**C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 509–514**

**Analyse complexe/*Complex Analysis***

# Fonctions PSH sur une variété presque complexe

**Fathi Haggui**

**Département de mathématiques, faculté des sciences de Monastir, 5019 Monastir, Tunisie**

**Reçu le 24 juin 2002 ; accepté le 25 juillet 2002**

**Note présentée par Jean-Pierre Demailly.**

**Résumé** Soit $(M, J)$ une variété presque complexe. Une application $u:(M, J)\to[-\infty,+\infty[$ semi-continue supérieurement est dite plurisousharmonique si $u\circ\varphi$ est sousharmonique, pour toute courbe pseudo-holomorphe $\varphi:(\Delta, J_0)\to(M, J)$. En utilisant des techniques de régularisation des courants et des développements de Taylor dans des coordonnées locales adaptées à la structure $J$, on démontre qu'une application $u:(M, J)\to[-\infty,+\infty[$ semi-continue supérieurement et non identiquement égale à $-\infty$ est plurisousharmonique si et seulement si la partie de type $(1,1)$ de $-\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u$ est (semi-)positive au sens des courants. ***Pour citer cet article : F. Haggui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 509–514.***



### Plurisubharmonic functions in almost complex manifolds

**Abstract** Let $(M, J)$ be an almost complex manifold. An upper semi-continuous map $u:(M, J)\to[-\infty,+\infty[$ is said to be plurisubharmonic if $u\circ\varphi$ is subharmonic for every pseudo-holomorphic curve: $\varphi:(\Delta, J_0)\to(M, J)$. By using regularization techniques for currents and Taylor series expansions in suitable coordinates with respect to the structure $J$, we prove that an upper semi-continuous map $u:(M, J)\to[-\infty,+\infty[$ which is not identically equal to $-\infty$ is plurisubharmonic if and only if the $(1,1)$-part of $-\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u$ is (semi-)positive as a current. ***To cite this article: F. Haggui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 509–514.***



## *Abridged English version*

Let $(M, J)$ be an almost complex manifold of dimension $n$. The standard complex structure on $\mathbb{C}^k$ is denoted by $J_0$. An upper semi-continuous map $u:\ (M, J)\to[-\infty,+\infty[$ is said to be plurisubharmonic if, for every pseudo-holomorphic curve $\varphi:(\Delta, J_0)\to(M, J)$ defined on a disk, the composition $u\circ\varphi$ is a subharmonic map. We use the following trivial observation (see, e.g., Demailly [1]): for every point $a\in M$, there exists a smooth coordinate system centered at $a$ such that $\overline{\partial}z_j(a)=0$ for $j=1,\dots,n$. We say that such a coordinate system is *almost holomorphic* at $a$. We prove:

MAIN THEOREM. – *Let $(M, J)$ be an almost complex manifold, and let $u:(M, J)\to[-\infty,+\infty[$ be an upper semi-continuous function. If $u$ is of class $\mathrm{C}^2$ we have*

$$\varphi^*(\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u)=\varphi^*(\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u)^{(1,1)}=\mathrm{d}J_0^*\,\mathrm{d}(u\circ\varphi)$$

*Adresse e-mail :* Fathi.haggui@ipeim.rnu.tn (F. Haggui).



S1631-073X(02)02518-9/FLA

*for every pseudo-holomorphic curve* $\varphi$. *In general,* $u$ *is plurisubharmonic if and only either* $u \equiv -\infty$ *or* $u$ *is locally integrable and the current* $(-\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u)^{(1,1)})$ *is positive.*

*Remark* 1. – In the case that $(M, J)$ is a complex (integrable) manifold we have $\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u = -2\mathrm{i}\partial\overline{\partial}u$.

In order to prove the main theorem, we proceed in the following way. In the first step we prove that, in a neighborhood of zero, the almost complex structure $J$ is of the form given by Eq. (1), where $b_{k,\ell,m}, c_{k,\ell,m} \in \mathbb{C}$. In the second step we prove the identity stated in the main theorem when the function $u$ is of class $\mathcal{C}^2$. In the third step we compute a Taylor expansion of the Hessian of $u$:

PROPOSITION 0.1. – *Let* $u$ *be a locally integrable function on* $M$. *Then the Hermitian form* $\mathcal{H}u_z$ *associated with the* $(1,1)$*-form* $(-\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u)^{(1,1)}$ *is given in the sense of distributions by Eq.* (4) *where* $a_{j,k,\nu}$ *are the coefficients of the Taylor development of* $\overline{\partial}z_j$ *in a neighborhood of* 0.

In the last step, we use this expansion and regularization techniques similar to those employed by Demailly [2] to prove the main theorem in the general case.

---

DÉFINITION 0.2. – Soient $(M, J)$ une variété presque complexe et $u : M \to [-\infty, +\infty[$, une fonction semi-continue supérieurement. La fonction $u$ est dite plurisouharmonique si pour toute courbe pseudo-holomorphe $\varphi : (\Delta, J_0) \to (M, J)$ définie sur un disque, l'application composée $u \circ \varphi$ est sousharmonique sur $\Delta$.

THEOREM 0.1. – *Soit* $(M, J)$ *une variété presque complexe et soit* $u : M \to [-\infty, +\infty[$ *une fonction semi-continue supérieurement. Si* $u$ *est de classe* $\mathrm{C}^2$, *on a*

$$\varphi^*(\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u) = \varphi^*(\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u)^{(1,1)} = \mathrm{d}J_0^*\,\mathrm{d}(u \circ \varphi)$$

*pour toute courbe pseudo-holomorphe* $\varphi$. *En général, la fonction* $u$ *est plurisousharmonique si et seulement si* $u \equiv -\infty$ *ou si* $u$ *est localement intégrable avec* $-\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u \geqslant 0$ *au sens des courants.*

*Remarque* 1. – Dans le cas où $M$ est une variété complexe (i.e. la structure complexe est intégrable), on a $\mathrm{d}J_0^*\,\mathrm{d}u = -2\mathrm{i}\partial\overline{\partial}u$.

*Démonstration.* – Soit $a \in M$, il existe un système de coordonnées locales $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ centré au point $a$ tel que $J(0)$ soit la structure complexe usuelle. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ le système de coordonnées complexe défini par $z_j = x_j + \mathrm{i}y_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n$. Dans ce cas on a $J(\partial/\partial x_k) = \partial/\partial y_k$ au point $z = 0$. On note encore $\mathrm{d}x_k$ et $\mathrm{d}y_k$ les extensions $\mathbb{C}$-linéaires à $T_{\mathbb{C}}M$ de $\mathrm{d}x_k$ et $\mathrm{d}y_k$. On pose alors

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \quad \mathrm{d}z_k = \mathrm{d}x_k + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_k \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\bar{z}_k = \mathrm{d}x_k - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_k.$$

Alors $\mathrm{d}z_j(\partial/\partial z_k) = \delta_{j,k}$, $\mathrm{d}\bar{z}_j(\partial/\partial\bar{z}_k) = \delta_{j,k}$, $\mathrm{d}\bar{z}_j(\partial/\partial z_k) = 0$. On rappelle que $\mathrm{d}\bar{z}_k(u) = \overline{\mathrm{d}z_k(\bar{u})}$.
Considérons la structure complexe usuelle,

$$J(0) = J_0 = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}z_j \otimes \frac{\partial}{\partial z_j} - \mathrm{d}\bar{z}_j \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

Comme $J$ est une section $\mathcal{C}^\infty$, le développement de Taylor de $J$ dans un voisinage de 0 s'écrit

$$J(z) = J_0 + \sum_{k,\ell,m} (a_{k,\ell,m}z_m + a'_{k,\ell,m}\bar{z}_m)\,\mathrm{d}z_k \otimes \frac{\partial}{\partial z_\ell} + \sum_{k,\ell,m} (b_{k,\ell,m}z_m + b'_{k,\ell,m}\bar{z}_m)\,\mathrm{d}z_k \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell}$$

$$+\sum_{k,\ell,m}(c_{k,\ell,m}z_m + c'_{k,\ell,m}\bar z_m)\,\mathrm{d}\bar z_k\otimes\frac{\partial}{\partial z_\ell}+\sum_{k,\ell,m}(d_{k,\ell,m}z_m + d'_{k,\ell,m}\bar z_m)\,\mathrm{d}\bar z_k\otimes\frac{\partial}{\partial \bar z_\ell}+\mathcal{O}\big(|z|^2\big).$$

Comme $J^2=-\mathrm{Id}$, on a $\frac{\partial J}{\partial z_j}(0)J(0)+J(0)\frac{\partial J}{\partial z_j}(0)=0$, ce qui implique $a_{k,\ell,m}=a'_{k,\ell,m}=d_{k,\ell,m}=d'_{k,\ell,m}=0$. De plus $\bar J=J$, donc $c_{k,\ell,m}=\bar b'_{k,\ell,m}$ et $c'_{k,\ell,m}=\bar b_{k,\ell,m}$. Par conséquent, dans un voisinage de 0 on a :

$$J(z)=\mathrm{i}\sum_k^n\left(\mathrm{d}z_k\otimes\frac{\partial}{\partial z_k}-\mathrm{d}\bar z_k\otimes\frac{\partial}{\partial \bar z_k}\right)+\sum_{k,\ell,m}(b_{k,\ell,m}z_m+\bar c_{k,\ell,m}\bar z_m)\,\mathrm{d}z_k\otimes\frac{\partial}{\partial\bar z_\ell}$$
$$+\sum_{k,\ell,m}(\bar b_{k,\ell,m}\bar z_m + c_{k,\ell,m}z_m)\,\mathrm{d}\bar z_k\otimes\frac{\partial}{\partial z_\ell}+\mathcal{O}\big(|z|^2\big). \tag{1}$$

Comme $J(0)$ est la structure complexe usuelle, on voit facilement qu'on a les relations

$$\bar\partial z_j=\mathcal{O}\big(|z|\big),\quad \bar\partial\bar z_j=\overline{\partial z_j}+\mathcal{O}\big(|z|\big)\quad\text{et}\quad \partial\bar z_j=\mathcal{O}\big(|z|\big),$$

donc $\mathrm{d}z_j\wedge\mathrm{d}\bar z_\ell=\partial z_j\wedge\overline{\partial z_\ell}+\mathcal{O}(|z|)$, $\mathrm{d}z_j\wedge\mathrm{d}z_\ell=\partial z_j\wedge\partial z_\ell+\mathcal{O}(|z|)$ et $\mathrm{d}\bar z_j\wedge\mathrm{d}\bar z_\ell=\overline{\partial z_j}\wedge\overline{\partial z_\ell}+\mathrm{O}(|z|)$.

Soit $u:(M,J)\to[-\infty,+\infty[$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathrm{d}u=\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\mathrm{d}z_\ell+\frac{\partial u}{\partial\bar z_\ell}\,\mathrm{d}\bar z_\ell$. D'après l'équation (1) on a

$$\begin{aligned}J^*(\mathrm{d}u)&=\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial u}{\partial z_\ell}J^*(\mathrm{d}z_\ell)+\frac{\partial u}{\partial\bar z_\ell}J^*(\mathrm{d}\bar z_\ell)\\&=\sum_{k,\ell,m}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}(\bar z_m\bar b_{k,\ell,m}+c_{k,\ell,m}z_m)\,\mathrm{d}\bar z_k+\frac{\partial u}{\partial\bar z_\ell}(z_m b_{k,\ell,m}+\bar c_{k,\ell,m}\bar z_m)\,\mathrm{d}z_k\\&\quad+\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\,\mathrm{d}z_k-\frac{\partial u}{\partial\bar z_k}\,\mathrm{d}\bar z_k\right)+\mathcal{O}\big(|z|^2\big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u&=-2\mathrm{i}\sum_{k,p}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial\bar z_p}\,\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}\bar z_p+\mathrm{i}\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial z_\ell}\,\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}z_\ell-\mathrm{i}\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial\bar z_k\partial\bar z_\ell}\,\mathrm{d}\bar z_k\wedge\mathrm{d}\bar z_\ell\\&\quad+\sum_{k,\ell,m}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\bar b_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}\bar z_m\wedge\mathrm{d}\bar z_k+\frac{\partial u}{\partial\bar z_\ell}b_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}z_m\wedge\mathrm{d}z_k\\&\quad+\sum_{k,\ell,m}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}c_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}z_m\wedge\mathrm{d}\bar z_k+\frac{\partial u}{\partial\bar z_\ell}\bar c_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}\bar z_m\wedge\mathrm{d}z_k+\mathcal{O}\big(|z|\big)\\&=-2\mathrm{i}\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial\bar z_\ell}\,\mathrm{d}z_k\wedge\mathrm{d}\bar z_\ell+\sum_{k,\ell,m}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}\bar b_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}\bar z_m\wedge\mathrm{d}\bar z_k+\frac{\partial u}{\partial\bar z_\ell}b_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}z_m\wedge\mathrm{d}z_k\\&\quad+\sum_{k,\ell,m}\frac{\partial u}{\partial z_\ell}c_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}z_m\wedge\mathrm{d}\bar z_k+\frac{\partial u}{\partial\bar z_\ell}\bar c_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}\bar z_m\wedge\mathrm{d}z_k+\mathcal{O}\big(|z|\big)\\&=\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u^{(1,1)}-\theta(J^*\,\mathrm{d}u)-\bar\theta(J^*\,\mathrm{d}u)+\mathcal{O}\big(|z|\big),\end{aligned}$$

où $\theta = \sum_{k,\ell,m} b_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_m \frac{\partial}{\partial \bar z_\ell}$ est le tenseur de torsion de Nijenhuis de la structure presque complexe, et où $\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u^{(1,1)}$ est la partie de bidegré $(1,1)$ donnée par

$$\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u^{(1,1)} = 2\mathrm{i}\sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar z_\ell}\,\mathrm{d}\bar z_\ell \wedge \mathrm{d}z_k + \sum_{k,\ell,m} \frac{\partial u}{\partial z_\ell} c_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}z_m \wedge \mathrm{d}\bar z_k + \frac{\partial u}{\partial \bar z_\ell} \bar c_{k,\ell,m}\,\mathrm{d}\bar z_m \wedge \mathrm{d}z_k + \mathcal{O}\big(|z|\big). \quad (2)$$

Soit $\varphi : (\Delta, J_0) \to (M, J)$ une courbe pseudo-holomorphe, on cherche à comparer $\mathrm{i}\partial\overline{\partial}(u \circ \varphi)$ et la partie de bidegré $(1,1)$ de $\varphi^*(\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(u\circ\varphi)}{\partial w \partial \bar w} = \sum_{k,\ell} &\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_\ell}\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial w}\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar w} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar z_\ell}\frac{\partial \bar\varphi_\ell}{\partial w}\frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar w} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_k \partial z_\ell}\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial w}\frac{\partial \bar\varphi_k}{\partial \bar w}\\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_k \partial \bar z_\ell}\frac{\partial \bar\varphi_\ell}{\partial w}\frac{\partial \bar\varphi_k}{\partial \bar w} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_k}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial w \partial \bar w} + \frac{\partial u}{\partial \bar z_k}\frac{\partial^2 \bar\varphi_k}{\partial w \partial \bar w}.\end{aligned}$$

Comme $\varphi$ est une courbe pseudo-holomorphe, alors $\overline{\partial}\varphi_\ell = \mathcal{O}(|\varphi|)$ pour tout $1 \leqslant l \leqslant n$ et $\overline{\partial}\bar\varphi_\ell = \overline{\partial\varphi_\ell} + \mathrm{O}(|\varphi|)$, ce qui implique que

$$\frac{\partial^2(u\circ\varphi)}{\partial w \partial \bar w} = \sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_k \partial z_\ell}\partial\varphi_\ell\overline{\partial\varphi_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_k}\partial\overline{\partial}\varphi_k + \frac{\partial u}{\partial \bar z_k}\partial\overline{\partial}\bar\varphi_k + \mathcal{O}\big(|\varphi|\big).$$

De plus $\mathrm{d}\varphi \circ \mathrm{i} = J \circ \mathrm{d}\varphi$ ; ce qui implique que

$$\begin{aligned}\mathrm{i}(\partial\varphi_\ell - \overline{\partial}\varphi_\ell) &= \mathrm{i}(\partial\varphi_\ell + \overline{\partial}\varphi_\ell) + \sum_{k,\ell,m} (\bar\varphi_m \bar b_{k,\ell,m} + c_{k,\ell,m}\varphi_m)\overline{\partial\varphi_k} + (\varphi_m b_{k,\ell,m} + \bar\varphi_m \bar b_{k,\ell,m})\overline{\overline{\partial}\varphi_k} + \mathcal{O}\big(|\varphi|^2\big)\\ &\Rightarrow -2\mathrm{i}\overline{\partial}\varphi_\ell = \sum_{k,m} \varphi_m c_{k,\ell,m}\overline{\partial\varphi_k} + \mathcal{O}\big(|\varphi|^2\big) \Rightarrow \overline{\partial}\varphi_\ell = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{\ell,m} \varphi_m c_{k,\ell,m}\overline{\partial\varphi_k} + \mathcal{O}\big(|\varphi|^2\big),\\ &\Rightarrow \partial\overline{\partial}\varphi_\ell = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,m} c_{k,\ell,m}\partial\varphi_m\overline{\partial\varphi_k} + \mathcal{O}\big(|\varphi|\big).\end{aligned}$$

Comme $\partial\overline{\partial}\bar\varphi_k = \overline{\partial\overline{\partial}\varphi_k} + \mathcal{O}(|\varphi|) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,\ell,m} \bar c_{k,\ell,m}\partial\varphi_\ell\overline{\partial\varphi_m} + \mathcal{O}(|\varphi|)$, alors

$$\partial\overline{\partial}(u\circ\varphi) = \sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar z_\ell}\overline{\partial\varphi_\ell}\partial\varphi_k + \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,\ell,m} \frac{\partial u}{\partial z_\ell} c_{k,\ell,m}\partial\varphi_m\overline{\partial\varphi_k} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,\ell,m} \frac{\partial u}{\partial \bar z_\ell}\bar c_{k,\ell,m}\partial\varphi_k\overline{\partial\varphi_m} + \mathcal{O}\big(|\varphi|\big). \quad (3)$$

D'autre part et d'après (2) on a :

$$\begin{aligned}\varphi^*(\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u) &= -2\mathrm{i}\sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar z_\ell}\overline{\partial\varphi_\ell}\partial\varphi_k + \sum_{k,\ell,m} \frac{\partial u}{\partial z_\ell} c_{k,\ell,m}\partial\varphi_m\overline{\partial\varphi_k} - \frac{\partial u}{\partial \bar z_\ell}\bar c_{k,\ell,m}\partial\varphi_k\overline{\partial\varphi_m} + \mathcal{O}\big(|\varphi|\big)\\ &= -2\mathrm{i}\Bigg(\sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar z_\ell}\overline{\partial\varphi_\ell}\partial\varphi_k + \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,\ell,m} \frac{\partial u}{\partial z_\ell} c_{k,\ell,m}\partial\varphi_m\overline{\partial\varphi_k}\\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{k,\ell,m} \frac{\partial u}{\partial \bar z_\ell}\bar c_{k,\ell,m}\partial\varphi_k\overline{\partial\varphi_m} + \mathcal{O}\big(|\varphi|\big)\Bigg) = -2\mathrm{i}\partial\overline{\partial}(u\circ\varphi) + \mathcal{O}\big(|\varphi|\big)\end{aligned}$$

en particulier au point 0 on a l'égalité $-\varphi^*(\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u) = 2\mathrm{i}\partial\overline{\partial}(u\circ\varphi)$. Donc l'égalité est vérifiée point par point.

On se propose maintenant de démontrer le résultat pour les fonctions semi-continues supérieurement.

On note dans la suite $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{2n})\in\mathbb{N}^{2n}$ et $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}\bar z_1^{\alpha_{n+1}}\cdots\bar z_n^{\alpha_{2n}}$ et pour tout $1\leqslant p\leqslant n$ on note $\delta_p=(0,\dots,1,\dots)$ et $\delta_{\bar p}=\delta_{p+n}$ (le coefficient 1 étant situé à la $p$-ième place pour $\delta_p$ et à la $(p+n)$-ième place pour $\delta_{\bar p}$.

Pour démontrer le résultat dans le cas général, on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 0.3. – *Soit $u:(M,J)\to[-\infty,+\infty[$ une application semi-continue supérieurement. Le développement de Taylor du Hessien $\mathcal{H}u_z$ associé à la $(1,1)$-forme $(-\mathrm{d}J^*\,\mathrm{d}u)^{(1,1)}$ au sens des distributions est donné par*

$$\mathcal{H}u_z(\lambda)=\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial\bar z_\ell}\lambda_k\bar\lambda_\ell+2\Re\Bigg(\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial z_\ell}\sum_{j,\alpha}a_{j,\ell,\nu}z^\nu\lambda_k\bar\lambda_j+\sum_{k=1}^n\frac{\partial u}{\partial z_k}\Bigg(\sum_{|\nu|=2}a_{j,k,\nu}\nu_pz^{\nu-\delta_p}\lambda_p\bar\lambda_j$$
$$+\sum_{|\nu|=2}a_{j,k,\nu}\nu_{\bar p}z^{\nu-\delta_{\bar p}}\bar a_{i,p,\mu}\bar z^\mu\lambda_i\bar\lambda_j+\sum_{|\nu|=1}a_{j,k,\nu}\bar a_{i,p,\mu}z^\nu z^{\mu-\delta_p}\bar\lambda_p\lambda_i\Bigg)\Bigg),\tag{4}$$

*où les $a_{j,k,\nu}$ sont les coefficients du développement de Taylor de $\overline{\partial}z_j$ au voisinage de 0.*

*Démonstration.* – On a $\bar\partial z_j(0)=0$, ce qui implique $\bar\partial z_k=\sum_{|\nu|\geqslant1}a_{j,k,\nu}z^\nu\overline{\partial z_j}$. Par conséquent, si $\varphi$ est une courbe pseudo-holomorphe, on a $\partial\varphi_k/\partial\bar w=\sum_{|\nu|\geqslant1}a_{j,k,\nu}\varphi^\nu\overline{\partial\varphi_j/\partial w}$.

Soit $u:M\to[-\infty,+\infty[$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Un calcul fournit

$$\frac{\partial^2(u\circ\varphi)}{\partial w\partial\bar w}=\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial\bar z_\ell}\frac{\partial\varphi_k}{\partial w}\overline{\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial w}}+2\Re\left(\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial z_\ell}\frac{\partial\varphi_k}{\partial w}\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial\bar w}\right)+2\Re\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial u}{\partial z_k}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial w\partial\bar w}\right)$$
$$=\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial\bar z_\ell}\lambda_k\overline{\lambda_\ell}+2\Re\left(\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial z_\ell}\lambda_ka_{j,\ell,\nu}\varphi^\nu\bar\lambda_j\right)+2\Re\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial u}{\partial z_k}\frac{\partial}{\partial w}\left(\sum_{|\nu|\geqslant1}a_{j,k,\nu}\varphi^\nu\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial w}}\right)\right)$$
$$=\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial\bar z_\ell}\lambda_k\overline{\lambda_\ell}+2\Re\Bigg(\sum_{k,\ell}\frac{\partial^2u}{\partial z_k\partial z_\ell}\lambda_ka_{j,\ell,\nu}\varphi^\nu\bar\lambda_j+2\Re\Bigg(\sum_{k=1}^n\frac{\partial u}{\partial z_k}\Bigg(\sum_{|\nu|\geqslant1}a_{j,k,\nu}\nu_p\varphi^{\nu-\delta_p}\frac{\partial\varphi_p}{\partial w}\overline{\frac{\partial\varphi_j}{\partial w}}$$
$$+\sum_{\nu=2}a_{j,k,\nu}\nu_{\bar p}\varphi^{\nu-\delta_{\bar p}}\bar a_{i,p,\mu}\bar\varphi^\mu\lambda_i\bar\lambda_j+a_{j,k,\nu}\mu_p\varphi^\mu a_{i,j,\mu}\varphi^{\mu-\delta_p}\lambda_i\bar\lambda_p\Bigg)\Bigg)$$

d'où le résultat.

Essayons de démontrer le résultat dans le cas où $u$ est semi-continue supérieurement. On reprend la méthode de convolution utilisée par Demailly dans [2]. Soit $\chi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie

$$\chi(t)>0\quad\text{si } t<1,\qquad\chi(t)=0\quad\text{si } t\geqslant1,\qquad\int_{v\in\mathbb{C}^n}\chi\left(|v|^2\right)=1.$$

Pour $u$ une application Psh on définit pour $\varepsilon>0$ :

$$u_\varepsilon(z)=\frac{1}{\varepsilon^{2n}}\int_{\xi\in T_zX}u(z+\xi)\chi\left(\frac{|\xi|^2+|J\xi|^2}{2\varepsilon^2}\right)\mathrm{d}V_{(|\xi|^2+|J\xi|^2)/2},\tag{5}$$

où $\mathrm{d}V_g$ signifie l'élément de volume associé à une métrique riemannienne $g$. Effectuons le changement de variables $\xi\in\mathbb{C}^n\mapsto\eta\in\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}$-linéaire tel que $|\eta|^2=(|\xi|^2+|J\xi|^2)/2$. Comme on a

$$|J\xi|^2=\sum_{k=1}^n(J\xi)_k\overline{(J\xi)}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 + \sum_{\ell,m} -\mathrm{i} b_{k,\ell,m} z_m \bar{\xi}_\ell \bar{\xi}_k - \mathrm{i}\bar{b}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \xi_\ell \bar{\xi}_k + \mathrm{i}\bar{b}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \xi_\ell \xi_k + \mathrm{i} b_{k,\ell,m} z_m \bar{\xi}_\ell \xi_k$$
$$+ \sum_{\ell,m} -\mathrm{i} c_{k,\ell,m} z_m \xi_\ell \bar{\xi}_k - \mathrm{i}\bar{c}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \bar{\xi}_\ell \bar{\xi}_k + \mathrm{i}\bar{c}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \bar{\xi}_\ell \xi_k + \mathrm{i} c_{k,\ell,m} z_m \xi_\ell \xi_k + \mathrm{O}\big(|z|^2, \xi^2\big),$$
$$\eta_k = \xi_k - \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} \bar{b}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \xi_\ell + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} b_{k,\ell,m} z_m \bar{\xi}_\ell - \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} \bar{c}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \bar{\xi}_\ell + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} c_{k,\ell,m} z_m \xi_\ell + \mathrm{O}\big(|z|^2 \xi\big),$$

d'où

$$\xi_k = \eta_k + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} \bar{b}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \eta_\ell - \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} b_{k,\ell,m} z_m \bar{\eta}_\ell + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} \bar{c}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \bar{\eta}_\ell - \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{\ell,m} c_{k,\ell,m} z_m \eta_\ell + \mathrm{O}\big(|z|^2 \eta\big)$$

ce qui implique que

$$|\eta|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 - \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{k,\ell,m} b_{k,\ell,m} z_m \bar{\xi}_\ell \bar{\xi}_k - \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{b}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \xi_\ell \bar{\xi}_k + \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{b}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \xi_\ell \xi_k + \frac{\mathrm{i}}{2} b_{k,\ell,m} z_m \bar{\xi}_\ell \xi_k$$
$$+ \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{k,\ell,m} c_{k,\ell,m} z_m \xi_\ell \bar{\xi}_k - \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{c}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \bar{\xi}_\ell \bar{\xi}_k - \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{c}_{k,\ell,m} \bar{z}_m \bar{\xi}_\ell \xi_k - \frac{\mathrm{i}}{2} c_{k,\ell,m} z_m \bar{\xi}_\ell \xi_k + \mathrm{O}\big(|z|^2 |\xi|^2\big),$$

d'où $u_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \int_{\eta \in T_z M} u(h(z,\eta)) \chi(\frac{|\eta|^2}{\varepsilon^2}) \, \mathrm{d}\lambda(\eta)$ avec $h_k(z,\xi) = z_k + \xi_k + \sum_{|\alpha|,|\beta| \geqslant 1} c_{k,\alpha,\beta} z^\alpha \xi^\beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2n}$, $c_{k,\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$, à partir de l'expression de $h$, on remarque que $\partial_z(u \circ h) = \varepsilon \partial_\xi (u \circ h)$, de plus, modulo la formule d'intégration par partie on a pour $|\alpha| \geqslant 1$ et $|\beta| \geqslant 2$ ;

$$\int_{T_z M} \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}_s} c_{s,\alpha,\beta} \beta_{\bar{\ell}} \beta_k z^\alpha \varepsilon^{|\beta|-1} \xi^{\beta - \delta_{\bar{\ell}} - \delta_k} \chi\big(|\xi|^2\big) \, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \mathcal{O}\big(|z|\big) \text{ et pour } |\alpha| \geqslant 1,\ |\beta| \geqslant 1;$$
$$\int_{T_z M} \sum_{s,\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\xi}_k \partial \xi_s} c_{s,\alpha,\beta} \beta_\ell z^\alpha \varepsilon^{|\beta|-1} \xi^{\beta - \delta_\ell} \chi\big(|\xi|^2\big) \, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \mathcal{O}\big(|z|\big),$$

ce qui nous permet de conclure que pour tout $\lambda \in T_z M$, $\mathcal{H}u_\varepsilon(z)(\lambda) = \int_{T_z M} \mathcal{H}u(h(z, \varepsilon\xi))(\lambda_\varepsilon) + \mathcal{O}(|z|)$, avec $\lambda_{\varepsilon,\ell} = \lambda_\ell + \sum_{s,\alpha,\beta} c_{\ell,\alpha,\beta} \beta_s z^\alpha \varepsilon^{|\beta|-1} \xi^{\beta - \delta_s} \lambda_s$, ce qui implique que au voisinage de 0, $\mathcal{H}u_\varepsilon(z) \geqslant 0$, comme $\mathcal{H}u_\varepsilon(z)$ converge vers $\mathcal{H}u(z)$, on conclut que $\mathcal{H}u(z) \geqslant 0$.

**Remerciements.** Je remercie les professeurs M. Blel et J.-P. Demailly pour de fructueuses discussions.

## Références bibliographiques

[1] J.-P. Demailly, Analytic Geometry, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr.

[2] J.-P. Demailly, Regularization of closed positive currents of type $(1,1)$ by the flow of a Chern connection, in: H. Skoda, et al. (Eds.), Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry. Based on a colloquium dedicated to Pierre Dolbeault, Paris, France, June 23–26, 1992, Aspects of Math. E, Vol. 26, Vieweg, Braunschweig, 1994, pp. 105–126.

[3] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. of Math. 65 (1957) 391–404.

[4] D. McDuff, D. Salamon, $J$-Holomorphic Curves and Quantum Cohomology, University Lecture Series, Vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.