C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 827–832

Analyse numérique/*Numerical Analysis*
(Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*)

Condition *inf-sup* pour l'élément fini de Taylor–Hood P_2-iso-P_1, 3-D ; application aux équations de Maxwell

Patrick Ciarlet Jr. [a], **Vivette Girault** [b]

[a] ENSTA/UMA, 32 boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France

[b] Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université P. & M. Curie, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 1er juillet 2002 ; accepté le 13 septembre 2002

Note présentée par Roland Glowinski.

Résumé On considère la discrétisation des équations de Maxwell, telle qu'elle a été proposée dans [3,2,1]. Les approximations numériques du champ électromagnétique et du multiplicateur de Lagrange associé à la divergence du champ sont réalisées à l'aide de l'élément fini de Taylor–Hood P_2-iso-P_1, et complétées de fonctions-test singulières, lorsque le domaine de calcul est non convexe, à bord non régulier. Le but de la Note est de prouver l'existence d'une condition *inf-sup* discrète. On peut également appliquer ce résultat à la discrétisation du système de Stokes en vitesse-pression [7]. ***Pour citer cet article : P. Ciarlet Jr., V. Girault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 827–832.***

Inf-sup condition for the 3-D P_2-iso-P_1 Taylor–Hood finite element; application to Maxwell equations

Abstract We consider the discretization of Maxwell equations, proposed in [3,2,1]. The electromagnetic field and the Lagrange multiplier related to its divergence are approximated numerically by the P_2-iso-P_1 Taylor–Hood Finite Element. Singular test-functions are added when the domain is non-convex, with a non-smooth boundary. The aim of this Note is to establish a discrete *inf-sup* condition. The result can be applied to the discretization of the velocity-pressure Stokes system [7]. ***To cite this article: P. Ciarlet Jr., V. Girault, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 827–832.***

Abridged English version

Bracketed numbers refer to the French version. The curl operator is called **rot** in the French version.

We propose to solve numerically Maxwell equations with the help of the P_2-iso-P_1 Taylor–Hood finite element (FE later on), as is advocated in [3,2,1]. The computational domain Ω is bounded by a Lipschitz polyhedral boundary $\partial\Omega$. Let $(\cdot\,,\cdot)_0$ denote the $L^2(\Omega)$ scalar product, and let $(\cdot\,,\cdot)_{0,K}$ denote the $L^2(K)$ scalar product, for $K\subset\Omega$ or $K\subset\partial\Omega$. The associated norm is $\|\cdot\|_0$ or $\|\cdot\|_{0,K}$. The semi-norm of $H^m(\Omega)$ or $H^m(K)$, $m\geqslant 1$, is denoted by $|\cdot|_m$, or $|\cdot|_{m,K}$. $L^2_0(\Omega)$ is the subspace of $L^2(\Omega)$, which is orthogonal

Adresses e-mail : ciarlet@ensta.fr (P. Ciarlet Jr.); girault@ann.jussieu.fr (V. Girault).

S1631-073X(02)02564-5/FLA

to $\mathbb{R}$. The unit outward normal to $\partial\Omega$ is called $\vec{n}$. In the following, let us choose a face F of $\partial\Omega$, and define $\vec{n}_F = \vec{n}_{|F}$. We set $X = H_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ and $Q = L^2(\Omega)$.

We are interested in solving the quasielectro- or quasimagneto-static Maxwell equations, given by (1). It is easily proven that the quasielectro-static equations are equivalent to the saddle-point formulation (2), and that $p = 0$. From Weber's compact imbedding result [11] (of X into $L^2(\Omega)^3$), one infers easily that the bilinear form $(\cdot,\cdot)_X : (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto (\mathrm{curl}\,\vec{u}, \mathrm{curl}\,\vec{v})_0 + (\mathrm{div}\,\vec{u}, \mathrm{div}\,\vec{v})_0$ is *coercive* on $X \times X$ ($\|\cdot\|_X$ is the associated norm). If Ω is convex, one has $X \subset H^1(\Omega)^3$. Otherwise, $X_R = X \cap H^1(\Omega)^3$ is closed in X. Then either $\vec{E} \in H^1(\Omega)^3$ in the convex case, or $\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_S$, with $(\vec{E}_R, \vec{E}_S) \in X_R \times X_R{}^{\perp}$. In addition, for elements of X_R, Costabel identity $(\vec{u}, \vec{v})_X = (\mathbf{grad}\,\vec{u}, \mathbf{grad}\,\vec{v})_0$ is satisfied.

In order to fit into the usual saddle-point theoretical framework, there remains to check the *inf-sup* condition. One way is to prove successively

LEMMA 0.1. – $\exists \varrho \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *s.t. the support of* $\varrho_{|\partial\Omega}$ *is compact in* F *and* (3) *holds.*

Then $\vec{\varrho} = \varrho\,\vec{n}_F$ belongs to $X \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})^3$ and $(\mathrm{div}\,\vec{\varrho}, 1)_0 = 1$. Let $K_1 = \|\vec{\varrho}\|_X = |\varrho|_1$.

PROPOSITION 0.1. – $\exists\beta > 0$ *s.t. the* inf-sup *condition* (4) *holds.*

Proof. – Split $q \in Q$ into $q = q^0 + \bar{q}$, with $(q^0, \bar{q}) \in L^2_0(\Omega) \times \mathbb{R}$, cf. (5). Then, $\exists \vec{v}^0 \in H^1_0(\Omega)^3$ s.t. $\mathrm{div}\,\vec{v}^0 = q^0$, and $|\vec{v}^0|_1 \leqslant C_1\|q^0\|_0$ (cf. [7, p. 24]). Let $\vec{v} = \alpha\,\vec{v}^0 + \bar{q}\,\vec{\varrho}$, α to be fixed. One easily finds (6). Thus, one can choose $\varepsilon = \alpha$ and then $\alpha = K_1{}^2$; this yields (4), as one has clearly $\|\vec{v}\|_X \leqslant C_1'\|q\|_0$. □

Note that the same can be obtained, without introducing $\vec{\varrho}$ or Lemma 0.1, for the magnetic case and the velocity-pressure Stokes formulation, respectively in (X_H, Q_H) and (X_S, Q_S), see (7).

In the discrete case, one can choose for instance the P_2-iso-P_1 Taylor–Hood FE to discretize $(\vec{E}, p)$ in the convex case. In the non-convex case, $\vec{E}_S$ is discretized by suitable means [2,1], and $(\vec{E}_R, p)$ is discretized by the Taylor–Hood FE (the divergence constraint is enforced on the total field $\vec{E}_R + \vec{E}_S$). Still, one can prove a uniform discrete *inf-sup* condition (*udisc* later on), in which the explicit knowledge of the discretization of $\vec{E}_S$ is not needed.

Let $(\mathcal{T}_h)_h$ be a *regular* family [5] of triangulations of Ω, made of tetrahedra T. Let $(\mathcal{T}_{h/2})_h$ be a second family of triangulations, obtained by splitting each T of $\mathcal{T}_h$ into eight subtetrahedra T_i, with $|T_i| = \frac{1}{8}|T|$.

The Lagrange multiplier p is discretized in $Q_h = \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\colon\ q_{h|T} \in P_1,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}$, whereas $\vec{E}$ (or $\vec{E}_R$) is discretized with the help of $Y_h = \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\colon\ q_{h|T_i} \in P_1,\ \forall T_i \in \mathcal{T}_{h/2}\}$, in $X_h = Y_h{}^3 \cap X$. In addition, let $Q_{0,h} = Q_h \cap L^2_0(\Omega)$ and $X_{0,h} = X_h \cap H^1_0(\Omega)^3$.

The main result consists in proving the *udisc* (8). For that, one follows the proof of Proposition 0.1. First, one has to approximate ϱ. Taking its Lagrange interpolation in Y_h is not enough, because (3) is not satisfied. So, one has to build a suitable correction, defined on the midpoints of the edges of the interior of F. This leads to (9).

Then, one proceeds to prove the *udisc* on $(X_{0,h}, Q_{0,h})$. Two cases are addressed below.

If the mesh is general, let us follow [4]. First, a local discrete *inf-sup* condition is established on each T.

LEMMA 0.2. – $\forall q_h \in P_1(T)$, $\exists \vec{v}_h$, *a restriction of an element of* X_h *to* T, *such that* (10) *holds.*

Then, the technique developed in [10] allows one to prove

THEOREM 0.3. – *Assume* $(\mathcal{T}_h)_h$ *is a regular family of triangulations, such that no tetrahedra has more than one face on* $\partial\Omega$. *Then, there exists* $\beta^0 > 0$, *independent of* h *s.t.* udisc (11) *is satisfied in* $(X_{0,h}, Q_{0,h})$.

If the mesh is suitably structured, in that it is made of hexahedra, each one of them split into twelve tetrahedra, it is possible to use the localized process of [8]. The idea is to replace the proof of the *udisc* by the construction of an operator $\mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(H^1_0(\Omega)^3; X_{0,h})$, which satisfies (12), the so-called Fortin Lemma [7, p. 117]. One obtains a local *inf-sup* condition in each hexahedron, where the inequalities of (10) are replaced by (13). In this way, one proves the *udisc* in (X_h^*, Q_h^*), with $Q_h^* = \{q_h^*\colon\ q_h \in Q_h\}$ and $X_h^* = \{\vec{v}_h \in X_h\colon\ (\operatorname{div}\vec{v}_h, 1)_{0,T} = 0,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}$.

Then, one can conclude, after building a suitable (cf. (15)) regularizing operator $\mathcal{R}_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_{0,h})$ *à la* Scott and Zhang [9], and a correction $\mathcal{C}_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_h^*)$ solution to (16)–(17): their sum $\mathcal{P}_h = \mathcal{R}_h + \mathcal{C}_h$ is the operator needed to apply the Fortin Lemma.

This approach, or the one *à la* Verfürth [10], allows one to prove the *udisc* for the magnetic field, and for the velocity-pressure Stokes system. For the electric field, one finally concludes as in the continuous case.

THEOREM 0.4. – *Under the assumptions of Theorem* 0.3*, the pair* (X_h, M_h) *satisfies the* udisc (8).

---

1. Le cas exact

On se place dans un domaine Ω à bord $\partial\Omega$ polyédrique et lipschitzien. On peut traiter de façon similaire le cas d'un domaine bidimensionnel à bord polygonal.

On note $(\cdot,\cdot)_0$ le produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$, et $(\cdot,\cdot)_{0,K}$ le produit scalaire usuel de $L^2(K)$, pour $K \subset \Omega$ ou $K \subset \partial\Omega$. La norme associée est notée $\|\cdot\|_0$ ou $\|\cdot\|_{0,K}$. De même, la semi-norme de $H^m(\Omega)$ ou $H^m(K)$, $m \geqslant 1$, est notée $|\cdot|_m$ ou $|\cdot|_{m,K}$. On note $L_0^2(\Omega)$ le sous-espace des fonctions v de $L^2(\Omega)$ vérifiant $(v,1)_0 = 0$. On appelle $\vec{n}$ la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$. Dans la suite, on choisit une face F de $\partial\Omega$, et on définit $\vec{n}_F = \vec{n}_{|F}$.

Soient $(\vec{f}_E, g) \in L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)$ et $\vec{f}_H \in L^2(\Omega)^3$, avec $\operatorname{div}\vec{f}_E = 0$, $\vec{f}_E\cdot\vec{n}_{|\partial\Omega} = 0$ et $\operatorname{div}\vec{f}_H = 0$. On veut résoudre numériquement les problèmes modèles quasiélectro- et quasimagnéto-statiques ci-dessous.

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{E} \in H_0(\mathbf{rot},\Omega)\cap H(\operatorname{div},\Omega) \text{ t.q.} \\ \mathbf{rot}\,\vec{E} = \vec{f}_E \text{ et } \operatorname{div}\vec{E} = g \text{ dans } \Omega\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{H} \in H(\mathbf{rot},\Omega)\cap H_0(\operatorname{div},\Omega) \text{ t.q.} \\ \mathbf{rot}\,\vec{H} = \vec{f}_H \text{ et } \operatorname{div}\vec{H} = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

On peut aisément vérifier que le problème quasiélectrostatique admet une unique solution dans $X = H_0(\mathbf{rot},\Omega)\cap H(\operatorname{div},\Omega)$, et qu'il est équivalent à la formulation de point-selle (où $Q = L^2(\Omega)$)

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{E}, p) \in X\times Q \text{ tel que} \\ (\mathbf{rot}\,\vec{E}, \mathbf{rot}\,\vec{v})_0 + (\operatorname{div}\vec{E}, \operatorname{div}\vec{v})_0 + (p, \operatorname{div}\vec{v})_0 = (\vec{f}_E, \mathbf{rot}\,\vec{v})_0 + (g, \operatorname{div}\vec{v})_0, \quad \forall \vec{v}\in X \\ (q, \operatorname{div}\vec{E})_0 = (q, g)_0, \quad \forall q \in Q, \end{cases} \tag{2}$$

sous réserve que $p = 0$ (ce qui est toujours vrai, dès lors que $\operatorname{div}\vec{f}_E = 0$ et $\vec{f}_E\cdot\vec{n}_{|\partial\Omega} = 0$).

D'après le résultat d'injection compacte de X dans $L^2(\Omega)^3$ dû à Weber [11], la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)_X$: $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto (\mathbf{rot}\,\vec{u}, \mathbf{rot}\,\vec{v})_0 + (\operatorname{div}\vec{u}, \operatorname{div}\vec{v})_0$ est *coercitive* sur $X\times X$. On note $\|\cdot\|_X$ la norme associée.

Un des aspects attractifs de la méthode est que l'on a l'identité suivante : $(\vec{u},\vec{v})_X = (\mathbf{grad}\,\vec{u}, \mathbf{grad}\,\vec{v})_0$, pour $\vec{u},\vec{v} \in X\cap H^1(\Omega)^3$, due à Costabel [6]. En conséquence, $\|\vec{u}\|_X = |\vec{u}|_1$, pour $\vec{u}\in X\cap H^1(\Omega)^3$.

La *condition inf-sup* entre X et Q est aisée à vérifier : il suffit de résoudre une équation de Laplace avec condition de Dirichlet homogène sur le bord et prendre le gradient de la solution. Mais cette démonstration ne se prête pas à la discrétisation conforme dans $H^1(\Omega)^3$ que nous allons utiliser. Pour cette raison, nous proposons la démarche suivante. On commence donc par le

LEMME 1.1. – *Il existe une fonction* $\varrho \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ *telle que* $\varrho_{|\partial\Omega}$ *est à support compact dans* F *et*

$$(\varrho, 1)_{0,F} = 1. \tag{3}$$

Alors la fonction $\vec{\varrho} = \varrho\,\vec{n}_F$ appartient à $X\cap\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})^3$ et $(\operatorname{div}\vec{\varrho}, 1)_0 = 1$. On note $K_1 = \|\vec{\varrho}\|_X = |\varrho|_1$.

Ce Lemme préliminaire permet de démontrer la condition *inf-sup* suivante.

PROPOSITION 1.2. – *Il existe une constante* $\beta > 0$ *telle que*

$$\inf_{q\in Q}\sup_{\vec{v}\in X}\frac{(q, \operatorname{div}\vec{v})_0}{\|\vec{v}\|_X\|q\|_0} \geqslant \beta. \tag{4}$$

Démonstration. – On décompose $q \in Q$ en $q = q^0 + \bar{q}$, où

$$\bar{q} = \frac{1}{|\Omega|}(q, 1)_0 \in \mathbb{R}, \quad q^0 \in L^2_0(\Omega). \tag{5}$$

Alors, il existe (cf. [7, p. 24]) $\vec{v}^0 \in H^1_0(\Omega)^3$ tel que $\operatorname{div} \vec{v}^0 = q^0$, et $|\vec{v}^0|_1 \leqslant C_1 \|q^0\|_0$. On pose $\vec{v} = \alpha\, \vec{v}^0 + \bar{q}\, \vec{\varrho}$, α à déterminer. Alors

$$\begin{aligned}(q, \operatorname{div} \vec{v})_0 &\geqslant \alpha \big\|q^0\big\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|}\|\bar{q}\|_0^2 - \frac{K_1}{|\Omega|^{1/2}}\|\bar{q}\|_0 \big\|q^0\big\|_0, \quad \text{puisque } \|\operatorname{div} \vec{\varrho}\|_0 \leqslant K_1 \\ &\geqslant \alpha \big\|q^0\big\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|}\|\bar{q}\|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{{K_1}^2}{|\Omega|}\|\bar{q}\|_0^2 - \frac{\varepsilon}{2}\big\|q^0\big\|_0^2, \quad \forall \varepsilon > 0.\end{aligned} \tag{6}$$

On arrive à (4), en choisissant $\varepsilon = \alpha$, puis $\alpha = {K_1}^2$, sachant qu'on a par ailleurs $\|\vec{v}\|_X \leqslant C_1' \|q\|_0$. □

On a exactement les mêmes résultats pour le champ magnétique (indice $_H$) ou pour le système de Stokes en vitesse-pression (indice $_S$), à ceci près que le couple (X, Q) est respectivement égal à

$$X_H = H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}, \Omega),\ Q_H = L^2_0(\Omega)\ ; \qquad X_S = H^1_0(\Omega)^3,\ Q_S = L^2_0(\Omega). \tag{7}$$

Dans ces deux derniers cas, il n'est pas nécessaire d'introduire la fonction $\vec{\varrho}$.

2. Le cas discret

Si le domaine Ω est convexe, on a l'injection continue $X \subset H^1(\Omega)^3$. Sinon, $X_R = X \cap H^1(\Omega)^3$ est un fermé de X, et on peut écrire la décomposition continue (voire orthogonale) $X = X_R \oplus X_S$. On discrétise donc le champ $\vec{E}$ (cas Ω convexe), ou la partie *régulière* $\vec{E}_R$ du champ (cas Ω non convexe) par l'élément fini de Lagrange P_1, composante par composante. Pour la discrétisation de la partie singulière, on renvoie le lecteur à [2,1]. Le multiplicateur (sur le champ total) est discrétisé sur un maillage plus grossier, toujours par l'élément fini P_1. Ceci étant, comme dans le cas exact, la condition *inf-sup* discrète sera obtenue uniquement à l'aide de champs approchés *réguliers*, c'est-à-dire grâce à la discrétisation par l'élément fini de Taylor–Hood. Il n'est donc pas nécessaire de connaître une discrétisation de la partie singulière pour démontrer cette condition *inf-sup* discrète.

Comme on utilise l'élément fini de Taylor–Hood P_2-iso-P_1, on introduit $(\mathcal{T}_h)_h$ une première famille de triangulations *régulière* (cf. [5]), de pas h ; on note h_T le diamètre de T et ρ_T celui de sa sphère inscrite. Pour des raisons techniques, on suppose aussi qu'aucun tétraèdre n'a plus d'une face sur $\partial\Omega$. On appelle T un tétraèdre générique de $\mathcal{T}_h$. On définit alors le raffinement standard suivant : chaque tétraèdre T est divisé en huit sous-tétraèdres $(T_i)_{i=1,\dots,8}$ dont le volume est $1/8^{\text{ème}}$ du volume de T, les nouveaux sommets se trouvant au milieu des six arêtes de T. Aux tétraèdres T_i correspond naturellement une seconde famille de triangulations $(\mathcal{T}_{h/2})_h$, de pas $h/2$, régulière par construction.

Le multiplicateur de Lagrange p est donc discrétisé sur $\mathcal{T}_h$, à partir de l'élément fini P_1. Soient :

$$Q_h = \big\{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\colon\ q_{h|T} \in P_1,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\big\}, \quad \text{et son sous-espace} \quad Q_{0,h} = Q_h \cap L^2_0(\Omega).$$

Quant à $\vec{E}$ (ou $\vec{E}_R$), il l'est par l'élément $(P_1)^3$, sur $\mathcal{T}_{h/2}$. On définit donc

$$Y_h = \big\{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\colon\ q_{h|T_i} \in P_1,\ \forall T_i \in \mathcal{T}_{h/2}\big\}, \quad \text{ainsi que } X_h = {Y_h}^3 \cap X, \text{ et } X_{0,h} = X_h \cap H^1_0(\Omega)^3.$$

Il s'agit de démontrer que la paire d'espaces (X_h, Q_h) vérifie l'analogue de (4) avec une constante $\beta^* > 0$ indépendante de h :

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\vec{v}_h \in X_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \vec{v}_h)_0}{\|\vec{v}_h\|_X \|q_h\|_0} \geqslant \beta^*. \tag{8}$$

Cette démonstration est calquée sur celle de la Proposition 1.2 : on décompose $q_h \in Q_h$ en $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$, où $\bar{q}_h$ est défini comme en (5), on démontre que la paire $(X_{0,h}, Q_{0,h})$ vérifie une condition *inf-sup*, puis on approche ϱ avec une fonction ϱ_h qui satisfait (3), on pose $\vec{\varrho}_h = \varrho_h \vec{n}_F$, et enfin on cherche $\vec{v}_h \in X_h$ sous la forme $\alpha\, \vec{v}_h^0 + \bar{q}_h \vec{\varrho}_h$ où $\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}$ et $\alpha > 0$ est un réel à choisir.

Commençons par approcher la fonction ϱ. On définit d'abord $\Pi_h(\varrho)$, où Π_h est l'opérateur habituel d'interpolation de Lagrange dans Y_h, ce qui est loisible puisque ϱ est régulière. Mais comme Π_h ne conserve pas (3), il faut le corriger. On construit par exemple une correction sur les N milieux des arêtes intérieures de F, avec les fonctions de base de Y_h $(\varphi_i)_{i=1,\dots,N}$ associées. On définit $\varrho_h \in Y_h$ par : $\varrho_h = \Pi_h(\varrho) + \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$, pour que, par construction $(\varrho_h - \varrho, 1)_{0,F} = 0$.

Ceci entraine que ϱ_h vérifie (3). Par ailleurs, grâce à la régularité de ϱ, il existe une constante C_2 indépendante de h et ϱ, et donc K_2 indépendante de h, telles que

$$|\varrho_h|_1 \leqslant C_2\big(|\varrho|_2 + h\,|\varrho|_{2,F}\big) \leqslant K_2. \tag{9}$$

On pose $\vec{\varrho}_h = \varrho_h \vec{n}_F \in X_h$ qui vérifie, par construction, $\|\vec{\varrho}_h\|_X = |\varrho_h|_1 \leqslant K_2$.

Ensuite, pour établir la condition *inf-sup* pour $(X_{0,h}, Q_{0,h})$, on aimerait procéder comme dans [8]. Mais ceci ne semble pas possible lorsque la triangulation $(\mathcal{T}_h)_h$ est quelconque parce que l'équation

$$\text{Trouver } \vec{v}_h \text{ t.q. } (\operatorname{div} \vec{v}_h, 1)_{0,T} = (\operatorname{div} \vec{v}, 1)_{0,T}, \ \forall T \in (\mathcal{T}_h)_h,$$

n'a en général pas de solution dans $X_{0,h}$.

Il y a alors deux possibilités. Si le maillage est quelconque, on démontre d'abord une condition inf-sup locale sur un tétraèdre en s'inspirant de la construction de [4]. Soient $(b_i)_{i=1,\dots,6}$ (resp. $(\vec{\tau}_i)_{i=1,\dots,6}$) les milieux de (resp. les vecteurs tangents à) chaque arête de T, arête de longueur $(\ell_i)_{i=1,\dots,6}$.

LEMME 2.1. – *Pour chaque $q_h \in P_1(T)$, il existe $\vec{v}_h$ qui est la restriction à T d'une fonction de X_h telle que* :

$$\vec{v}_h \cdot \vec{n}_{|\partial T} = 0, \quad \vec{v}_h(b_i) \cdot \vec{\tau}_i = \begin{cases} -\ell_i^2 \operatorname{grad} q_h(b_i) \cdot \vec{\tau}_i, & \textit{si } b_i \notin \partial\Omega \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 6)$$
$$(q_h, \operatorname{div} \vec{v}_h)_{0,T} \geqslant C_3 \rho_T^2 |q_h|_{1,T}^2, \quad |\vec{v}_h|_{1,T} \leqslant C_4 h_T |q_h|_{1,T}. \tag{10}$$

Grâce à la technique de [10], ceci entraine la condition inf-sup globale.

THÉORÈME 2.2. – *On suppose que $(\mathcal{T}_h)_h$ est une famille régulière de triangulations, et qu'aucun de ses tétraèdres n'a plus d'une face sur $\partial\Omega$. Alors il existe une constante β^0, indépendante de h telle que*

$$\inf_{q_h^0 \in Q_{0,h}} \sup_{\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}} \frac{(q_h^0, \operatorname{div} \vec{v}_h^0)_0}{\|\vec{v}_h^0\|_X \|q_h^0\|_0} \geqslant \beta^0. \tag{11}$$

Par contre, si le maillage est convenablement structuré et composé par exemple d'hexaèdres qui sont ensuite décomposés en douze tétraèdres, on peut utiliser la construction de [8], qui a le grand avantage sur celle de [10] de n'utiliser que des arguments locaux et par conséquent permet de démontrer des résultats plus forts que la seule condition inf-sup. L'idée est d'appliquer le Lemme de Fortin [7, p. 117] : il suffit de construire un opérateur d'approximation $\mathcal{P}_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_{0,h})$ tel que pour toute fonction $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)^3$,

$$\forall q_h \in Q_{0,h}, \ \big(q_h, \operatorname{div}\big(\mathcal{P}_h(\vec{v}) - \vec{v}\big)\big)_0 = 0, \qquad \forall q_h \in Q_{0,h}, \ \big\|\mathcal{P}_h(\vec{v})\big\|_X \leqslant C_5 \|\vec{v}\|_X, \tag{12}$$

avec une constante C_5 indépendante de h. On démontre d'abord une condition *inf-sup locale* sur chaque hexaèdre $\mathcal{H}$ de $(\mathcal{T}_h)_h$. Pour cela, on associe à $q_h \in Q_{0,h}$ la fonction $q_{h|\mathcal{H}}^* = q_{h|\mathcal{H}} - \frac{1}{|\mathcal{H}|}(q_h, 1)_{0,\mathcal{H}}$ et on introduit les espaces : $Q_h^* = \{q_h^*\colon\ q_h \in Q_{0,h}\}$, $X_h^* = \{\vec{v}_h^* \in X_h\colon\ (\operatorname{div} \vec{v}_h^*, 1)_{0,T} = 0,\ \forall T \in \mathcal{T}_h\}$. On construit $\vec{v}_h^* \in X_h^*$ comme dans le Lemme 2.1. Mais en s'inspirant de [7], du fait que $q_h^* \in L_0^2(\mathcal{H})$, on remplace cette fois les inégalités de (10) par

$$\big(q_h^*, \operatorname{div} \vec{v}_h^*\big)_{0,\mathcal{H}} \geqslant C_3^* \|q_h\|_{0,\mathcal{H}}^2, \qquad \big|\vec{v}_h^*\big|_{1,\mathcal{H}} \leqslant C_4^* \|q_h\|_{0,\mathcal{H}}. \tag{13}$$

En sommant (13) sur tous les hexaèdres $\mathcal{H}$, on trouve :

$$\forall q_h^* \in Q_h^*,\ \exists \vec{v}_h^* \in X_h^* \text{ tel que } \left(q_h^*, \operatorname{div} \vec{v}_h^*\right)_0 \geqslant C_3^* \left\|q_h^*\right\|_0^2,\ \left\|\vec{v}_h^*\right\|_X = \left|\vec{v}_h^*\right|_1 \leqslant C_4^* \left\|q_h^*\right\|_0. \tag{14}$$

Au passage, on vient de démontrer la condition *inf-sup* sur (X_h^*, Q_h^*).

En se servant du nœud au milieu de l'arête dans chaque face de $\mathcal{H}$, comme pour la correction de ϱ ci-dessus, on construit ensuite un opérateur de régularisation $\mathcal{R}_h \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega)^3; X_{0,h})$ de type Scott et Zhang [9] qui a les mêmes propriétés d'approximation qu'un opérateur usuel d'interpolation et qui vérifie en plus

$$\left(\mathcal{R}_h(\vec{v}) - \vec{v}, 1\right)_{0,F} = 0, \text{ sur toutes les faces } F \text{ des hexaèdres de } \mathcal{T}_h. \tag{15}$$

Puis, on définit $\mathcal{P}_h$ en corrigeant $\mathcal{R}_h$: $\mathcal{P}_h(\vec{v}) = \mathcal{R}_h(\vec{v}) + \mathcal{C}_h(\vec{v})$, où $\mathcal{C}_h(\vec{v}) \in X_h^*$ est solution de :

$$\forall q_h^* \in Q_h^*,\ \left(q_h^*, \operatorname{div} \mathcal{C}_h(\vec{v})\right)_0 = \left(q_h^*, \operatorname{div}\left(\vec{v} - \mathcal{R}_h(\vec{v})\right)\right)_0. \tag{16}$$

Grâce à (14) (cf. [7, p. 118]), le système linéaire (16) admet une solution $\mathcal{C}_h(\vec{v}) \in X_h^*$ qui satisfait à :

$$\left\|\mathcal{C}_h(\vec{v})\right\|_X \leqslant \frac{C_4^*}{C_3^*} \left\|\operatorname{div}\left(\vec{v} - \mathcal{R}_h(\vec{v})\right)\right\|_0. \tag{17}$$

Avec les propriétés d'approximation de $\mathcal{R}_h$, (17) entraine que $\mathcal{P}_h$ vérifie (12b) ; enfin, les conditions sur les fonctions de Q_h^* et X_h^* entrainent que (16) a lieu pour tous les q_h de $Q_{0,h}$; donc $\mathcal{P}_h$ satisfait (12a). On a de nouveau prouvé le Théorème 2.2. Il permet de conclure à l'existence de la condition *inf-sup* discrète pour le champ magnétique, et bien sûr pour le système de Stokes en vitesse-pression. Et, en conclusion

THÉORÈME 2.3. – *Sous les hypothèses du Théorème* 2.2 *la paire d'espaces* (X_h, Q_h) *vérifie* (8).

Démonstration. – On reprend la preuve de la Proposition 1.2 : pour q_h appartenant à Q_h, on écrit $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$, comme en (5). Puis on choisit $\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}$ qui satisfasse à la condition *inf-sup* du Théorème 2.2 ; ou, ce qui est équivalent [7, p. 118], $\vec{v}_h^0 \in X_{0,h}$ tel que $(q_h^0, \operatorname{div} \vec{v}_h^0)_0 = \|q_h^0\|_0^2$, $\|\vec{v}_h^0\|_X \leqslant \frac{1}{\beta^0} \|q_h^0\|_0$. Enfin, on pose $\vec{v}_h = \alpha\, \vec{v}_h^0 + \bar{q}_h \varrho_h$, et on conclut ensuite avec $\alpha = {K_2}^2$. □

Références bibliographiques

[1] F. Assous, P. Ciarlet Jr., E. Garcia, Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charge dans un domaine singulier bidimensionnel, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 330 (2000) 391–396.

[2] F. Assous, P. Ciarlet Jr., E. Sonnendrücker, Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, Math. Mod. Num. Anal. 32 (1998) 359–389.

[3] F. Assous, P. Degond, E. Heintzé, P.-A. Raviart, J. Segré, On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations, J. Comput. Phys. 109 (1993) 222–237.

[4] F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer, New York, 1991.

[5] P.G. Ciarlet, Basic error estimates for elliptic problems, in : P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), Handbook of Numerical Analysis, Vol. II, North-Holland, 1991, pp. 17–351.

[6] M. Costabel, A coercive bilinear form for Maxwell's equations, J. Math. Anal. Appl. 157 (1991) 527–541.

[7] V. Girault, P.-A. Raviart, Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations, in : Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin, 1986.

[8] V. Girault, L.R. Scott, A quasi-local interpolation operator preserving the discrete divergence, soumis à Calcolo.

[9] L.R. Scott, S. Zhang, Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions, Math. Comput. 54 (1990) 483–493.

[10] R. Verfürth, Error estimate for a mixed finite element approximation of the Stokes problem, RAIRO Anal. Numér. 18 (1984) 175–182.

[11] C. Weber, A local compactness theorem for Maxwell's equations, Math. Meth. Appl. Sci. 2 (1980) 12–25.