C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 341–344

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Méthode des sur et sous solutions pour la résolution d'un problème de type Neuman faisant intervenir le p-Laplacien

Mélissa Motron

Université de Cergy-Pontoise, Département de mathématiques, site de Saint-Martin, 2, avenue Adolphe Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France

Reçu le 25 mars 2002 ; accepté le 15 mai 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé Soient Ω un domaine borné, régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et p un réel dans $]1; N[$. On présente ici une méthode pour prouver l'existence d'une solution à un problème de type Neuman faisant intervenir le p-Laplacien. Celle-ci permet de construire une solution de l'équation concernée à partir d'une sur et d'une sous solution du problème. ***Pour citer cet article : M. Motron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 341–344.***

Super- and sub-solutions method for the existence of a solution to a Neuman problem involving the p-Laplacian

Abstract Let Ω be a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) and p be a real in $]1; N[$. We present here a method for proving the existence of a solution to a Neuman problem involving the p-Laplacian. This one enables us to build a solution from a super- and a sub-solution to the problem. ***To cite this article: M. Motron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 341–344.***

Soient Ω un domaine borné, régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), $p \in]1; N[$ un réel et p' son conjugué, à savoir tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On considère les applications $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par :

$$g(x,t) = a(x)|t|^{q-2}t + b(x)|t|^{p-2}t, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et presque tout } x \in \Omega,$$

$$f(x,t) = c(x)|t|^{r-2}t + d(x)|t|^{p-2}t, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et presque tout } x \in \partial\Omega,$$

avec $q > p$, $r > p$, $a, b \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $c, d \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega)$.

On s'intéresse au problème suivant : trouver une fonction $u \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta_p u = g(\cdot, u) & \text{dans } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \vec{n} = f(\cdot, u) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{E}$$

Adresse e-mail : motron@math.u-cergy.fr (M. Motron).

S1631-073X(02)02475-5/FLA

où $\vec{n}$ désigne le vecteur normal unitaire extérieur en un point de $\partial\Omega$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ et $|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\vec{n}$ est défini par

$$\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\vec{n}\varphi\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\Delta_p u\varphi\,\mathrm{d}x\quad\text{pour tout }\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

Précisons quelques définitions.

DÉFINITION 0.1. –

– Une solution (faible) de (E) est une fonction $u\in W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\quad\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}g(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}f(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x.$$

– Une sur solution (faible) de (E) est une fonction $u\in W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\ \varphi\geqslant 0,\quad\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{\Omega}g(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}f(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x.$$

– Une sous solution (faible) de (E) est une fonction $u\in W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}),\ \varphi\geqslant 0,\quad\int_{\Omega}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}g(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}f(x,u)\varphi\,\mathrm{d}x.$$

On peut alors énoncer le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME 0.2. – *Soient m et M des constantes. Supposons que* (E) *possède une sous solution $\underline{u}$ et une sur solution $\overline{u}$ telles que*

$$m\leqslant\underline{u}\leqslant\overline{u}\leqslant M,\quad\textit{p.p. dans }\Omega.$$

Alors il existe $u\in W^{1,p}(\Omega)$ solution (*faible*) *de* (E) *qui satisfait à $\underline{u}\leqslant u\leqslant\overline{u}$ p.p. dans* Ω.

Remarque 1. – On pourrait étendre le résultat à d'autres types de fonctions g et f, la preuve qui suit pouvant se généraliser aisément.

Ce résultat peut s'utiliser afin de prouver l'existence d'une solution pour des problèmes faisant intervenir des fonctionnelles non coercives, comme cela est fait par exemple dans l'article de Birindelli et Demengel [1], de Wigniolle [5]. La preuve du théorème présentée dans [5] suit les arguments de Struwe [4] : une solution est donnée par un problème de minimisation avec contrainte. Pour celle proposée ici, un argument clef est le principe de comparaison pour des équations faisant intervenir le p-Laplacien, cette méthode s'inspirant de Hebey [3] où le cadre est celui d'une variété Riemannienne compacte et où $p=2$ (*voir* Druet [2] pour le cas où $p\in]1;N[$).

Démontrons le Théorème 0.2. – Fixons $k>0$ (resp. $K>0$) assez grand pour que la fonction $t\mapsto G(x,t):=g(x,t)+k|t|^{p-2}t$ (resp. $t\mapsto F(x,t):=f(x,t)+K|t|^{p-2}t$) soit croissante sur $[m;M]$ pour presque tout $x\in\Omega$ (resp. $x\in\partial\Omega$).

Etape 1 : On montre qu'il existe une fonction $u_1\in W^{1,p}(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases}-\Delta_p u_1+k|u_1|^{p-2}u_1=G(\cdot,\overline{u}) & \text{dans }\Omega,\\ |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\cdot\vec{n}+K|u_1|^{p-2}u_1=F(\cdot,\overline{u}) & \text{sur }\partial\Omega\end{cases}\tag{E1}$$

telle que $\underline{u}\leqslant u_1\leqslant\overline{u}$ p.p. dans Ω.

Par des arguments classiques, on prouve qu'une suite minimisante pour

$$\inf_{v\in W^{1,p}(\Omega)}\left\{\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla v|^p\,\mathrm{d}x+\frac{k}{p}\int_{\Omega}|v|^p\,\mathrm{d}x+\frac{K}{p}\int_{\partial\Omega}|v|^p\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}G(x,\overline{u})v\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}F(x,\overline{u})v\,\mathrm{d}x\right\}$$

converge (à une sous-suite près) vers u_1 solution de (E1).

Pour montrer que $\underline{u} \leqslant u_1 \leqslant \overline{u}$ p.p. dans Ω, on utilise la proposition suivante (principe de comparaison faible qui est un résultat classique) :

PROPOSITION 0.3. – *Soient $A, B \in \mathbb{R}_+^*$, $\nu \geqslant p$, $\mu \geqslant p$ et $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On suppose que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi \geqslant 0$, on a*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + A\int_\Omega |u|^{\nu-2}u\varphi\,\mathrm{d}x + B\int_{\partial\Omega}|u|^{\mu-2}u\varphi\,\mathrm{d}x\\ &\quad\leqslant \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + A\int_\Omega |v|^{\nu-2}v\varphi\,\mathrm{d}x + B\int_{\partial\Omega}|v|^{\mu-2}v\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Alors $u \leqslant v$ p.p. dans Ω.

On conclut comme suit. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi \geqslant 0$. On pose, pour $v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\langle I(v), \varphi\rangle = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x + k\int_\Omega |v|^{p-2}v\varphi\,\mathrm{d}x + K\int_{\partial\Omega}|v|^{p-2}v\varphi\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant le fait que u_1 est une solution de (E1), $\overline{u}$ une sur solution de (E) et que F et G sont croissantes par rapport à la 2ème variable, on peut écrire

$$\langle I(\underline{u}), \varphi\rangle \leqslant \langle I(u_1), \varphi\rangle \leqslant \langle I(\overline{u}), \varphi\rangle,$$

ce qui prouve, par la Proposition 0.3, que $\underline{u} \leqslant u_1 \leqslant \overline{u}$ p.p. dans Ω.

Etape 2 : En utilisant la croissance de F et G, on remarque que u_1 est une sur solution de (E), ce qui permet de trouver, par la même méthode que dans l'étape 1, une fonction $u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta_p u_2 + k|u_2|^{p-2}u_2 = G(\cdot, u_1) & \text{dans } \Omega,\\ |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \cdot \vec{n} + K|u_2|^{p-2}u_2 = F(\cdot, u_1) & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}\tag{E2}$$

avec $\underline{u} \leqslant u_2 \leqslant u_1$ p.p. dans Ω.

Etape 3 : En itérant le procédé, on peut construire une suite $(u_i) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de sur solutions de (E) vérifiant, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u_i + k|u_i|^{p-2}u_i = G(\cdot, u_{i-1}) & \text{dans } \Omega,\\ |\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i \cdot \vec{n} + K|u_i|^{p-2}u_i = F(\cdot, u_{i-1}) & \text{sur } \partial\Omega.\end{cases}\tag{Ei}$$

avec $\underline{u} \leqslant u_i \leqslant u_{i-1} \leqslant \overline{u}$ p.p. dans Ω (en posant par convention $u_0 = \overline{u}$). On vérifie aisément que (u_i) est une suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ donc, quitte à extraire une sous-suite, elle converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ et presque partout vers une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$. De façon évidente, on a $\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u}$ p.p. dans Ω. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Par (Ei), on peut écrire pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x + k\int_\Omega |u_i|^{p-2}u_i\varphi\,\mathrm{d}x + K\int_{\partial\Omega}|u_i|^{p-2}u_i\varphi\,\mathrm{d}x\\ &\quad= \int_\Omega G(x, u_{i-1})\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} F(x, u_{i-1})\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{Ei$'$}$$

En faisant tendre i vers $+\infty$ dans cette égalité, on va vérifier que u est solution du problème (E). Le seul terme délicat est $\lim_{i\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{d}x$. On remarque tout d'abord que $(|\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i)$ étant bornée dans $L^{p'}(\Omega)$, cette suite converge faiblement (à une sous suite près) vers une fonction $\sigma \in L^{p'}(\Omega)$. Ensuite, en multipliant la première équation de (Ei) par $u_i\varphi$ et en intégrant sur Ω on obtient (grâce à la formule de Green)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (\sigma_i \cdot \nabla\varphi)u_i\,\mathrm{d}x + k\int_\Omega |u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x + K\int_{\partial\Omega}|u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x\\ &\quad= \int_\Omega G(x, u_{i-1})u_i\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} F(x, u_{i-1})u_i\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

où $\sigma_i = |\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i$, ce qui donne (en passant à la limite)

$$\lim_{i\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\sigma\cdot\nabla\varphi)u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega g(x,u)u\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f(x,u)u\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

D'autre part, on fait tendre i vers $+\infty$ dans (Ei) pour obtenir au sens des distributions :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\sigma &= g(\cdot,u),\\ \sigma\cdot\vec{n} &= f(\cdot,u), \end{aligned} \tag{2}$$

où $\sigma\cdot\vec{n}$ est définie par : $\langle\sigma\cdot\vec{n},\psi\rangle = \int_\Omega(\operatorname{div}\sigma)\psi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sigma\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}x,\ \forall\psi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

En multipliant (2) par $u\varphi$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega(\sigma\cdot\nabla\varphi)u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega(\sigma\cdot\nabla u)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x,u)u\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f(x,u)u\varphi\,\mathrm{d}x$$

et en combinant avec (1), on a alors

$$\lim_{i\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega(\sigma\cdot\nabla u)\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Par ailleurs, si $\varphi\geqslant 0$, par l'inégalité de Hölder et par (3) on a

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to+\infty}\int_\Omega|\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_\Omega|\sigma|^{p'}\varphi\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\varphi\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\ &\leqslant \liminf_{i\to+\infty}\left(\int_\Omega|\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\varphi\,\mathrm{d}x\right)^{1/p},\end{aligned}$$

ce qui donne $\limsup_{i\to+\infty}\int_\Omega|\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega|\nabla u|^p\varphi\,\mathrm{d}x$. Puisque l'on a toujours $\int_\Omega|\nabla u|^p\varphi\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{i\to+\infty}\int_\Omega|\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x$, on obtient alors $\lim_{i\to+\infty}\int_\Omega|\nabla u_i|^p\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega|\nabla u|^p\varphi\,\mathrm{d}x$, qui est encore valable si φ est de signe quelconque. En comparant ce dernier résultat à l'égalité (3), on aboutit à $\sigma\cdot\nabla u = |\nabla u|^p$, et par suite $\sigma = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$.

Ainsi, en passant à la limite dans (Ei′), on obtient que u est solution de (E).

Références bibliographiques

[1] I. Birindelli, F. Demengel, On some partial differential equation for non coercive functional and critical Sobolev exponent, Adv. Differential Equations, 2000, accepté.

[2] O. Druet, Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 130 (2000) 767–788.

[3] E. Hebey, Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés, Diderot, 1997.

[4] M. Struwe, Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer-Verlag, 1996.

[5] J. Wigniolle, Existence and non existence results for Neuman problems invoving the p-Laplacian, Prépublication à l'Université de Cergy-Pontoise, 2002.