C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 903–908

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Explosion et normes L^p pour l'équation des ondes nonlinéaire cubique

Gilles Cabart, Satyanad Kichenassamy

Laboratoire de mathématiques, Université de Reims Champagne-Ardenne et CNRS (UMR 6056), Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France

Reçu et accepté le 11 octobre 2002

Note présentée par Haïm Brezis.

Résumé On construit des solutions explosives d'équations d'onde avec non linéarité cubique, en dimension $n \geqslant 1$. Leur norme L^p explose si la surface d'explosion admet un minimum intérieur non dégénéré et $p \geqslant n/2$. Si le second membre est peu régulier et $0 < \varepsilon < 1$, on donne des exemples tels que la norme L^p explose si $p \geqslant n/(1+\varepsilon)$; leurs données ne sont pas L^∞ mais l'explosion n'est pas instantanée. Des applications en optique non linéaire sont brièvement mentionnées. ***Pour citer cet article : G. Cabart, S. Kichenassamy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 903–908.***

Blow-up and L^p norms for the cubic nonlinear wave equation

Abstract We find blow-up solutions of nonlinear wave equations with cubic nonlinearity, in any number of space dimensions, and study the asymptotic behavior of their L^p norms and "energy". The L^p norm blows up if the blow-up surface has an interior non-degenerate minimum and $p \geqslant n/2$. For less smooth right-hand sides, and $0 < \varepsilon < 1$, we give examples for which the L^p norm blows up if $p \geqslant n/(1+\varepsilon)$; their Cauchy data are unbounded, but blow-up is not instantaneous. Applications to nonlinear optics are briefly outlined. ***To cite this article: G. Cabart, S. Kichenassamy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 903–908.***

Abridged English version

1. Introduction

In 1984, Brezis [3] raised the question of finding, for a given solution of the cubic nonlinear wave equation

$$u_{tt} - \Delta u = 2u^3, \tag{1}$$

Adresses e-mail : gilles.cabart@univ-reims.fr (G. Cabart); satyanad.kichenassamy@univ-reims.fr (S. Kichenassamy).

S1631-073X(02)02606-7/FLA

with Dirichlet boundary condition, on a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, the l.u.b. $q_0(u)$ of the set of exponents p such that the L^p norm of u blows up. More precisely, if $n \leqslant 3$, one has local existence and uniqueness of classical solutions for data in $\mathrm{H}^2 \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$; they persist as long as they do not blow up in $\mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{L}^2(\Omega)$; the integral

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[u_t^2 + |\nabla u|^2 - u^4\right] \mathrm{d}x \tag{2}$$

is bounded (in fact, constant); the Gagliardo–Nirenberg inequality shows that blow-up in $\mathrm{H}^1_0 \times \mathrm{L}^2(\Omega)$ implies blow-up in L^p if $p > n$. Thus, $q_0(u) \leqslant n$ if $n \leqslant 3$. We will restrict attention to the case Ω is the unit ball B and the first singularity first appears for $t = 0$, at the center of B.

It is both natural and convenient to consider the forced problem

$$u_{tt} - \Delta u = 2u^3 + F(x,t), \quad x \in B \text{ and } -1 < t < 0, \tag{3}$$

$$u = \varphi(x,t), \quad x \in \partial B \text{ and } -1 < t < 0, \tag{4}$$

$$(u, u_t) = \big(f(x), g(x)\big), \quad \text{for } t = -1. \tag{5}$$

Indeed, in applications or numerical work one must often allow for the presence of "noise" of limited regularity on the r.h.s., and, as we shall see, such noise may affect the blow-up behavior.

In a nutshell, the results of this paper are: $q_0 = n$ for data and r.h.s. of low regularity, but $q_0 = n/2$ for smooth and "generic" data and r.h.s.

In all our examples, $\varphi(x,t)$ is at least C^2 and u blows up for $x = 0$, $t = 0$. By defining F through $F = u_{tt} - \Delta u - 2u^3$, one generates explicit examples demonstrating in particular that

(1) If the blow-up surface is smooth, $q_0 \leqslant n/2$ (Theorem 2.1).
(2) If $n > 12$, one can find $F(x,t)$ continuous with values in L^2, and classical solutions with $q_0 = n/(1+\varepsilon)$ for every $\varepsilon \in \,]0,1[$ (Theorems 2.2 and 2.3).

Both classes of examples are obtained by truncating series

$$T^{-1}\left\{u_0(x) + u_1(x)T + u_2(x)T^2 + \sum_{0 \leqslant k \leqslant j,\ j \geqslant 3} u_{j,k}(x)T^j(\ln T)^k\right\}, \tag{6}$$

with $T = t - \psi(x)$, $|\nabla\psi| < 1$, given by the method of Fuchsian reduction [4–7]. These expansions have the same level of generality as the Taylor expansion of solutions of the Cauchy problem. One can give a geometric interpretation for the first few coefficients of expansion (6) at the first blow-up point.

In case ψ is smooth, the so-called "energy integral" (2), integrated over $|x| < |t|$, remains finite at blow-up if ψ is flat to second order (Theorem 3.1).

Finally, one indicates how the series (6) must be modified if the nonlinearity is $2u|u|^2$ and u is complex; this case is directly relevant to nonlinear optics (Theorem 5.1).

1.1. Earlier results in $\mathbb{R}^n$

For background on L^p estimates, see Strauss [9].

Lindblad and Sogge [8] solve the problem in $\dot{\mathrm{H}}^s \times \dot{\mathrm{H}}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, with $s = \frac{n}{2} - 1$ if $n \geqslant 4$, and find uniqueness under an additional condition in spaces of the form $\mathrm{L}^r_t(\mathrm{L}^s_x)$ (with $r < \infty$).

Merle and Antonini [1] give upper bounds on the focusing of L^2 and H^1 norms if $n = 1$.

2. Theorems

THEOREM 2.1. – *For every integer $m \geqslant 1$, there is a problem of the form* (3)–(5) *with f, g, F, φ of class C^∞ for which $q_0 = n/2m$. There are also problems for which u blows up uniformly on a proper subset of B with non-empty interior, and for which $q_0 = 0$.*

Note that $u(x,t) = u_0(x)/T + v(x,t)$, with $T = t - \psi(x)$, where $\psi \geqslant 0$, $v \in \mathrm{C}^2$ and solves a Fuchsian PDE which is fully equivalent to the original equation. On the other hand, u_0/T is not in L^1 for any positive t, so that u has no continuation after blow-up, but v does.

We will say that "u is a classical solution" if $u \in \bigcap_{k=0}^{2} \mathrm{C}^k([-1,0); \mathrm{H}^{2-k}(B))$, u^3 is uniformly bounded in $\mathrm{L}^2(B)$ and $F \in C([-1,0]; \mathrm{L}^2(B))$, the equation holds in the sense of distributions and u has finite energy.

THEOREM 2.2. – *If $\varepsilon \in (0,1)$ and $n > \max(12 - 12\varepsilon, 6 + 6\varepsilon)$, there is a problem of the form* (3)–(5) *with a classical solution such that $q_0 = n/(1+\varepsilon)$.*

THEOREM 2.3. – *If $\varepsilon \in (0,1)$ and $n > 6 + 6\varepsilon$, there is also a problem of the form* (3)–(5) *with a classical solution which is bounded for every $t < 0$, and such that $q_0 = n/(1+\varepsilon)$.*

Let us now say that "u is a solution in H^1" if $u \in \bigcap_{k=0}^{1} \mathrm{C}^k([-1,0); \mathrm{H}^{1-k}(B))$, u^3, Δu et u_{tt} are uniformly bounded in $\mathrm{L}^1(B)$, $F \in \mathrm{C}([-1,0]; \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{H}^{-1}(B))$ and u solves Eq. (3).

THEOREM 2.4. – *If $\varepsilon \in (0,1)$ and $n > 4 + 4\varepsilon$, there is a problem of the form* (3)–(5) *with a solution in H^1 which is bounded in space for every $t < 0$, and for which $q_0 = n/(1+\varepsilon)$; it blows up in H^2 if $n = 5$ and $\varepsilon < 1/4$.*

3. Application to concentration of energy

Consider a solution of the form (6) with ψ of class C^∞.

Call $E(\alpha)$ the integral of the energy of u at time $-\alpha$ over the ball of center 0 and radius α.

THEOREM 3.1. – *One has $E(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^{n-4})$ as $\alpha \downarrow 0$. If $\nabla\psi(0) = 0$, then $E(\alpha) \sim -\frac{|B|}{3}\alpha^{n-3}\Delta\psi(0)$. If the second-order derivatives of ψ at the origin also vanish, $E(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^{n-1})$.*

4. Instability of blow-up

In the holomorphic case, one can express our solutions as limits of smooth solutions of a related system: in (6), replace ψ by $\psi \pm \mathrm{i}\nu$, and separate real and imaginary parts; this yields smooth real solutions $(u_{\pm,\nu}, v_{\pm,\nu})$ of a system of nonlinear wave equations. For $t \neq \psi(x)$, $u_{\pm,\nu}$ converge, as $\nu \downarrow 0$, uniformly on every compact, to a function $u_\pm$ which coincides with the blow-up solution considered here for $t < \psi(x)$.

As a concrete application, it may be useful in numerical computations to add systematically a small imaginary part to the Cauchy data.

5. Case of Kerr nonlinearity

Nonlinear optics requires replacing $2u^3$ by $2u|u|^2$ with complex-valued u.

THEOREM 5.1. – *For such nonlinearities, expansion* (6) *must be modified by the addition of terms $u_{2,1}T^2 \ln T$. Coefficients may be complex, and are completely determined by ψ, the argument of u_0, the imaginary part of u_2/u_0 and the real part of $u_{3,0}/u_0$.*

---

1. Introduction

En 1984, Brezis [3] a soulevé la question de déterminer, pour une solution donnée de l'équation des ondes cubique

$$u_{tt} - \Delta u = 2u^3, \tag{1}$$

avec condition de Dirichlet, sur un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, la borne inférieure $q_0(u)$ des exposants p tels que la norme L^p de u explose en temps fini. Plus précisément, si $n \leqslant 3$, on dispose de l'existence locale et de l'unicité de solutions classiques pour des données dans $H^2 \times H_0^1(\Omega)$; elles existent tant qu'elles n'explosent pas dans $H_0^1 \times L^2(\Omega)$; la quantité

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[u_t^2 + |\nabla u|^2 - u^4\right] \mathrm{d}x \tag{2}$$

reste bornée (en fait, constante) ; l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg permet d'exclure l'explosion dans H^1 si u reste bornée dans L^p pour un $p > n$. Par suite, $q_0(u) \leqslant n$ pour les solutions H^1 si $n \leqslant 3$. Pour fixer les idées, on ne considérera que le cas où $\Omega = B$, boule unité de $\mathbb{R}^n$, et l'explosion se produit d'abord au centre, pour $t = 0$.

Il est à la fois commode et naturel de considérer le problème plus général

$$u_{tt} - \Delta u = 2u^3 + F(x,t), \quad x \in B \text{ et } -1 < t < 0, \tag{3}$$

$$u = \varphi(x,t), \quad x \in \partial B \text{ et } -1 < t < 0, \tag{4}$$

$$(u, u_t) = \big(f(x), g(x)\big), \quad \text{pour } t = -1. \tag{5}$$

En effet, dans toute application ou calcul numérique, on doit souvent admettre la possibilité d'un « bruit » peu régulier au second membre, et l'on va voir que ce bruit peut modifier qualitativement l'explosion.

En deux mots, on montre que $q_0 = n$ pour des données et seconds membres peu réguliers, mais que $q_0 = n/2$ pour des données et seconds membres réguliers et « génériques ».

Dans tous nos exemples, $\varphi(x,t)$ sera au minimum de classe C^2 et l'explosion se produira en $x = 0$ et $t = 0$. En définissant F par $F = u_{tt} - \Delta u - 2u^3$ on obtient des exemples explicites montrant en particulier que

(1) Si la surface d'explosion est régulière, $q_0 \leqslant n/2$ (Théorème 2.1).
(2) Si $n > 12$, on peut trouver $F(x,t)$ continue à valeurs dans L^2, et des solutions classiques avec $q_0 = n/(1+\varepsilon)$ pour chaque $\varepsilon \in]0, 1[$ (Théorèmes 2.2 et 2.3).

Les deux types d'exemples sont obtenus en tronquant les séries

$$T^{-1}\left\{u_0(x) + u_1(x)T + u_2(x)T^2 + \sum_{0 \leqslant k \leqslant j,\ j \geqslant 3} u_{j,k}(x)T^j(\ln T)^k\right\}, \tag{6}$$

avec $T = t - \psi(x)$, $|\nabla\psi| < 1$, fournies par la méthode de réduction fuchsienne [4–7], qui conduit aux développements singuliers les plus généraux possibles pour des singularités en $1/T$, tout comme le développement de Taylor représente les solutions régulières les plus générales.

Dans le premier cas, la solution est C^2 pour $t < t_{\max} = \inf_x \psi$, alors que dans le second cas, les données de Cauchy admettent une singularité en $x = 0$ qui ne conduit pas à une explosion immédiate. On montre aussi dans ce cas que la solution est dans certains cas *plus régulière* à l'instant d'explosion qu'initialement.

Le Théorème 2.4 donne aussi des exemples de solutions H^1 qui ne sont pas nécessairement H^2. Ces résultats admettent de nombreuses variantes et généralisations qui seront explorées dans un travail ultérieur.

Le Théorème 3.1 montre que dans le cas où ψ est régulière, l'intégrale (2) (dite « d'énergie »), intégrée pour $|x| < |t|$ reste finie à l'explosion si ψ est plate au second ordre : cette énergie ne se focalise pas au premier point d'explosion. De plus, il est remarquable que l'on puisse prédire la valeur de $\Delta\psi(0)$ à partir d'intégrales sur le cône de lumière, qui pourtant ne rencontre la surface d'explosion qu'en un point.

En dimension quelconque, on peut en fait donner une interprétation géométrique aux premiers coefficients du développement (6) au premier point d'explosion ; ainsi, u_1 est proportionnel à la courbure moyenne de la surface d'explosion.

Enfin, on indique brièvement les modifications essentielles à apporter au développement si la nonlinéarité a la forme $2u|u|^2$ qui intervient en optique non linéaire. Il y a alors deux nouvelles fonctions arbitraires, dont l'une dans le premier terme du développement (Théorème 4.1).

To cite this article: G. Cabart, S. Kichenassamy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 903–908

1.1. Autres résultats antérieurs dans $\mathbb{R}^n$

Sur les premières estimations L^p pour l'équation des ondes, voir Strauss [9]. Grâce à la vitesse finie de propagation, les résultats dans $\mathbb{R}^n$ fournissent quelques renseignements sur l'explosion à l'intérieur.

Lindblad et Sogge [8] résolvent le problème dans $\dot{\mathrm{H}}^s \times \dot{\mathrm{H}}^{s-1}(\mathbb{R}^n)$, avec $s = \frac{n}{2} - 1$ si $n \geqslant 4$, et obtiennent l'unicité sous une condition supplémentaire dans des espaces $\mathrm{L}_t^r(\mathrm{L}_x^s)$ (avec $r < \infty$). On notera que l'explosion dans L^n entraîne celle dans $\mathrm{H}^{n/2-1}$.

Merle et Antonini [1] obtiennent des bornes supérieures sur la vitesse de focalisation dans L^2 et dans H^1 si $n = 1$ (i.e., $\int_{|x|<|t|} (|u|^2 + |\nabla u|^2)\,\mathrm{d}x$ si la première singularité apparaît en $x = 0$ pour $t = 0$).

Rappelons aussi qu'il existe des techniques générales pour étudier la création et propagation de singularités plus faibles, pour lesquelles u reste bornée (voir p. ex. Bony [2]).

2. Théorèmes

THÉORÈME 2.1. – *Pour chaque entier $m \geqslant 1$, il existe un problème de la forme* (3)–(5)*, avec f, g, F, φ de classe C^∞ pour lequel $q_0 = n/2m$. Il existe aussi des solutions avec explosion sur un sous-ensemble strict de B, d'intérieur non vide, pour lesquelles $q_0 = 0$.*

Ces solutions ont la forme $u(x,t) = u_0(x)/T + v(x,t)$, avec $T = t - \psi(x)$, $\psi \geqslant 0$, $\psi \in \mathrm{C}^\infty$, $v \in \mathrm{C}^2$ et est solution d'une équation fuchsienne, laquelle est complètement équivalente au problème initial. Comme $u_0(x)/T$ n'est dans L^1 pour aucun $t > 0$, on voit que u, contrairement à v, ne se prolonge jamais dans L^1.

On donne maintenant des exemples de solutions moins régulières.

On conviendra de dire que « u est solution classique » si $u \in \bigcap_{k=0}^2 \mathrm{C}^k([-1,0[;\mathrm{H}^{2-k}(B))$, u^3 est uniformément bornée dans $\mathrm{L}^2(B)$ et $F \in \mathrm{C}([-1,0];\mathrm{L}^2(B))$, u est d'énergie finie et vérifie l'équation au sens des distributions ; F n'explose donc dans L^2 pour aucune valeur de t, négative ou nulle.

THÉORÈME 2.2. – *Si $\varepsilon \in]0,1[$ et $n > \max(12 - 12\varepsilon, 6 + 6\varepsilon)$, il existe un problème de la forme* (3)–(5)*, avec une solution classique pour laquelle $q_0 = n/(1+\varepsilon)$.*

Remarque 1. – $u(t) \in \mathrm{L}^p$ pour $t < 0$ si $p < n/(2-2\varepsilon)$.

Remarque 2. – Si n est impair, $\varepsilon < 1/3$, et si $\frac{n}{2} - 2 + 2\varepsilon \leqslant k < \frac{n}{2} - 1 - \varepsilon$, alors $u(t) \notin \mathrm{H}^k$ pour $t < 0$, mais $u(t) \in \mathrm{H}^k$ pour $t = 0$: la solution est (instantanément) plus régulière au temps d'explosion qu'elle ne l'était avant.

Remarque 3. – Si l'on exige seulement que $\|F(t)\|_{\mathrm{L}^1}$ et $\|u^3(t)\|_{\mathrm{L}^1}$ soient bornées pour $t \leqslant 0$, on peut trouver des solutions telles que $q_0 = n/(1+\varepsilon)$ si $n > \max(6 + 6\varepsilon, 8 - 4\varepsilon)$.

THÉORÈME 2.3. – *Si $\varepsilon \in]0,1[$ et $n > 6 + 6\varepsilon$, il existe aussi un problème de la forme* (3)–(5) *avec une solution classique qui est bornée pour chaque $t < 0$, et pour laquelle $q_0 = n/(1+\varepsilon)$.*

On dira de même que « u est solution H^1 » si $u \in \bigcap_{k=0}^1 \mathrm{C}^k([-1,0[;\mathrm{H}^{1-k}(B))$, u^3, Δu et u_{tt} sont uniformément bornées dans $\mathrm{L}^1(B)$, $F \in \mathrm{C}([-1,0];\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{H}^{-1}(B))$, et u est solution de l'équation.

THÉORÈME 2.4. – *Si $\varepsilon \in]0,1[$ et $n > 4 + 4\varepsilon$, il existe un problème de la forme* (3)–(5) *avec une solution H^1 qui est bornée pour chaque $t < 0$, et pour laquelle $q_0 = n/(1+\varepsilon)$; elle explose dans H^2 si $n = 5$ et $\varepsilon < 1/4$.*

3. Application à la concentration de l'énergie

Considérons une solution de la forme (6) avec ψ de classe C^∞.

Soit $E(\alpha)$ l'intégrale de l'énergie de u au temps $-\alpha$ sur la boule de centre 0 et de rayon α. Alors

THÉORÈME 3.1. – *On a* $E(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^{n-4})$ *quand* $\alpha \downarrow 0$. *Si* $\nabla\psi(0) = 0$, *alors*

$$E(\alpha) \sim -\frac{|B|}{3}\alpha^{n-3}\Delta\psi(0).$$

Si en outre les dérivées d'ordre deux de ψ *sont aussi nulles,* $E(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^{n-1})$.

Ceci montre que cette « énergie » ne se concentre pas au premier point d'explosion si ψ est assez plate.

4. Instabilité de l'explosion

Dans le cas analytique, les solutions (6) peuvent s'écrire comme limites de solutions sans singularité : on remplace ψ par $\psi \pm \mathrm{i}\nu$, et l'on sépare les parties réelle et imaginaire, $(u_{\pm,\nu}, v_{\pm,\nu})$, obtenant ainsi une solution régulière du système que vérifient ces deux composantes. Lorsque $t \neq \psi(x)$, les $u_{\pm,\nu}$ réelles tendent uniformément sur tout compact vers une fonction $u_\pm$ qui prolonge la solution explosive.

Comme application concrète, on peut suggérer de calculer numériquement les solutions explosives en rajoutant une petite partie imaginaire aux données de Cauchy.

5. Cas de la nonlinéarité de Kerr

L'optique non linéaire conduit à des nonlinéarités cubiques de la forme $2u|u|^2$ avec u complexe.

THÉORÈME 5.1. – *Pour de telles nonlinéarités, le développement* (6) *doit aussi contenir un terme* $u_{2,1}T^2\ln T$. *Les coefficients sont complexes, et sont déterminés par* ψ, *l'argument de* u_0, *la partie imaginaire de* u_2/u_0 *et la partie réelle de* $u_{3,0}/u_0$.

On peut aussi déterminer certaines combinaisons de la solution et de ses dérivées qui restent finies à l'explosion.

Références bibliographiques

[1] C. Antonini, F. Merle, Optimal bounds on positive blow-up solutions for a semilinear wave equation, Internat. Math. Res. Notices 21 (2001) 1141–1167.
[2] J.-M. Bony, Interaction des singularités pour les équations de Klein–Gordon non linéaires, Séminaire Goulaouic–Meyer–Schwartz 1983–1984, École Polytechnique, 17 janvier 1984.
[3] H. Brezis, Notes de cours de DEA (Univ. Paris VI, non publié) 1984.
[4] S. Kichenassamy, W. Littman, Blow-up surfaces for nonlinear wave equations, I et II, Comm. Partial Differential Equations 18 (1993) 431–452, 1869–1899.
[5] S. Kichenassamy, Fuchsian equations in Sobolev spaces and blow-up, J. Differential Equations 125 (1996) 299–327.
[6] S. Kichenassamy, The blow-up problem for exponential nonlinearities, Comm. Partial Differential Equations 21 (1996) 125–162.
[7] S. Kichenassamy, Stability of blow-up patterns for nonlinear wave equations, Contemp. Math. 255 (2000) 139–162.
[8] H. Lindblad, C. Sogge, On existence and scattering with minimal regularity for nonlinear wave equations, J. Funct. Anal. 130 (1995) 357–426.
[9] W. Strauss, Nonlinear Wave Equations, in: CBMS Lecture Notes, Vol. 73, American Mathematical Society, Providence, 1989.