Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 625–628
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse fonctionnelle

Arbres distingués, bi-arbres et théorèmes de relèvement

Distinguished trees, double-trees and lifting theorems

Gabriel Debs, Jean Saint Raymond

Équipe d'analyse fonctionnelle, institut de mathématiques, Université Paris 6, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 19 février 2003 ; accepté le 11 mars 2003

Présenté par Michel Talagrand

Résumé

On introduit la notion de relation d'arbre distinguée dans une autre et on en donne des applications. On démontre dans ZFC une ancienne conjecture d'A.V. Ostrovsky sur l'image semi-propre d'un borélien. On montre aussi que si $\aleph_{\xi+1}^L$ est dénombrable toute application semi-propre d'un espace Δ_1^1 sur un espace $\Sigma_{1+\xi+2}^0$ ou $\Pi_{1+\xi+2}^0$ est inductivement propre. La réciproque de ce dernier énoncé est établie. ***Pour citer cet article : G. Debs, J. Saint Raymond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We introduce the notion of distinguished tree relation and give applications. We prove in ZFC an old conjecture of A.V. Ostrovsky about the image of a Borel space under a compact covering mapping. We also prove that if $\aleph_{\xi+1}^L$ is countable then any compact covering mapping from a Δ_1^1 space onto a $\Sigma_{1+\xi+2}^0$ or $\Pi_{1+\xi+2}^0$ space is inductively perfect. The converse of last statement is shown. ***To cite this article: G. Debs, J. Saint Raymond, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

1. Introduction

Une application continue surjective $f : X \to Y$ est dite *semi-propre* (*compact covering*) si tout compact de Y est l'image directe d'un compact de X ; elle est dite *inductivement propre* (*inductively perfect*) s'il existe $X' \subset X$ telle que $f(X') = f(X)$ et pour tout compact $K \subset Y$ la partie $X' \cap f^{-1}(K)$ soit compacte (autrement dit la restriction de f à X' est propre). L'étude de ces notions dans les espaces métrisables séparables se ramène facilement au cas zéro-dimensionnel (voir [1]), et dans toute la suite les espaces considérés seront supposés plongés dans l'espace de Cantor $\mathbf{2}^\omega$.

Adresses e-mail : gad@ccr.jussieu.fr (G. Debs), jsr@ccr.jussieu.fr (J. Saint Raymond).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00150-X

Nous suivrons les notations logiciennes classiques : $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ pour désigner la classe des boréliens, $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ et $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ pour désigner les classes boréliennes additives et multiplicatives ($\boldsymbol{\Sigma}^0_1 =$ ouvert, $\boldsymbol{\Pi}^0_1 =$ fermé, $\boldsymbol{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$, $\boldsymbol{\Pi}^0_2 = \mathbf{G}_\delta, \ldots$) ; ainsi que les classes *effectives* correspondantes : Δ^1_1, Π^0_ξ et Σ^0_ξ (voir [7]). La notation $\aleph^L_\xi$ désigne le $\xi^{\text{ème}}$ cardinal infini $\aleph_\xi$ de l'univers L de Gődel.

Il est clair que toute application $f : X \to Y$ inductivement propre est semi-propre. Une propriété importante des applications inductivement propres est la conservation de la classe borélienne : si $f : X \to Y$ est inductivement propre et si X est $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ (resp. $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$) ($\xi \geqslant 2$), alors Y est borélien de classe $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ (resp. $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$). Lorsque X est $\boldsymbol{\Pi}^0_2$, on montre (cf. [9]) que toute application f semi-propre de X sur un espace Y est inductivement propre, et on en déduit que l'image semi-propre d'un espace polonais est toujours un espace polonais. Lorsque X est $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ pour $\xi \geqslant 3$, on peut chercher à généraliser cet énoncé, soit sous la forme faible que Y est lui aussi $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$, soit sous la forme plus forte que f est inductivement propre. Cette dernière forme est démontrable dans ZFC si l'espace X est Polonais ou si l'espace Y est σ-compact [8], c'est-à-dire si X est une partie $\boldsymbol{\Pi}^0_2$ ou si Y est une partie $\boldsymbol{\Sigma}^0_2$ de $\mathbf{2}^\omega$. Et nous avons montré dans [1] que, sous l'hypothèse de détermination des jeux analytiques, toute application semi-propre définie sur un espace borélien X est inductivement propre. Mais, sous l'hypothèse ensembliste « $\aleph^L_1 = \aleph_1$ », nous avons construit dans [3] une fonction semi-propre et non inductivement propre ayant pour domaine et image des parties boréliennes Δ^1_1 très simples (voir aussi [2]).

Pour essayer d'obtenir, sous des hypothèses ensemblistes plus faibles que la détermination analytique, que toute fonction semi-propre est inductivement propre (cf. [3–5]), nous avons été amenés à introduire la notion de représentation d'un borélien par un bi-arbre. Cette notion est déjà présente dans [4], sans y être formalisée, et apparaît, de façon plus précise dans [5]. Il est bien connu que tout borélien de $\mathbf{2}^\omega$ est analytique, ainsi que son complémentaire, et donc qu'il existe deux arbres T^+ et T^- sur $2 \times \omega$ tels que $y \in B \Leftrightarrow \exists \beta \in \omega^\omega,\ (y, \beta) \in \lceil T^+ \rceil$ et $y \notin B \Leftrightarrow \exists \beta \in \omega^\omega,\ (y, \beta) \in \lceil T^- \rceil$. Mais cette représentation ne permet nullement de contrôler la classe de Baire de B, ni de « décrire une construction borélienne » de B.

Pour ce qui est de la forme plus faible, A.V. Ostrovsky a conjecturé dès 1984, dans une communication privée, que l'image semi-propre d'un espace borélien est un espace borélien (cf. [8]). D'après ce qui précède, ce résultat est vrai sous l'hypothèse de détermination des jeux analytiques, et nous avons signalé dans [3] que le problème restait ouvert d'en trouver une démonstration dans ZFC. Mais, très récemment, en utilisant à nouveau la notion de représentation par bi-arbre, nous sommes parvenus à donner une démonstration dans ZFC de cette conjecture.

2. Arbres distingués

Dans toute la suite, nous appellerons *arbre* une relation d'ordre sur un ensemble D, avec un plus petit élément (en général noté $\emptyset$), telle que, pour tout élément x de D, l'ensemble des prédécesseurs de x soit fini et totalement ordonné. Si E est un ensemble, $E^{<\omega}$ désigne l'ensemble des suites finies d'élément de E, et nous parlerons d' *arbre séquentiel* pour désigner une partie T de E telle que $s \prec t$ et $t \in T$ entraînent $s \in T$. Il est clair que si T est un arbre séquentiel sur E, la relation d'extension $\prec$ est une relation d'arbre sur T. Si R est une relation d'arbre sur l'ensemble D, une *branche* de R est une partie totalement ordonnée maximale de E pour R ; une telle partie s'identifie naturellement à une suite (finie ou infinie) R-croissante d'éléments de E, et on notera $\lceil R \rceil$ l'ensemble des branches infinies de E, identifié à une partie du produit E^ω, et muni de la topologie induite par celle de E^ω (où E est discret).

Une relation d'arbre R sur E est dite *distinguée* dans S si $R \subseteq S$ et si chaque fois qu'on a $a\ S\ b$, $b\ S\ c$ et $a\ R\ c$, on a aussi $a\ R\ b$. Si $\alpha = (a_n)$ est une R-branche infinie, on voit aisément qu'il existe une unique branche S-infinie qui contienne tous les a_n. Ceci définit une fonction injective et continue $\pi_{R,S}$ de $\lceil R \rceil$ dans $\lceil S \rceil$; de plus, si E est dénombrable, $\pi_{R,S}(\lceil R \rceil)$ est une partie $\boldsymbol{\Pi}^0_3$ de $\lceil S \rceil$ sur laquelle $\pi^{-1}_{R,S}$ est de première classe de Baire. Plus généralement, si ξ est un ordinal dénombrable, on dira que l'arbre R est ξ-distingué dans S s'il existe une famille d'abres $(R_\eta)_{0 \leqslant \eta \leqslant \xi}$ telle que $R_0 = S$, $R_\xi = R$, $R_{\eta+1}$ est distingué dans R_η, et $R_\lambda = \bigcap_{\eta<\lambda} R_\eta$ si λ est un ordinal limite. Dans ce cas, on démontre encore que toute R-branche infinie est contenue dans une unique S-branche infinie, que ceci définit une injection continue $\pi_{R,S}$ de $\lceil R \rceil$ dans $\lceil S \rceil$ et que, si E est dénombrable, l'application $\pi_{R,S}^{-1}$ est de classe de Baire ξ si $\xi < \omega$, et de classe $\xi + 1$ si $\xi \geqslant \omega$.

A l'aide de ces notions, on peut alors démontrer le théorème suivant, qui est une version précisée du théorème d'expansion de Kuratowski.

Théorème 2.1. *Si S est une relation d'arbre sur un ensemble dénombrable et si (A_n) est une suite de parties $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ de $\lceil S \rceil$, il existe un arbre R, ξ-distingué dans S tel que $\pi_{R,S}$ soit bijective de $\lceil R \rceil$ sur $\lceil S \rceil$ et que $\pi_{R,S}^{-1}(A_n)$ soit $\boldsymbol{\Delta}^0_1$ dans $\lceil R \rceil$ pour tout n.*

Si R est une relation d'arbre, on appelle *bi-arbre au-dessus de R* un couple (R^+, R^-) de sous-arbres distingués de R, orthogonaux (c'est-à-dire que $a\ R^+\ b$ et $a\ R^-\ b$ entraînent $a = b$ ou $a = \emptyset$), et engendrant R (c'est-à-dire que la plus petite relation transitive contenant R^+ et R^- est R). On dit que le bi-arbre (R^+, R^-) *représente* un borélien B de $\lceil R \rceil$ si B est l'image de $\lceil R^+ \rceil$ par $\pi_{R^+,R}$ et B^c celle de $\lceil R^- \rceil$ par $\pi_{R^-,R}$; il résulte de ce qui précède que B est alors nécessairement une partie $\boldsymbol{\Delta}^0_3$ de $\lceil R \rceil$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.2. *Si S est une relation d'arbre et B une partie $\boldsymbol{\Delta}^0_{\xi+3}$ de $\lceil S \rceil$ (en particulier si B est $\boldsymbol{\Sigma}^0_{\xi+2}$ ou $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+2}$), il existe un sous-arbre ξ-distingué, R, de S et un bi-arbre (R^+, R^-) au-dessus de R qui représente B.*

3. La conjecture d'Ostrovsky

Si X est une partie borélienne $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+2}$ de $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$, de projection $Y \subset \mathbf{2}^\omega$, et si tout compact K de Y est la projection d'un compact L de X, il est aisé de voir que, pour tout compact K de Y existe une section de première classe de la projection $\pi_X : X \to Y$ sur K. On peut alors trouver un ensemble $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+2}$, B, de $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$, de projection Y, tel que, pour tout compact K de Y, il existe une point $z \in \mathbf{2}^\omega$ tel que $K \times \{z\} \subset B$. Le résultat cherché résulte alors du théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soient B une partie $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+2}$ de $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$ et Y la projection de B dans $\mathbf{2}^\omega$. Si, pour tout compact K de Y, existe un $z \in \mathbf{2}^\omega$ tel que $K \times \{z\} \subset B$, alors Y est $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+2}$.*

Schéma de la preuve. Il existe une relation d'arbre R, ξ-distinguée dans la relation R_0 d'extension sur $(2 \times 2)^{<\omega}$, telle que $\pi_{R,R_0}^{-1}(B) \in \boldsymbol{\Pi}^0_2$; il existe donc un bi-arbre (R^+, R^-) au-dessus de R qui représente B. Et puisque $Y \in \boldsymbol{\Sigma}^1_1$, on peut trouver un arbre séquentiel T sur $2 \times \omega$ tel que $y \in Y \Leftrightarrow \exists \beta \in \omega^\omega,\ (y, \beta) \in \lceil T \rceil$. Une suite $s \in \omega^{<\omega}$ sera alors dite T-compatible avec $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ si sa longueur ℓ est au plus égale à n et si $((y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}), s) \in T$.

On considère alors le jeu où, au coup d'indice n, le joueur I joue un $y_n \in \{0, 1\}$ et un $a_n \in \omega^{<\omega}$, T-compatible avec $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, et le joueur II répond un $z_n \in \{0, 1\}$. Au cours d'une partie infinie, ils produisent ainsi respectivement $y = (y_n) \in \mathbf{2}^\omega$ et $\alpha = (a_n) \in (\omega^{<\omega})^\omega$ pour le joueur I, et $z = (z_n) \in \mathbf{2}^\omega$ pour le joueur II. Et le joueur I gagne la partie si $(y, z) \notin B$ et si « α étiquette asymptotiquement la R-branche de (y, z) », c'est-à-dire que si $(y_{|n_j}, z_{|n_j})$ est l'énumération croissante de la R-branche de (y, z), il existe un entier q pour lequel a_{n_j} est de longueur $j - q$ et $a_{n_j} \prec a_{n_{j+1}}$ pour $j \geqslant q$.

On voit sans peine que ce jeu est borélien, donc déterminé, et que si I possède une stratégie gagnante σ, l'ensemble K des y répondus par σ à toutes les parties possibles est compact et contenu dans Y. S'il existe un z tel que $K \times \{z\} \subset B$, le joueur II peut alors battre σ en jouant z.

L'essentiel du travail consiste alors à montrer que si le joueur II possède une stratégie gagnante τ, il est possible de définir par une formule un ensemble $C \subset \mathbf{2}^\omega$, appartenant à $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+2}$, ainsi qu'une fonction ψ borélienne de classe

$\xi+1$ (et même ξ si $\xi<\omega$) de C dans $\lceil R^+\rceil$ telle que $\pi_{R^+,R_0}\circ\psi(y)$ soit de la forme (y,z) pour un $z\in\mathbf{2}^\omega$. Une des étapes de cette construction consiste à définir inductivement à partir des arbres R_η des jeux auxiliaires $(G_y^\eta)_{0\leqslant\eta\leqslant\xi}$ et des quasi-stratégies $(\tau_y^\eta)_{0\leqslant\eta\leqslant\xi}$ dans ces jeux, paramétrées par $y\in\mathbf{2}^\omega$, et fonctions de classe $\eta+1$ de y. L'ensemble C est alors défini comme l'ensemble des y pour lesquels τ_y^ξ possède une certaine propriété, qui permet de définir $\psi(y)\in\lceil R^+\rceil$.

On en déduit alors l'existence d'un z tel que $(y,z)\in B$ lorsque $y\in C$, donc que C est contenu dans Y. De plus, si $y\in Y$, l'existence d'un β tel que $(y,\beta)\in\lceil T\rceil$ permet de montrer que $y\in C$. Donc $Y=C$ est $\boldsymbol{\Pi}^0_{\xi+2}$.

4. Relèvement dans un coanalytique

Comme il est indiqué dans [4] et [5], le fait que toute application semi-propre définie d'un espace Δ^1_1 (ou Π^1_1) sur un espace $\Pi^0_{1+\xi+2}$ ou $\Sigma^0_{1+\xi+2}$ soit inductivement propre se déduit aisément du résultat de relèvement suivant :

Théorème 4.1. *Supposons $\aleph^L_{\xi+1}$ dénombrable. Soient Z une partie Π^1_1 de $\mathbf{2}^\omega$, B une partie Δ^1_1 de $\mathbf{2}^\omega\times\mathbf{2}^\omega$ et $Y\subset\mathbf{2}^\omega$ différence de deux ensembles $\Sigma^0_{1+\xi+2}$. Si pour tout compact K de Y on peut trouver un $z\in\mathbf{2}^\omega$ tel que $K\times\{z\}\subset X:=B\cap(\mathbf{2}^\omega\times Z)$, alors il existe une fonction continue f sur Y dont le graphe est contenu dans X.*

La preuve de ce résultat, très longue et technique, est inspirée des méthodes utilisées dans [5], et les notions mêmes d'arbre distingué et de bi-arbre ont été introduites pour faire fonctionner cette démonstration.

On se propose maintenant de montrer que l'hypothèse de dénombrabilité de $\aleph^L_{\xi+1}$ est nécessaire pour la validité du Théorème 4.1. Dans l'article [6], R. Labib Sami avait, pour l'étude des relations d'équivalence Σ^1_1 à classes boréliennes bornées, montré l'existence, pour tout ordinal récursif ξ, d'un ensemble Π^1_1 dont les constituants sont tous $\boldsymbol{\Pi}^0_{1+\xi+1}$ et qui est borélien si et seulement si $\aleph^L_{\xi+1}$ est dénombrable. Dans un tel ensemble E_ξ, une partie $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ est alors toujours recouverte par une famille dénombrable de constituants, donc contenue dans une partie $\boldsymbol{\Sigma}^0_{1+\xi+2}$ de E_ξ. De fait, un raffinement des calculs de complexité permet de montrer que toute partie $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ de E_ξ est contenue dans une partie $D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_{1+\xi+1})$, c'est-à-dire différence de deux parties $\boldsymbol{\Sigma}^0_{1+\xi+1}$.

On peut alors montrer l'énoncé suivant :

Théorème 4.2. *Supposons que $\aleph^L_{\xi+1}$ n'est pas dénombrable. Si Y est une partie Δ^1_1 de $\mathbf{2}^\omega$ qui n'est pas $D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_{1+\xi+1})$, il existe une partie Π^1_1, Z, de $\mathbf{2}^\omega$ et une partie Π^0_1, B, de $\mathbf{2}^\omega\times\mathbf{2}^\omega$ telles que* : (i) *pour tout compact K de Y il existe $z\in Z$ avec $K\times\{z\}\subset B$* ; (ii) *il n'existe pas de fonction continue f de Y dans Z à graphe dans B.*

Références

[1] G. Debs, J. Saint Raymond, Compact covering and game determinacy, Topology Appl. 68 (1996) 153–185.
[2] G. Debs, J. Saint Raymond, Cofinal $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ and $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ subsets of ω^ω, Fund. Math. 159 (1999) 161–193.
[3] G. Debs, J. Saint Raymond, Compact covering mappings and cofinal families of compact subsets of a Borel set, Fund. Math. 167 (2001) 213–249.
[4] G. Debs, J. Saint Raymond, Applications semi-propres sur un espace borélien, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 332 (2001) 423–426.
[5] G. Debs, J. Saint Raymond, Compact covering mappings between Borel sets and the size of constructible reals, Tras. Amer. Math. Soc. (2001), à paraître.
[6] R. Labib Sami, On the equivalence relations with Borel classes of bounded rank, J. Symbolic Logic 49 (1984) 1273–1283.
[7] Y.N. Moschovakis, Descriptive Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1980.
[8] A.V. Ostrovsky, New class of maps connected with compact covering maps, Vestnik Moskov. Gos. Univ. 4 (1994) 24–27.
[9] J. Saint Raymond, Caractérisation d'espaces polonais, Séminaire d'Initiation à l'Analyse, 11–12èmes années, n° 5 (1971–73).