = \bigcup_{\varphi_\omega \ni \mathcal{H}\#\mathcal{F}} \lim \mathcal{H}.$$

Adresses e-mail : fjordan@olemiss.edu (F. Jordan); mynard@olemiss.edu (F. Mynard).

S1631-073X(02)02473-1/FLA

Il est clair qu'un espace est fortement de Fréchet si et seulement si

$$\operatorname{adh} \mathcal{F} \subset \operatorname{adh}_{\mathrm{First}} \mathcal{F}, \tag{1}$$

pour tout filtre $\mathcal{F}$ à base dénombrable.

Un espace est *biséquentiel* si (1) est vrai pour tout filtre $\mathcal{F}$. E. Michael a montré que

THÉORÈME 1 [10, Proposition 4.D.4]. – *Le produit d'un espace biséquentiel et d'un espace fortement de Fréchet est fortement de Fréchet.*

Les deux résultats connus les plus significatifs sont dûs à A.V. Arhangel'skiĭ d'une part, S. Dolecki et T. Nogura d'autre part.

THÉORÈME 2 [1, Proposition 6.27]. – *Le produit d'un espace $\aleph_0$-biséquentiel*[2] *et d' un espace fortement de Fréchet est fortement de Fréchet.*

THÉORÈME 3 [5, Theorem 4]. – *Le produit d'un espace de Fréchet régulier, q et β_3*[3] *avec un espace fortement de Fréchet est fortement de Fréchet.*

Cependant aucune caractérisation des espaces dont le produit avec chaque espace fortement de Fréchet est de Fréchet n'était connue.

Afin d'obtenir une telle caractérisation, nous interprétons la notion d'espace fortement de Fréchet en termes de propriété ensembliste des filtres de voisinage. Un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble X est dit *fortement de Fréchet* [4] si pour tout filtre $\mathcal{H}$ à base dénombrable tel que $\mathcal{H}\#\mathcal{F}$, il existe un filtre $\mathcal{L}$ à base dénombrable plus fin que $\mathcal{F} \vee \mathcal{H}$. Un espace est fortement de Fréchet si tous ses filtres de voisinages sont fortement de Fréchet.

Un espace est *productivement de Fréchet* si (1) est vrai pour chaque filtre fortement de Fréchet. Un filtre à base dénombrable étant fortement de Fréchet, tout espace productivement de Fréchet est en particulier fortement de Fréchet. Par ailleurs, les espaces biséquentiels sont clairement productivement de Fréchet.

Il est possible de montrer de façon directe que les espaces $\aleph_0$-biséquentiels et les espaces de Fréchet qui sont réguliers β_3 et q, sont productivement de Fréchet. Cependant, ce sont des conséquences de notre résultat principal.

THÉORÈME 4. – *Pour qu'un espace soit productivement de Fréchet il faut et il suffit que son produit avec chaque espace fortement de Fréchet soit de Fréchet* (*de façon équivalente, fortement de Fréchet*).

La preuve est basée sur l'utilisation de filtres de relations. Plus précisement, si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, $\mathcal{G}$ un filtre sur Y et $\mathcal{H}$ un filtre sur $X \times Y$, on définit le filtre $\mathcal{H}\mathcal{F}$ engendré sur Y par les les ensembles $HF = \{y \in Y : \exists x \in F,\ (x, y) \in H\}$ pour $H \in \mathcal{H}$ et $F \in \mathcal{F}$. De même, on considère le filtre $\mathcal{H}^-\mathcal{G}$ sur X engendré par les ensembles $H^-G = \{x \in X : \exists y \in G,\ (x, y) \in H\}$ pour $H \in \mathcal{H}$ et $G \in \mathcal{G}$. On a alors

$$(\mathcal{F} \times \mathcal{G})\#\mathcal{H} \iff \mathcal{H}\mathcal{F}\#\mathcal{G} \iff \mathcal{H}^-\mathcal{G}\#\mathcal{F}.$$

Esquisse de preuve. – Si X n'est pas productivement de Fréchet, alors il existe un filtre $\mathcal{F}$ fortement de Fréchet et un point x_0 tel que $x_0 \in \operatorname{adh} \mathcal{F} \setminus \operatorname{adh}_{\mathrm{First}} \mathcal{F}$. L'espace topologique Y obtenu à partir de l'ensemble X en déclarant tous les points sauf x_0 isolés et pour lequel $\mathcal{N}_Y(x_0) = \mathcal{F} \wedge (x_0)$ est fortement de Fréchet. Mais $X \times Y$ n'est pas de Fréchet car $(x_0, x_0) \in \operatorname{cl}_{X\times Y}\{(x, x) : x \neq x_0\}$, mais aucun filtre à base dénombrable (a fortiori aucune suite) sur $\{(x, x) : x \neq x_0\}$ ne converge vers (x_0, x_0).

Réciproquement, supposons X productivement de Fréchet et Y fortement de Fréchet. Soit $\mathcal{H}$ un filtre à base dénombrable tel que $(x, y) \in \operatorname{adh}_{X\times Y} \mathcal{H}$, c'est-à-dire, $(\mathcal{N}_X(x) \times \mathcal{N}_Y(y))\#\mathcal{H}$. Le filtre $\mathcal{N}_Y(y)$ est fortement de Fréchet, et l'on peut vérifier que $\mathcal{H}^-\mathcal{N}_Y(y)$ l'est aussi. Comme X est productivement de Fréchet et $\mathcal{H}^-\mathcal{N}_Y(y)\#\mathcal{N}_X(x)$, il existe un filtre $\mathcal{G}$ à base dénombrable tel que $x \in \lim_X \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}\#\mathcal{H}^-\mathcal{N}_Y(y)$. Comme $\mathcal{H}\mathcal{G}$ est un filtre à base dénombrable qui grille $\mathcal{N}_Y(y)$ et Y est fortement de Fréchet, il existe un filtre $\mathcal{L}$ à base dénombrable plus fin que $\mathcal{HG} \vee \mathcal{N}_Y(y)$. Le filtre $\mathcal{G} \times \mathcal{L}$ est à base dénombrable, grille $\mathcal{H}$, et converge vers (x, y) pour $X \times Y$. □

COROLLAIRE 5. – *Un produit de deux espaces productivement de Fréchet est productivement de Fréchet.*

En effet, si X et Y sont productivement de Fréchet et si W est fortement de Fréchet, alors l'espace produit $(X \times Y) \times W$ est fortement de Fréchet, puisque $Y \times W$ l'est en vertu du Théorème 4, si bien que $X \times (Y \times W)$ l'est également, par le même argument. En appliquant la partie réciproque de ce même théorème, on conclut que $X \times Y$ est productivement de Fréchet.

Le Théorème 4 généralise strictement les résultats de Arhangel'skiĭ et de Dolecki et Nogura. En effet, un Σ-produit d'un nombre non dénombrable de copies de la droite réelle est un exemple d'espace productivement de Fréchet qui n'est ni biséquentiel ni q. Par ailleurs, l'espace construit par P. Nyikos [17, Example 3.8] est productivement de Fréchet et fournit un exemple (sous l'hypothèse $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ [4] indépendante des axiomes ZFC) d'espace productivement de Fréchet qui n'est pas α_3, [5] donc pas $\aleph_0$-biséquentiel.

---

[1] Un espace est *finiment engendré* si tout point admet un plus petit voisinage.

[2] Un espace topologique X complètement régulier est $\aleph_0$-*biséquentiel* si tous ses sous-espaces dénombrables sont biséquentiels et si pour chaque $x \in X$ et $C \subset \bigcup_{B \subset X,\ |B| \leqslant \aleph_0} \mathrm{cl}_{bX} B$ (bX étant une compactification de X) tels que $x \in \mathrm{cl}_{bX} C$, il existe un sous-ensemble dénombrable D de C tel que $x \in \mathrm{cl}_{bX} D$ [1].

[3] Un espace topologique est dit q si chaque point admet une suite $(Q_n)_{n\in\omega}$ de voisinages telle que chaque suite $x_n \in Q_n$ soit d'adhérence non vide. Une topologie est β_3 [5] si pour chaque bisuite libre ($x_n \neq x$)

$$x_{n,k} \underset{k}{\to} x_n \underset{n}{\to} x,$$

il existe un sous-ensemble compact métrisable C de $\{x\} \cup \{x_n : n \in \omega\} \cup \{x_{n,k} : n,\ k \in \omega\}$ tel que $|\{n : |C \cap \{x_{n,k} : k \in \omega\}| = \omega\}| = \omega$.

[4] $\mathbf{b}$ est la cardinalité minimale d'une famille non $<^*$-bornée de fonctions de ω dans ω, la relation $<^*$ étant définie par $f <^* g \Leftrightarrow \exists n : \forall k \geqslant n,\ f(k) < g(k)$.

[5] Un espace est α_3 si pour toute bi-suite stationnaire $x_{n,k} \to x$, il existe une suite $(x_{n_p,k_p})_{p\in\omega}$ qui converge vers x telle que $|\{n : |\{k_p : n_p = n\}| = \omega\}| = \omega$.

Références bibliographiques

[1] A.V. Arhangel'skii, The frequency spectrum of a topological space and the product operation, Trans. Moscow Math. Soc. 40 (1981) 163–200.
[2] C. Costantini, P. Simon, An α_4, not Fréchet product of α_4 Fréchet spaces, Topology Appl. 108 (1) (2000) 43–52.
[3] S. Dolecki, Convergence-theoretic methods in quotient quest, Topology Appl. 73 (1996) 1–21.
[4] S. Dolecki, Active boundaries of upper semi-continuous and compactoid relations; closed and inductively perfect maps, Rostock. Math. Kollog. 54 (2000) 3–20.
[5] S. Dolecki, T. Nogura, Two-fold theorem on Fréchetness of products, Czech. Math. J. 49 (2) (1999) 421–429.
[6] E. van Douwen, The product of a Fréchet space and a metrizable space, Topology Appl. 47 (3) (1992) 163–164.
[7] J. Gerlits, Z. Nagy, On Fréchet spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 18 (1988) 51–71.
[8] G. Gruenhage, A note on the product of Fréchet spaces, Topology Proc. 3 (1) (1979) 109–115.
[9] C. Kendrick, On product of Fréchet spaces, Math. Nachr. 65 (1975) 117–123.
[10] E. Michael, A quintuple quotient quest, Gen. Topology Appl. 2 (1972) 91–138.
[11] F. Mynard, Coreflectively modified continuous duality applied to classical product theorems, Appl. Gen. Top. 2 (2) (2001) 119–154.
[12] T. Nogura, Product of Fréchet spaces, in: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI, Proc. Prague Topological Sympos., Vol. 86, 1988, pp. 371–378.
[13] T. Nogura, A counterexample for a problem of Arhangel'skiĭ concerning the product of Fréchet spaces, Topology Appl. 25 (1987) 75–80.

[14] J. Novák, Double convergence and products of Fréchet spaces, Czech. Math. J. 48 (2) (1998) 207–227.
[15] J. Novák, A note on product of Fréchet spaces, Czech. Math. J. 47 (2) (1997) 337–340.
[16] J. Novák, Concerning the topological product of two Fréchet spaces, in: General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV, Proc. Fourth Prague Topological Sympos., 1977, pp. 342–343.
[17] P. Nyikos, Classes of compact sequential spaces, in: Set Theory and its Applications, Toronto, ON 1987, Lecture Notes in Math., Vol. 1401, 1989, pp. 135–159.
[18] R.C. Olson, Biquotient maps, countably bisequential spaces and related topics, Topology Appl. 4 (1974) 1–28.
[19] P. Simon, A compact Fréchet space whose square is not Fréchet, Comment. Math. Univ. Carolin. 21 (1980) 749–753.
[20] K. Tamano, Product of compact Fréchet spaces, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 62 (8) (1986) 304–307.