Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 293–298

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique/Analyse harmonique

Interpolation et espace de Hardy sur l'arbre homogène dyadique : le cas stationnaire

Interpolation and the Hardy space on the homogeneous dyadic tree: the stationary case

Daniel Alpay [1], Dan Volok

Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israel

Reçu le 14 janvier 2003 ; accepté le 21 janvier 2003

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous définissons une théorie des fonctions et un espace de Hardy sur l'arbre dyadique, qui étendent de manière naturelle la notion de fonction analytique, la formule de Cauchy et l'espace de Hardy du disque unité. Nous définissons l'analogue d'un facteur de Blaschke et démontrons aussi un théorème d'interpolation homogène dans ce cadre. ***Pour citer cet article : D. Alpay, D. Volok, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We define a function theory and a Hardy space on the dyadic tree, which extend in a natural way the notion of analytic functions, Cauchy's formula and the case of the Hardy space of the open unit disk. We define Blaschke factors in this setting and prove an homogeneous interpolation theorem in this setting. ***To cite this article: D. Alpay, D. Volok, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

Times series (x_n) indexed by the integers and their z-transforms $x(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n z^n$ play an important role in system theory. Two key notions are the Hardy space $\mathbf{H}_2$ of the open unit disk $\mathbb{D}$, that is the Hilbert space of functions $x(z) = \sum_0^\infty x_n z^n$ for which $\sum_0^\infty |x_n|^2 < \infty$ and the Schur functions, that is, the functions analytic and contractive in $\mathbb{D}$. Elements of $\mathbf{H}_2$ correspond to signal of bounded energy while bounded analytic functions (resp.

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), volok@math.bgu.ac.il (D. Volok).

[1] The research of this author was supported by the Israel Science Foundation (Grant no. 322/00).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00042-6

Schur functions) correspond to transfer functions of linear time-invariant (or stationary) dissipative systems. Note that in these two instances the indices run through $\mathbb{N}$ and not $\mathbb{Z}$ because of the time invariance.

When leaving the realm of stationary linear systems a theory has been developed in [3] where the Hardy space is replaced by upper triangular operators from $\ell_2(\mathbb{Z})$ into itself of finite Hilbert–Schmidt norm, where bounded analytic are replaced by bounded upper triangular operators and the open unit disk is replaced by diagonal operators. There is a notion of point evaluation of an operator in this context and a Cauchy's formula (see [3, Theorem 7.2, p. 105]) and much, if not all, of classical analysis can be extended to this setting. Problems considered are usually motivated by engineering consideration and the theory of linear time variant systems; see [2] for an example and [1] for a review of the various notions mentioned in this section.

In this Note we study another avenue to non stationarity, namely the case of multiscale systems. In this setting, one replaces the integers (the *discrete time*) $\mathbb{Z}$ by the homogeneous tree of order 2. The definition is recalled in Section One below. The corresponding multiscale system theory has been developped in [5,7]. Two notions are of particular interest: stochastic processes indexed by the tree and which are isotropic, and causal transfer functions which are stationary with respect to the tree structure. Schur–Levinson recursions exist for isotropic processes; see [5]. Stationary transfer functions are the counterpart of classical analytic function and their realization theory is given in [7].

We focus on the case of *stationary* causal functions on the dyadic tree, and we show that their theory is completely analogue to the case of *non stationary* systems with a discrete time. The complex numbers are replaced by a normed algebra $\mathbb{K}$ (see Section 2 below). The new point in this note is a point evaluation for "analytic functions". This allows us to give a sense to the formal power series arising in the theory and define a function theory which is the extension of the classical case and is parallel to the theory developed in [3]. The coefficient space is now a C^*-algebra and the Hardy space is not a Hilbert space but a Hilbert module (as defined and studied, e.g., in [14,15,11]) in which there are bounded operators without adjoints. In particular it is not self-dual.

1. L'arbre homogène dyadique

Rappelons que l'arbre homogène d'ordre q est un graphe infini acyclique connexe et tel que chaque sommet appartient à $q+1$ arêtes ; voir [8,16]. Dans cette section (et dans la note en général) nous suivons les notations de [5,7] et [6]. La distance entre deux sommets est le nombre d'arêtes de l'unique chemin qui les joint. Les points frontières (points à l'infini) sont les classes d'équivalence de chaînes infinies, deux chaînes étant équivalentes si elles diffèrent seulement par un nombre fini de sommets ; voir [8, p. 124]. Le cas $q=1$ correspond aux entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Il y a alors deux points à l'infini. Nous considérons le cas $q=2$; il y a un ensemble non dénombrable de points à l'infini. Nous en fixons un (noté $-\infty$). Un sommet t du graphe a par rapport ce point un ascendant (que, suivant [5,7], nous noterons $t\bar{\gamma}$) et deux descendants. Soit u une fonction définie sur les sommets de l'arbre et à valeurs complexes. On définit les fonctions $\bar{\gamma}u$ et γu par

$$\bar{\gamma}u(t)=u(t\bar{\gamma}) \quad \text{et} \quad (\gamma u)(t)=\frac{1}{2}\sum_{t';\ t'\bar{\gamma}=t} u(t').$$

On définit aussi $\delta_p=\bar{\gamma}^p\gamma^p$, $p=1,\ldots$. Notons que $\delta_p\delta_q=\delta_{\max(p,q)}$.

2. L'espace des constantes

Nous considérons l'ensemble $\mathbb{K}$ des séries $\mathbf{c}=\sum_{p=0}^{\infty}c_p\delta_p$ où $c_p\in\mathbb{C}$ sont tels que

$$\|\mathbf{c}\|_{\mathbb{K}} \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{n=0,1,\ldots}\left|\sum_{j=0}^{n}c_j\right|<\infty.$$

Proposition 2.1. $\|\mathbf{c}\|_{\mathbb{K}}$ *définit une norme pour laquelle* $\mathbb{K}$ *est complet. De plus*

$$\|\mathbf{cd}\|_{\mathbb{K}} \leqslant \|\mathbf{c}\|_{\mathbb{K}}\|\mathbf{d}\|_{\mathbb{K}}, \quad \forall \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{K}.$$

Notons que $\mathbb{K}$ a des diviseurs de zéro (par exemple, $\delta(1-\delta)=0$). C'est une C^*-algèbre (avec la conjugaison $\bar{\mathbf{c}} = \sum_{p=0}^{\infty} \overline{c_p}\delta_p$) dont on calcule aisément des caractères :

$$\chi_n(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{n} c_j, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Un élément de $\mathbb{K}$ sera positif si toutes les sommes $\sum_{j=0}^{n} c_j$ sont positives ou nulles. Un élément positif a une racine carrée qui est elle-même positive ; voir [10, p. 12]. Soit $\mathbf{c} \in \mathbb{K}$. La formule $\mathbf{c}^{(1)} = c_0 + c_1 + \sum_{p=1}^{\infty} c_{p+1}\delta_p$ définit un élément de $\mathbb{K}$ tel que $\|\mathbf{c}^{(1)}\|_{\mathbb{K}} \leqslant \|\mathbf{c}\|_{\mathbb{K}}$. Lorsque seulement un nombre fini de c_p sont différents de 0 on a en plus

$$\mathbf{c}\bar{\gamma} = \bar{\gamma}\mathbf{c}^{(1)}. \tag{1}$$

Cette dernière égalité provient de $\bar{\gamma}\delta_p = \delta_{p+1}\bar{\gamma}$ $(p = 0, 1, \ldots)$ et s'étend au cas de tout $\mathbf{c} \in \mathbb{K}$ lorsque l'on définit des normes appropriées sur l'ensemble des fonctions de transfert. Voir les sections suivantes. Nous définissons

$$\mathbf{c}^{[n]} = \mathbf{c}\mathbf{c}^{(1)} \cdots \mathbf{c}^{(n-1)}.$$

On a :

$$\bar{\gamma}^n - \mathbf{c}^{[n]} = (\bar{\gamma} - \mathbf{c})\big(\bar{\gamma}^{n-1} + \bar{\gamma}^{n-2}\mathbf{c}^{(n-1)} + \cdots + \mathbf{c}^{(1)} \cdots \mathbf{c}^{(n-1)}\big). \tag{2}$$

Cette égalité suggère que l'on peut définir des valeurs aux points de $\mathbb{K}$ pour les fonctions de tranfert, à condition de remplacer $\bar{\gamma}^n$ par la « puissance » $\mathbf{c}^{[n]}$. Une situation tout à fait analogue apparaît dans le cas des systèmes non stationnaires ; voir [3].

3. Les fonctions de transfert

Une fonction de transfert est une série formelle de monômes en γ, $\bar{\gamma}$ dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{K}$.

Définition 3.1. La fonction de transfert est causale et stationnaire si elle est de la forme

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}^n \mathbf{s}_n, \quad \mathbf{s}_n \in \mathbb{K}. \tag{3}$$

Nous renvoyons le lecteur à [7] pour une interprétation de cette notion en termes de translation sur l'arbre. La série précédente est une série formelle. Nous allons maintenant lui donner une interprétation en termes de fonction de $\mathbb{K}$ dans lui-même.

4. Les évaluation ponctuelles

Soit

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}^n \mathbf{f}_n \tag{4}$$

une série formelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soit $c \in \mathbb{K}$. Nous définissons

$$f(\mathbf{c}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{c}^{[n]} \mathbf{f}_n,$$

où la convergence est dans $\mathbb{K}$.

Définition 4.1. Nous dénotons par $\mathcal{U}$ l'ensemble des séries formelles (4) telles que $\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{f}_n\|_{\mathbb{K}} < \infty$.

Définition 4.2. Soit $\mathbf{c} \in \mathbb{K}$. On définit

$$\rho(\mathbf{c}) = \limsup_{n \to \infty} \left\| \mathbf{c}\mathbf{c}^{(1)} \cdots \mathbf{c}^{(n-1)} \right\|_{\mathbb{K}}^{1/n} < \infty.$$

On appelle disque unité associé à l'arbre l'ensemble $\mathbb{D}(\mathcal{T})$ des $\mathbf{c}$ tels que $\rho(\mathbf{c}) < 1$.

Théorème 4.3. *Soit $f \in \mathcal{U}$. L'évaluation $f(\mathbf{c})$ existe pour tout $\mathbf{c} \in \mathbb{K}$ tel que $\rho(\mathbf{c}) \leqslant 1$.*

Nous dirons que deux séries formelles en $\bar{\gamma}$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égales si elles sont les mêmes valeurs pour $\|\mathbf{c}\|_{\mathbb{K}} < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$. L'évaluation ponctuelle a des propriétés analogues (et les preuves sont aussi similaires) aux propriétés des évaluations sur les diagonales de [3]. Par exemple, on a pour $f, g \in \mathcal{U}$:

$$(fg)(\mathbf{c}) = \big(f(\mathbf{c})g\big)(\mathbf{c}).$$

Cette propriété est l'équivalent de celle présentée dans [3, Lemma 3.7, p. 83].

5. Interpolation homogène

Lemme 5.1. *Soit $f \in \mathcal{U}$ et soit $\mathbf{c} \in \mathbb{K}$ tel que $\rho(\mathbf{c}) < 1$. On a* :

$$f - f(\mathbf{c}) = (\bar{\gamma} - \mathbf{c})g$$

avec $g \in \mathcal{U}$. En particulier,

$$f(\mathbf{c}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = (\bar{\gamma} - \mathbf{c})g \quad \text{avec } g \in \mathcal{U}. \tag{5}$$

Démonstration. Nous présentons la preuve dans le cas $\|\mathbf{c}\|_{\mathbb{K}} < 1$. Utilisant (2) on obtient d'abord le résultat pour f ayant un nombre fini de coefficients $\mathbf{f}_n$ non nuls. On a :

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\gamma}^k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \big(\mathbf{c}^{(k+1)}\big)^{[n-k-1]} \mathbf{f}_n \right),$$

et donc (toutes les sommes impliquant les $\mathbf{f}_n$ ont un nombre fini de termes non nuls)

$$\|g\|_{\mathcal{U}} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \|\mathbf{c}\|_{\mathbb{K}}^{n-k-1} \|\mathbf{f}_n\|_{\mathbb{K}} \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{f}_n\|_{\mathbb{K}}}{1 - \|c\|_{\mathbb{K}}} = \frac{\|f\|_{\mathcal{U}}}{1 - \|c\|_{\mathbb{K}}}.$$

Le résultat suit alors par continuité. □

6. L'espace de Hardy associé

Nous définissons l'espace de Hardy $\mathbf{H}_2(\mathcal{T})$ comme étant l'espace des séries (4) telles que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}_n \bar{\mathbf{f}}_n \right\|_{\mathbb{K}} < \infty,$$

et définissons sur $\mathbf{H}_2(\mathcal{T})$ la forme hermitienne (à valeurs dans $\mathbb{K}$)

$$[f, g] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}_n \overline{\mathbf{g}_n}.$$

On a $\|[f, g]\|_{\mathbb{K}} \leqslant \|f\|_{\mathbb{K}} \cdot \|g\|_{\mathbb{K}}$ et $\mathbf{H}_2(\mathcal{T})$ est un module de Hilbert (voir [15,11]). Soit $\mathbf{c} \in \mathbb{D}(\mathcal{T})$. La série $K_{\mathbf{c}} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\gamma}^n \mathbf{c}^{[n]}$ converge dans $\mathbf{H}_2(\mathcal{T})$ vers un élément tel que

$$K_{\mathbf{c}}(1 - \bar{\gamma}\mathbf{c}) = (1 - \bar{\gamma}\mathbf{c})K_{\mathbf{c}} = 1$$

et que nous noterons $(1 - \bar{\gamma}\mathbf{c})^{-1}$. Pour tout $f \in \mathbb{D}(\mathcal{T})$ nous avons l'analogue de la formule de Cauchy :

$$[f, K_{\mathbf{c}}] = f(\mathbf{c}).$$

La fonction g dans (5) reste dans l'espace de Hardy lorsque f est dans l'espace de Hardy.

Nous notons qu'il existe des fonctionnelles linéaires bornées de l'espace $\mathbf{H}_2(\mathcal{T})$ dans $\mathbb{K}$ sans adjoint. Par exemple,

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n \mathbf{g}_n,$$

où

$$\mathbf{g}_n = \sqrt{\mathbf{c}_{n+1} - \mathbf{c}_n}, \quad \mathbf{c}_n = 1 - \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \left(\frac{1}{n^{1/(k+1)}} - \frac{1}{n^{1/k}} \right).$$

7. Facteurs de Blaschke

Les méthodes de [3] s'appliquent et l'on a :

Proposition 7.1. *Soit* $\mathbf{c} \in \mathbb{K}$ *tel que* $\rho(\mathbf{c}) < 1$ *et définissons*

$$M_{\mathbf{c}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}})^{[n]} \quad \textit{et} \quad L_{\mathbf{c}} = M_{\mathbf{c}}^{(1)} M_{\mathbf{c}}^{-1}.$$

$L_{\mathbf{c}}$ *est positif et la formule* $b_{\mathbf{c}} = (\bar{\gamma} - \mathbf{c})(1 - L_{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{c}}\bar{\gamma})^{-1} L_{\mathbf{c}}^{1/2}$ *définit un élément de* $\mathcal{U}$ *tel que*

$$[b_{\mathbf{c}} f, b_{\mathbf{c}} g] = [f, g] \quad \textit{pour tout } f, g \in \mathbf{H}_2(\mathcal{T}).$$

Le problème d'interpolation homogène peut aussi être considéré en plusieurs points de manière itérative (comme par example dans [4]). Le fait que $\mathbb{K}$ possède des diviseurs de zéro rend la procédure plus délicate.

8. Classes de Schur

On définit une fonction de Schur comme étant une série formelle (3) telle que

$$[Sf, Sf] \leqslant [f, f], \quad \forall f \in \mathbf{H}_2(\mathcal{T}).$$

L'opérateur M_S de multiplication par S est donc une contraction de $\mathbf{H}_2(\mathcal{T})$ dans lui-même et (voir par exemple [12]) M_S a un adjoint qui a la même norme que M_S et est donc aussi une contraction. En termes de l'évaluation ponctuelle S est une fonction de Schur si et seulement si la fonction

$$K_S(c, d) = \sum_{n=0}^{\infty} c^{[n]} \left(1 - S(c)\overline{S(d)}\right)^{(n)} \overline{d^{[n]}}$$

est positive. Les facteurs de Blaschke sont des exemples de fonction de Schur.

9. Conclusions

L'analyse sur les arbres est un domaine très développé où interviennent des notions telles que les couples de Gelfand et les fonctions sphériques ; voir [9, Section 6], [13]. Notre approche ici est différente et nous avons esquissé les éléments d'une théorie des fonctions dans un cas particulier (le cas stationnaire), qui est, de manière surprenante, analogue à la théorie des fonctions pour les systèmes linéaires (indexé par $\mathbb{Z}$) non stationnaires.

Références

[1] D. Alpay, Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, in : Panoramas et Synthèses, Vol. 6, Société Mathématique de France, Paris, 1998.
[2] D. Alpay, V. Bolotnikov, P. Dewilde, A. Dijksma, Sections de Brune en théorie des systèmes non stationnaires, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 330 (2000) 173–178.
[3] D. Alpay, P. Dewilde, H. Dym, Lossles inverse scattering and reproducing kernels for upper triangular operators, in: Extension and Interpolation of Linear Operators and Matrix Functions, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 61–135.
[4] D. Alpay, H.T. Kaptanoğlu, Sous espaces de codimension finie dans la boule unité et un problème de factorisation, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 331 (2000) 947–952.
[5] M. Basseville, A. Benveniste, A. Willsky, Multiscale autoregressive processes, Rapport de Recherche 1206, INRIA, Avril 1990.
[6] M. Basseville, A. Benveniste, A. Willsky, Multiscale statistical signal processing, in: Wavelets and Applications, Marseille, 1989, in: RMA Res. Notes Appl. Math., Vol. 20, Masson, Paris, 1992, pp. 354–367.
[7] A. Benveniste, R. Nikoukhah, A. Willsky, Multiscale system theory, Rapport de Recherche 1194, INRIA, Mars 1990.
[8] P. Cartier, Géométrie et analyse sur les arbres, in : Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 407, in: Lecture Notes in Math., Vol. 317, Springer, Berlin, 1973, pp. 123–140.
[9] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Tome VI, Chapitre XXII, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIX, Gauthier-Villars, Paris, 1975.
[10] J. Dixmier, Les C^*-algèbres et leurs représentations, Deuxième édition, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[11] S. Itoh, Reproducing kernels in modules over C^*-algebras and their applications, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Natur. Sci. 37 (20) (1990).
[12] I. Kaplansky, Modules over operator algebras, Amer. J. Math. 75 (1953) 839–858.
[13] G. Letac, Problèmes classiques de probabilité sur un couple de Gel'fand, in: Analytical Methods in Probability Theory, Oberwolfach, 1980, in: Lecture Notes in Math., Vol. 861, Springer, Berlin, 1981, pp. 93–120.
[14] R.M. Loynes, Linear operators in *VH*-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 116 (1965) 167–180.
[15] W. Paschke, Inner product spaces over B^*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 1982 (1973) 443–468.
[16] J.P. Serre, Arbres amalgames, SL^2, Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.