C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1003–1006

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

Suites de Godbillon–Vey et intégrales premières

Guy Casale

Laboratoire E.Picard Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

Reçu et accepté le 22 octobre 2002

Note présentée par Bernard Malgrange.

Résumé Nous montrons qu'une 1-forme sur un corps différentiel de caractéristique nulle admet une intégrale première d'un type de transcendance particulier (appellé Riccati) si et seulement si cette forme admet une suite de Godbillon–Vey de longueur 3 sur ce corps. ***Pour citer cet article : G. Casale, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1003–1006.***

Godbillon–Vey sequences and first integrals

Abstract We prove that a 1-form on a zero characteristic differential field admits a first integral with a special type of transcendance (Riccati type) if and only if it admits a Godbillon–Vey sequence of length 3 on this field. ***To cite this article: G. Casale, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1003–1006.***

0. Notation

M est un corps différentiel de caractéristique nulle, de dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_l$ qui commutent et sont linéairement indépendantes. Le dual du M-module des dérivations sera Ω^1_M le M-module des 1-formes différentielles de M. Soit K une extension différentielle de M ; nous noterons $\Omega^1_K = K \otimes_M \Omega^1_M$.

1. Introduction

Une suite de Godbillon–Vey sur K pour une 1-forme ω est une suite de 1-formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ appartenant à Ω^1_K telle que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \omega \wedge \omega_1, \\
\mathrm{d}\omega_1 &= \omega \wedge \omega_2, \\
\mathrm{d}\omega_n &= \omega \wedge \omega_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \omega_k \wedge \omega_{n-k+1}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1 (voir [1]). –

– Si ω admet une suite de Godbillon–Vey alors elle est intégrable ($\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$).

Adresse e-mail : casale@picard.ups-tlse.fr (G. Casale).

S1631-073X(02)02619-5/FLA

- Réciproquement si ω est intégrable alors pour toute dérivation X telle que $\omega(X)=1$, la suite définie par $\omega_1 = L_X\omega$ et $\omega_{i+1} = L_X\omega_i$ est une suite de Godbillon–Vey pour ω.
- Si ω admet une suite de Godbillon–Vey $\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots$ alors la suite $\omega_1 + \frac{\mathrm{d}f}{f},\ldots,\frac{1}{f^{n-1}}\omega_n,\ldots$ est une suite de Godbillon–Vey pour la forme $f\omega$.

Nous regarderons les formes admettant une suite de longueur finie (une suite est dite de longueur p si $\omega_i = 0$ pour $i \geqslant p$).

PROPOSITION 1.2. – *Étant donnée une équation aux dérivées partielles* $\mathrm{d}G + \frac{G^n}{n!}\gamma_n + \cdots + \gamma_0 = 0$ *avec γ_i dans Ω^1_K, si cette équation admet une solution G dans une extension différentielle de K et si G est transcendante sur K alors les γ_i forment une suite de Godbillon–Vey pour γ_0.*

Démonstration. – L'existence d'une solution implique que

$$0 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}G = \sum_i G^i \left(\frac{\mathrm{d}\gamma_i}{i!} - \sum_{p+q=i} \frac{\gamma_p \wedge \gamma_{q+1}}{p!q!} \right).$$

Si cette solution est transcendante, nous obtenons une suite de Godbillon–Vey de longueur $n+1$ pour γ_0. □

Plus précisement, nous nous intéresserons au formes ω admettant des suites de Godbillon–Vey de longueur 2 ou 3. Une intégrale première de ω est un élément H d'une extension différentielle de M vérifiant $\mathrm{d}H \wedge \omega = 0$.

DÉFINITION 1.3. – Une extension différentielle sera dite Liouvillienne si elle est obtenue par une suite d'extensions du type $K \subset K(G)$ avec G algébrique ou transcendant vérifiant $\mathrm{d}G = G\gamma_1 + \gamma_0$ avec γ_1 et γ_0 dans Ω^1_K. Les éléments d'une telle extension seront dit Liouvillien.

Les relations entre l'existence d'une suite de Godbillon–Vey de longueur finie et l'existence d'une intégrale première d'un type de transcendance particulier ont été étudiées par M. Singer dans [2] où il montre :

THÉORÈME 1.4. – *Un forme ω dans Ω^1_M admet une suite de Godbillon–Vey de longueur* 2 *sur M si et seulement si elle admet une intégrale première Liouvillienne.*

Dans sa thèse [3], F. Touzet donne une preuve plus élémentaire de ce théorème due à J.P. Rollin. Nous nous proposons de redémontrer dans un premier temps ce théorème en utilisant la Proposition 1.2 puis d'étendre ce résultat aux suites de longueur 3 :

DÉFINITION 1.5. – Une extension différentielle sera dite de type Riccati si elle est obtenue par une suite d'extensions du type $K \subset K(G)$ avec G algébrique ou transcendant tel que $\mathrm{d}G = \frac{G^2}{2}\gamma_2 + G\gamma_1 + \gamma_0$ avec γ_2, γ_1 et γ_0 dans Ω^1_K. Les éléments d'une telle extension seront dit de type Riccati.

THÉORÈME 1.6. – *Une forme ω dans Ω^1_M admet une suite de Godbillon–Vey de longueur* 3 *sur M si et seulement si elle admet une intégrale première de type Riccati.*

2. Une nouvelle preuve du théorème de M. Singer

LEMME 2.1. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$, $M \subset K \subset K_1$ telle que K_1 soit algébrique sur K. Si ω admet une suite de Godbillon–Vey de longueur* 2 *sur K_1 alors elle en admet une sur K.*

Démonstration. – Soit $\widetilde{K_1}$ la cloture normale de K_1. En faisant agir un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K_1}/K)$ sur les relations de la suite de Godbillon–Vey , nous obtenons :

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \sigma(\omega_1),$$
$$\sigma(\mathrm{d}\omega_1) = \mathrm{d}\big(\sigma(\omega_1)\big) = 0.$$

La moyenne des $\sigma(\omega_1)$ pour tous les σ dans $\mathrm{Gal}(\widetilde{K_1}/K)$ nous fournit une suite de Godbillon–Vey de longueur 2 dans K. □

LEMME 2.2. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$ et $K(G)$ une extension de $K \supset M$ par G vérifiant $\mathrm{d}G = G\gamma_1 + \gamma_0$. Si ω admet une suite de Godbillon–Vey de longueur 2 sur $K(G)$ alors elle en admet une sur K.*

Démonstration. – Nous pouvons supposer que G est transcendante sur K et écrire ω_1 sous la forme $N(G)/D(G)$ avec $N \in \Omega^1_K[X]$ et $D \in K[X]$. Nous allons distinguer deux cas suivant que le degré de D soit positif ou nul.

1-le degré de D est positif.

Le Lemme 2.1 nous permet de supposer que le corps K contient une racine g de D. Nous nous plaçons en cette racine en faisant le changement d'inconnue $H = G - g$. Comme

$$\mathrm{d}H = H\gamma_1 + g\gamma_1 + \gamma_0 - \mathrm{d}g = H\widetilde{\gamma_1} + \widetilde{\gamma_0},$$

la transcendance de H sur K assure que $\widetilde{\gamma_0}$, $\widetilde{\gamma_1}$ forment une suite de Godbillon–Vey. La forme ω_1 est une expression rationnelle en H et en effectuant la division suivant les puissances croissantes nous obtenons $\omega_1 = \frac{1}{H^n}\alpha_{-n} + \cdots$ avec $n > 0$ et $\alpha_i \in \Omega^1_K$.

L'équation $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega_1$ implique que $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \alpha_0$ et $\omega \wedge \alpha_{-n} = 0$ et l'équation $\mathrm{d}\omega_1 = 0$ implique que $\alpha_{-n} \wedge \widetilde{\gamma_0} = 0$ et $\mathrm{d}\alpha_0 + \alpha_1 \wedge \widetilde{\gamma_0} = 0$. Si $\widetilde{\gamma_0}$ est non nulle, nous en déduisons que ω est un multiple de $\widetilde{\gamma_0}$ donc la suite de Godbillon–Vey sur K de $\widetilde{\gamma_0}$ en fournit une pour ω. Si $\widetilde{\gamma_0}$ est nulle, α_0 convient.

2-le degré de D est nul.

Dans ce cas, $\omega_1 = G^r\alpha_r + \cdots + \alpha_0$. L'équation $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega_1$ implique que $\omega \wedge \alpha_r = 0$ donc qu'il existe $F \in K$ telle que $\alpha_r = F\omega$. L'équation $\mathrm{d}\omega_1 = 0$ implique que $\mathrm{d}\alpha_r + r\alpha_r \wedge \widetilde{\gamma_1} = 0$. Un multiple de ω admet une suite de Godbillon–Vey sur K de longueur 2, il en est donc de même pour ω. □

Preuve du Théorème 1.4. – Soit H une intégrale première de ω dans un corps K extension Liouvillienne de M. Par définition il existe F dans K tel que $\mathrm{d}H = F\omega$ d'où $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \frac{\mathrm{d}F}{F}$, $\omega_1 = \frac{\mathrm{d}F}{F}$ est une suite de Godbillon–Vey de longueur 2 sur K pour ω. Par récurrence sur la longueur de l'extension, le Lemme 2.2, nous permets de trouver une suite de Godbillon–Vey de longueur 2 sur M. Réciproquement, à partir d'une suite de Godbillon–Vey ω, ω_1 de longueur 2 on construit une intégrale première de ω en résolvant successivement les équations $\mathrm{d}F = F\omega_1$ puis $\mathrm{d}H = F\omega$. □

3. Suite de Godbillon–Vey de longueur 3

LEMME 3.1. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$ et K une extension de M. Si elle admet une suite de Godbillon–Vey de longueur 3 sur K alors, parmi toutes ses suites de Godbillon–Vey, elle en admet une de la forme $\omega, \omega_1, \omega_2$ avec $\omega_1 \in \Omega^1_M$.*

Démonstration. – Soient η_1 et η_2 dans Ω^1_K vérifiant :

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \eta_1,$$
$$\mathrm{d}\eta_1 = \omega \wedge \eta_2,$$
$$\mathrm{d}\eta_2 = \eta_1 \wedge \eta_2.$$

Prenons une dérivation X sur M vérifiant $\omega(X) = 1$ et posons $\omega_1 = L_X\omega$. Il faut ensuite construire ω_2. Comme $(\omega_1 - \eta_1) \wedge \omega = 0$, il existe $F \in K$ telle que $\omega_1 = \eta_1 + F\omega$. En prenant la différentielle on a $\mathrm{d}\omega_1 = \omega \wedge (\eta_2 - \mathrm{d}F + F\omega_1)$. La forme ω_2 est donc de la forme $\eta_2 - \mathrm{d}F + F\omega_1 + G\omega$ pour un certain G dans K. Il faut déterminer le G tel que la troisième équation soit satisfaite. En calculant

$$\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2 = \mathrm{d}(G\omega) + F\mathrm{d}(F\omega) + G\,\mathrm{d}\omega,$$

on obtient $G = -\frac{1}{2}F^2$ donc $\omega_2 = \eta_2 - \mathrm{d}F + F\omega_1 - \frac{F^2}{2}\omega$ convient. □

LEMME 3.2. – *Soient* $\omega \in \Omega^1_M$, $M \subset K \subset K_1$ *telle que* K_1 *soit algébrique sur* K. *Si* ω *admet une suite de longueur* 3 *sur* K_1 *alors elle en admet une sur* K.

Démonstration. – Le Lemme 3.1 nous permet de supposer que $\omega_1 \in \Omega^1_M$. Maintenant la preuve est la même que celle du Lemme 2.1. Soit $\widetilde{K_1}$ la cloture normale de K_1. En faisant agir un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(\widetilde{K_1}/K)$ sur les relations de la suite, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \sigma(\omega_1) = \omega \wedge \omega_1,\\
&\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}\sigma(\omega_1) = \omega \wedge \sigma(\omega_2),\\
&\mathrm{d}\sigma(\omega_2) = \sigma(\omega_1) \wedge \sigma(\omega_2) = \omega_1 \wedge \sigma(\omega_2).
\end{aligned}$$

La moyenne des $\sigma(\omega_2)$ pour tous les σ dans $\mathrm{Gal}(\widetilde{K_1}/K)$ nous fournit une suite de Godbillon–Vey de longueur 3 dans K. □

LEMME 3.3. – *Soient* $\omega \in \Omega^1_M$ *et* $K(G)$ *une extension de* $K \supset M$ *par* G *vérifiant* $\mathrm{d}G = \frac{G^2}{2}\gamma_2 + G\gamma_1 + \gamma_0$ *avec* γ_2, γ_1 *et* γ_0 *dans* Ω^1_K. *Si* ω *admet une suite de longueur* 3 *sur* $K(G)$, *alors elle en admet une sur* K.

Démonstration. – Grace aux lemmes précédents, nous pouvons supposer que G est transcendante sur K, $\omega_1 \in \Omega^1_M$, $\omega_2 = N(G)/D(G)$ avec $N \in \Omega^1_K[X]$ et $D \in K[X]$, et que les racines de D se trouvent dans K. Nous distinguerons les deux mêmes cas que précédement.

1-le degré de D est non nul.

A un changement de variable près nous pouvons supposer qu'après division suivant les puissances croissantes $\omega_2 = \frac{1}{G^n}\beta_{-n} + \cdots$ avec $\beta_i \in \Omega^1_K$ et $n > 0$. L'équation $\mathrm{d}\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ implique $\omega \wedge \beta_{-n} = 0$, il existe donc $F \in K$ telle que $\beta_{-n} = F\omega$.

Si γ_0 est non nulle, l'équation $\mathrm{d}\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\gamma_0 \wedge \beta_{-n} = 0$. La forme ω est un multiple de γ_0 et on obtient une suite de Godbillon–Vey de longueur 3 pour ω à partir de celle de γ_0.

Si γ_0 est nulle, l'équation $\mathrm{d}\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\mathrm{d}\beta_{-n} - n\beta_{-n} \wedge \gamma_1 = \omega_1 \wedge \beta_{-n}$. En remplaçant β_{-n} par $F\omega$ dans cette expression on obtient $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge (\frac{\mathrm{d}F}{2F} + \frac{n\gamma_1}{2})$, c'est-à-dire une suite de Godbillon–Vey de longueur 2 dans K.

2-le degré de D est nul

Dans ce cas $\omega_2 = G^r\beta_r + \cdots + \beta_0$. L'équation $\mathrm{d}\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ implique $\omega \wedge \beta_r = 0$. Si γ_2 est non nulle, l'équation $\mathrm{d}\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\gamma_2 \wedge \beta_r = 0$. La forme ω est un multiple de γ_2 et on a ainsi une suite pour ω. Si γ_2 est nulle, l'équation $\mathrm{d}\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\mathrm{d}\beta_r + r\beta_r \wedge \gamma_1 = \omega_1 \wedge \beta_r$. En remplaçant β_r par $F\omega$ dans cette expression on obtient une suite de Godbillon–Vey de longueur 2 : $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge (\frac{\mathrm{d}F}{2F} - \frac{r\gamma_1}{2})$. □

Preuve du Théorème 1.6. – Soit H une intégrale première de ω dans un corps K, extension de type riccati de M. Il existe une suite de Godbillon–Vey de longueur 2 pour ω sur K. En utilisant le Lemme 3.3, par récurrence, nous obtenons une suite de Godbillon–Vey de longueur 3 sur M. Inversement, à partir d'une suite de Godbillon–Vey de longueur 3 sur M $\omega, \omega_1, \omega_2$, on construit une intégrale première de ω en résolvant $\mathrm{d}G = \frac{G^2}{2}\omega_2 + G\omega_1 + \omega$ puis $\mathrm{d}F = F(\omega_1 + \frac{2}{G}\omega)$ et $\mathrm{d}H = F\omega$.

Références bibliographiques

[1] C. Godbillon, J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension un, C. R. Acad. Sci. Paris 273 (1971) 92–95.
[2] M. Singer, Liouvillian first integral of differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992) 673–688.
[3] F. Touzet, Équation différentielles admettant des solutions liouvilliennes, Thèse de l'université de Rennes I, 1995.