C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1047–1052

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*
(Analyse harmonique/*Harmonic Analysis*)

Formule de trace sur une surface euclidienne à singularités coniques

Luc Hillairet

UMPA ENS-Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 7, France

Reçu le 10 octobre 2002 ; accepté le 15 octobre 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé On étudie l'équation des ondes sur une surface à singularités coniques. On montre notamment que la propagation des singularités se fait à l'aide de géodésiques éventuellement diffractives. On en déduit la relation de Poisson, qui fait apparaître les longueurs des géodésiques périodiques diffractives. ***Pour citer cet article : L. Hillairet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1047–1052.***

Trace formula on a Euclidean surface with conical singularities

Abstract We study the wave equation on a compact surface that has conical singularities. We show that the propagation of singularities involves geodesics that may go through one or many vertices. We then derive the Poisson relation which takes into account the lengths of diffractive closed geodesics. ***To cite this article: L. Hillairet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1047–1052.***

Abridged English version

This note aims at proving the trace formula on an Euclidean surface with conical singularities (s.e.s.c.) from which the same formula can be derived for polygonal billiards. In the general setting of the wave equation that is associated with a Laplacian Δ on a Riemannian manifold M, the trace formula consists in two types of results:

(1) the so-called "Poisson relation", which states that

$$\operatorname{supp.sing}\big(\operatorname{Tr}\big(U(t)\big)\big) \subset \mathbb{L},$$

where $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{\Delta}}$, and $\mathbb{L}$ is the length spectrum of M,

(2) the study of the singularity of $\operatorname{Tr}(U(t))$ at a length $L \in \mathbb{L}$.

This formula thus links the spectrum of Δ and some geometric quantities, and is interesting for the study of the inverse spectral problem, for instance. It is shown in [1,4] for a smooth Riemannian manifold.

Adresse e-mail : lhillair@umpa.ens-lyon.fr (L. Hillairet).

S1631-073X(02)02596-7/FLA

Here, we consider a compact manifold M that has the decomposition:

$$M = M_0 \cup \{p_1, \ldots, p_N\},$$

where M_0 is endowed with an Euclidean metric, and the $p_i' s$ are such that near each of them, M is locally isometric with a neighbourhood of the tip of an Euclidean cone. Such surfaces are studied in [6] and arise in the study of polygonal billiards.

By the Friedrichs construction, the Euclidean Laplacian, which is defined on $\mathcal{C}_0^\infty(M_0)$, has a selfadjoint extension that we note Δ. We also note $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{\Delta}}$ the propagator of the (half-)wave equation

$$\mathrm{i}\partial_t + \sqrt{\Delta} = 0.$$

In this singular setting, we extend the notion of singularity of a distribution and the notion of geodesics in such a manner that the theorem of propagation of singularities remains true.

THEOREM 0.1. – *For all initial value u_0, and $u(t) = U(t)u_0$:*

$$WF\big(u(t)\big) \subset \Lambda_t \circ WF(u_0),$$

with WF and Λ_t respectively defined in Sections 1.1 *and* 1.2.

This theorem heavily relies on the construction of the propagator on a cone, which is made in [2].

We then derive the Poisson relation from this theorem by performing the same wave-front computations as in the standard setting above M_0 and by studying precisely what happens at the vertices. We eventually show the following theorem, in which $\mathbb{L}$ also takes into account the lengths of the periodic geodesics passing through some vertices.

THEOREM 0.2. – *On a compact Euclidean surface with conical singularities,*

$$\text{supp.sing}\big(\mathrm{Tr}\big(U(t)\big)\big) \subset \mathbb{L}.$$

0. Introduction

Le but de cette Note est d'établir la formule de trace pour une surface euclidienne à singularités coniques (s.e.s.c.), dont on peut déduire celle pour un polygone euclidien (avec la condition de Dirichlet, ou de Neumann). Dans le contexte général de l'équation des ondes associée à un laplacien Δ sur une variété M, l'expression « formule de trace » recouvre deux types de résultats :

(1) la relation de Poisson :

$$\text{supp.sing}\big(\mathrm{Tr}\big(U(t)\big)\big) \subset \mathbb{L},$$

où $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{\Delta}}$, et $\mathbb{L}$ est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques et des opposés de ces dernières,

(2) l'étude des singularités de la distribution $\mathrm{Tr}(U(t))$. Pour cela on étudie le comportement asymptotique, quand s tend vers l'infini, de la quantité :

$$I_g(s) = \big\langle \mathrm{Tr}\big(U_g(t)\big), \exp(-\mathrm{i}ts) f(t)\big\rangle,$$

dans laquelle U_g est le propagateur microlocalisé au voisinage d'une géodésique périodique g, et f localise au voisinage de L, longueur de g.

Cette formule, qui relie le spectre de Δ à des quantités géométriques, est particulièrement intéressante, par exemple dans l'étude du problème spectral inverse. Cette formule est prouvée, sur une variété riemannienne lisse, dans les articles [1,4] ; notre but est de l'étendre aux surfaces avec singularités coniques. On ne s'intéressera ici qu'à la relation de Poisson. L'étude de la contribution des orbites périodiques diffractives sera faite ailleurs.

1. Contexte et résultats

On considère une surface compacte M, euclidienne à singularités coniques. Celle-ci se décompose de la façon suivante :

$$M = M_0 \cup \{p_1, \ldots, p_N\},$$

où M_0 est munie d'une structure euclidienne, et, au voisinage de chaque p_i, M est localement isométrique au cône euclidien d'angle α_i. On notera $P = \{p_1, \ldots, p_N\}$. De telles surfaces sont étudiées dans l'article [6] et interviennent de façon naturelle dans l'étude des billards polygonaux.

Le laplacien euclidien associé à la métrique définit sur $\mathcal{C}_0^\infty(M_0)$ un opérateur formellement autoadjoint positif ; il admet donc, par la construction de Friedrichs, une extension autoadjointe notée Δ. On désignera par $U(t)$ le propagateur de la demi-équation des ondes associée :

$$\mathrm{i}\partial_t + \sqrt{\Delta} = 0, \tag{1}$$

de telle sorte que $U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sqrt{\Delta}}$. Par la suite, on désignera l'équation précédente comme l'équation des ondes.

Comme dans le cadre non-singulier, la formule de trace dépend de la façon dont l'équation des ondes propage les singularités. On commence donc par montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1. – *Pour toute donnée initiale u_0, et $u(t) = U(t)u_0$* :

$$WF\big(u(t)\big) \subset \Lambda_t \circ WF(u_0),$$

où WF et Λ_t sont définis respectivement dans les Sections 1.1 *et* 1.2.

Dans le cadre non singulier, *WF* est le front d'onde et Λ_t la relation canonique associée au flot géodésique ; ce théorème exprime donc que les singularités sont transportées, par l'équation des ondes, le long des géodésiques. La difficulté réside ici principalement dans la manière dont il nous faut adapter les définitions de singularité et de géodésique en présence de points coniques. Le théorème découle alors de l'étude faite dans [2] de l'équation des ondes sur un cône.

La relation de Poisson résulte alors de ce théorème à l'aide, d'une part de calculs de fronts d'ondes similaires à ceux du cas non-singulier, d'autre part d'un examen précis du comportement près des p_i. On montre ainsi le théorème :

THÉORÈME 1.2. – *Sur une surface euclidienne compacte à singularités coniques* :

$$\text{supp.sing}\big(\mathrm{Tr}(U(t))\big) \subset \mathbb{L}.$$

1.1. Définition des singularités

Avant de passer à la notion de singularités on définit ce qu'est une fonction sans singularités (ou *lisse*). Pour cela, on introduit l'échelle des espaces de Sobolev associés à Δ :

$$\mathrm{H}^s_\Delta = \mathrm{dom}\big(\Delta^{s/2}\big), \qquad \mathrm{H}^\infty_\Delta = \bigcap_{s\geqslant 0} \mathrm{H}^s_\Delta.$$

Une fonction $u \in \mathrm{L}^2$ est alors dite *lisse* si $u \in \mathrm{H}_\Delta^\infty$. Cette notion est locale et u sera dite lisse au voisinage de m s'il existe une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty$ valant 1 au voisinage de m telle que ρu est lisse.

Remarque. – Le dual des fonctions lisses est l'espace des distributions pour notre problème, on le note $\mathrm{H}_\Delta^{-\infty}$.

Pour définir la notion de singularité au dessus de M_0, on pose $WF_0(u) \subset T^*(M_0)$: le front d'onde de u vue comme distribution de M_0 (cf. [3]).

Cette notion est insuffisante pour traiter ce qui se passe quand une singularité arrive sur un point conique. Pour prendre en compte ce phénomène, il faut commencer par définir T^*M au dessus de P. On choisit de compléter T^*M_0 par un point au dessus de chaque p_i. En effet, la propagation des ondes sur un cône présente deux caractéristiques importantes (cf. [2]) :
(1) une singularité arrivant au sommet du cône est réémise dans toutes les directions,
(2) une singularité arrivant au sommet du cône est instantanément et intégralement réémise ;
et ces deux points assurent que, tant qu'on ne considère que des solutions de l'équation des ondes, regarder les singularités de $u(t)$ au dessus de p revient à savoir si $u(t)$ est lisse au voisinage de p. Pour u dans $\mathrm{H}_\Delta^{-\infty}$, on définit L_u l'ensemble des p_i tels que u est lisse au voisinage de p, ce qui nous amène à la définition suivante :

DÉFINITION 1.3. – Le front d'onde d'un élément $u \in \mathrm{H}_\Delta^{-\infty}$ est défini par :

$$WF(u) = WF_0(u) \cup \{p \mid p \notin L_u\}.$$

De cette définition découle le fait suivant :

$$WF(u) = WF_0(u) \Leftrightarrow u \text{ est lisse au voisinage de } P.$$

1.2. Définition des géodésiques

En ce qui concerne les géodésiques, là aussi, la propagation des singularités sur le cône impose d'admettre qu'une géodésique arrivant sur un point conique se prolonge dans toutes les directions possibles. Ce qui donne la définition suivante :

DÉFINITION 1.4. – Une géodésique de longueur t est une application continue de $[0, t]$ dans M vérifiant les deux points suivants :
(1) l'ensemble $g^{-1}(P)$ est discret,
(2) en restriction à $[0, t] \setminus g^{-1}(P)$, g est une géodésique pour la métrique riemannienne de M_0, paramétrée à vitesse 1.

On notera Γ_t l'ensemble des géodésiques de longueur t.

On définit alors Λ_t dans $T^*M \times T^*M$ par :

$$\Lambda_t = Adh\big\{(m_1, m_0, \mu_1, \mu_0) \in T^*(M_0) \times T^*(M_0) \mid \exists g \in \Gamma_t, |\mu_0| = |\mu_1|,$$
$$g(0) = m_0, \mu_0 = |\mu_0|\big\langle g'(0), \cdot\big\rangle_{m_0}, g(T) = m_1, \mu_1 = |\mu_1|\big\langle g'(T), \cdot\big\rangle_{m_1}\big\}.$$

Remarque. – La géométrie de l'ensemble Λ_t représente la manière dont un front d'onde se propage sur la s.e.s.c. Celle-ci peut devenir assez compliquée du fait que toutes les géodésiques n'ont pas le même nombre de diffractions.

On note

$$\mathbb{L} = \{\pm L \mid \exists g \in \Gamma_L, \text{ périodique}\}.$$

Dans cet ensemble se trouvent aussi les longueurs des géodésiques périodiques diffractives.

To cite this article: L. Hillairet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1047–1052

2. Preuve du Théorème 1.1

Avec les définitions posées ci-dessus, le théorème de propagation des singularités sur un cône euclidien est vrai d'après l'article [2]. Pour passer à une s.e.s.c., on remarque tout d'abord que pour des temps petits, du fait que les singularités se propagent à vitesse finie, tout se passe comme si on était soit dans le plan, soit sur un cône, ce qui assure le résultat.

Le passage à des temps arbitrairement grands se fait d'une part en utilisant la propriété de groupe de $U(t)$, et d'autre part en utilisant le lemme suivant :

LEMME 2.1. – *Pour tous temps $t_1, t_2 > 0$,*

$$\Lambda_{t_1+t_2} = \Lambda_{t_1} \circ \Lambda_{t_2}.$$

Démonstration. – Elle consiste à mettre bout à bout une géodésique de longueur t_1 et une de longueur t_2. Si la jonction se fait au dessus de $p \in P$ la composition se fait alors automatiquement pour donner une géodésique de longueur $t_1 + t_2$. Si la jonction se fait au-dessus de M_0, la composition impose alors aux directions d'être compatibles et on obtient encore une géodésique de longueur $t_1 + t_2$.

3. Preuve du Théorème 1.2

Au dessus de M_0 le passage de la propagation des singularités à la relation de Poisson fait intervenir exactement les mêmes calculs que dans le cadre non-singulier.

Remarque. – On n'a pas inclus la dépendance en temps dans le théorème de propagation des singularités. Cette dernière est nécessaire pour obtenir la relation de Poisson. On la retrouve simplement en se plaçant au voisinage d'un temps t_0, et en écrivant $t = t_0 + s$. Utilisant la propriété de groupe, on a alors $U(t) = U(s)U(t_0)$, avec s petit et comme on est au-dessus de M_0, il suffit de propager Λ_{t_0} par le flot géodésique (bien défini pour des temps suffisamment petits).

Ainsi, pour une fonction χ, $\mathcal{C}^\infty$ nulle au voisinage de P, on a

$$WF\big(\mathrm{Tr}\big(U(t)\chi\big)\big) \subset \mathbb{L}.$$

Pour obtenir le Théorème 1.2, il suffit donc de savoir prendre la trace de $U(t)\rho$ pour une fonction ρ valant 1 au voisinage d'un point conique p, 0 au voisinage des autres, et $\mathcal{C}^\infty$ sur M_0.

La cyclicité de la trace va nous permettre de nous ramener à des opérateurs régularisants près des points coniques de telle sorte que, pour prendre la trace, on ne se préoccupera que de M_0.

Fixons un point conique p, un petit temps t_0, et $0 < \varepsilon < t_0$. Soient χ et ρ deux fonctions vérifiant les hypothèses suivantes (où $\mathcal{B}_M(m, r)$ désigne sur M la boule de centre m et de rayon r)

HYPOTHÈSES. –

- La fontion χ est lisse sur M_0, et vaut 1 sur un voisinage de

$$\overline{\mathcal{B}_M(p, t_0 + \varepsilon)} \setminus \mathcal{B}_M(p, t_0 - \varepsilon),$$

  et est nulle au voisinage des points coniques.
- La fonction ρ est lisse sur M_0, vaut 1 sur un voisinage de p et 0 hors de $\mathcal{B}(p, \varepsilon)$.

D'après l'étude sur le cône :

$$(1-\chi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0\sqrt{\Delta}}\rho \text{ est régularisant,} \tag{2}$$

$$\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0\sqrt{\Delta}}(1-\chi) \text{ est régularisant.} \tag{3}$$

Remarque. – La deuxième propriété est équivalente à la première en passant à l'adjoint et en changeant t_0 en $-t_0$.

D'un point de vue pratique, on fixe d'abord t_0 et χ, puis on choisit ensuite ε et ρ.

On veut évaluer la trace $\sigma_\rho(t) = \mathrm{Tr}(U(t)\rho)$. En utilisant la propriété de groupe de l'exponentielle et la cyclicité de la trace on peut la réécrire

$$\sigma_\rho(t) = \mathrm{Tr}\big(U(t-2t_0)U(t_0)\rho U(t_0)\big). \tag{4}$$

Mais, d'après les propriétés (2), et (3), l'égalité suivante est vraie, modulo un opérateur régularisant :

$$U(t_0)\rho U(t_0) = \chi U(t_0)\rho U(t_0)\chi.$$

On remplace $U(t_0)\rho U(t_0)$ dans (4), ce qui ne modifie σ_ρ que par une fonction $\mathcal{C}^\infty$. En écrivant $\rho = 1-(1-\rho)$, et en utilisant une dernière fois la propriété de groupe de l'exponentielle on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. – *Pour toutes fonction ρ et χ vérifiant les hypothèses précisées ci-dessus, la trace σ_ρ est donnée, modulo une fonction $\mathcal{C}^\infty$ par*

$$\sigma_\rho(t) = \mathrm{Tr}\big(U(t-2t_0)\chi U(2t_0)\chi\big) - \mathrm{Tr}\big(U(t-2t_0)\chi U(t_0)(1-\rho)U(t_0)\chi\big). \tag{5}$$

Dans cette dernière égalité, toutes les fonctions de troncature valent 0 près des points coniques, et on est donc ramené à des calculs de fronts d'ondes au dessus de M_0, identiques à ceux de [1,4].

Conclusion

La preuve de la relation de Poisson, que l'on vient de proposer présente l'avantage de tout ramener à des calculs de fronts d'ondes au-dessus de M_0. C'est aussi pour cette raison qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une définition du front d'onde plus précise au-dessus de P. Pour obtenir la contribution des orbites périodiques diffractives il faut étudier plus en détail la manière dont les singularités se propagent sur une s.e.s.c. ; il faut notamment décrire précisément le propagateur au voisinage d'une géodésique.

Remerciements. Je remercie chaleureusement Yves Colin de Verdière ; les résultats présentés ici sont une partie de la thèse que j'ai menée sous sa direction (cf. [5]).

Références bibliographiques

[1] J. Chazarain, Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes, Invent. Math. 24 (1974) 65–82.
[2] J. Cheeger, M. Taylor, On the diffraction of waves by conical singularities, I and II, Comm. Pure. Appl. Math. 35 (1982) 275–331, 487–529.
[3] J.J. Duistermaat, Fourier Integral Operators, in: Prog. Math., Birkhäuser, 1996.
[4] J.J. Duistermaat, V.W. Guillemin, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math. 29 (1975) 39–79.
[5] L. Hillairet, Contribution d'orbites périodiques diffractives à la formule de trace, Thèse de Doctorat, Institut Fourier, Grenoble, 2002, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/ps/t117.ps.gz.
[6] M. Troyanov, Les surfaces euclidiennes à singularités coniques, Enseign. Math. 32 (1986) 79–94.