



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 137–142



Problèmes mathématiques de la mécanique

# Amplitude des oscillations d'ondes solitaires généralisées

Christophe Fochesato, Frédéric Dias

Centre de mathématiques et de leurs applications, École normale supérieure de Cachan, 61, avenue du Président Wilson,  
94235 Cachan cedex, France

Reçu le 16 mai 2003 ; accepté le 27 mai 2003

Présenté par Gérard Iooss

---

## Résumé

Divers systèmes physiques d'ondes dispersives admettent des solutions sous la forme d'ondes solitaires généralisées. De telles ondes résultent de la résonance entre une onde longue localisée et de courtes oscillations périodiques. De nombreuses estimations (rigoureuses et numériques) ont été données pour l'amplitude des ondelettes dans la queue de l'onde solitaire généralisée lorsque sa partie centrale a la forme d'un  $\text{sech}^2$ . Cette Note donne une estimation (pas encore rigoureuse) pour l'amplitude des ondelettes lorsque la partie centrale est plate et large. **Pour citer cet article :** C. Fochesato, F. Dias, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Amplitude of ripples of generalized solitary waves.** Various physical systems of dispersive waves admit solutions in the form of generalized solitary waves. Such waves result from the resonance between a long localized wave and short periodic oscillations. Many estimates (rigorous and numerical) have been given for the amplitude of the ripples in the tail of the generalized solitary wave when its central part has a  $\text{sech}^2$  shape. This Note provides estimates (not yet rigorous) for the ripple amplitude when the central part is flat and wide. **To cite this article:** C. Fochesato, F. Dias, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

## Abridged English version

It is shown in [2] that waves in a two-layer system with free-surface boundary conditions can be modelled by a system of two coupled KdV or modified KdV equations. The KdV equation has a quadratic nonlinearity while the modified KdV equation has both quadratic and cubic nonlinearities. A long localized wave of one of the two equations can resonate with a short wave of the other equation. The resulting wave is a generalized solitary wave. The size of the ripples in the tail has been deeply studied in the case of the KdV equation. In this Note, we study the ripples size in the case of the modified KdV equation.

Instead of considering the full coupled system, we consider the simpler toy model (1), consisting of a linear oscillator  $v$  with wavenumber  $q$  forced by a solitary wave solution of either a KdV equation or a modified KdV

---

Adresse e-mail : [Frederic.Dias@cmla.ens-cachan.fr](mailto:Frederic.Dias@cmla.ens-cachan.fr) (F. Dias).

equation. In (1),  $K$  is a real constant and  $L$  is the domain length. The expressions for the forcings  $u_s^1$  and  $u_s^2$  are given in (2). Solitary wave solutions of the modified KdV equation are characterized by a flat and wide central part. The boundary conditions are periodic, so that the analytical results can be easily compared with numerical results. The exact solution takes the form (3) and is shown in Fig. 1. The amplitude of the oscillations at the boundaries is given by (4). One is interested in the amplitude behavior as the domain length  $L$  becomes large. It depends mainly on the Fourier integral appearing in (4).

In order to compute such an integral, one can use residue calculus. This is done in Section 3. The result is given by Eqs. (5) and (6). The expressions for  $R^1(L)$  and  $R^2(L)$  are given by (7). The integrals  $J_{s,c}^{1,2}(L)$  which appear in the expressions  $R^{1,2}(L)$  go to zero monotonically as  $L$  goes to infinity.

In Section 4, the behavior of the Fourier integral as  $L$  goes to infinity is studied. It is shown that this behavior depends strongly on the forcing. In the case of the forcing  $u_s^2$ , the integral can vanish for certain parameter values. It means that the oscillations in the far field can disappear. This is impossible in the case of the classical KdV type forcing  $u_s^1$ , as shown, for example, in [4].

In Section 5, we go back to the case where the domain length  $L$  is large but not infinite. This is typically what happens in numerical simulations. The amplitude of the small oscillations in the tail of the solitary wave is given by (8) for the forcing  $u_s^1$  and by (9) for the forcing  $u_s^2$ . Its behavior as  $L$  increases is shown in Fig. 2. On the left, one finds the classical result for KdV type forcing: there is a succession of  $\cap$  and  $\cup$  shapes coming from  $1/\sin(qL/2)$ . The extrema can be exponentially small, but the amplitude never vanishes. It is relatively easy to find the correct amplitude behavior numerically. On the right, one sees that the behavior is quite different. The amplitude can vanish. It is therefore quite tricky to find the correct amplitude behavior numerically.

## 1. Introduction

Divers systèmes physiques d'ondes dispersives, dont les ondes hydrodynamiques, admettent des solutions sous la forme d'ondes solitaires généralisées. De telles ondes résultent de la résonance entre une onde longue localisée et de courtes oscillations périodiques qui ont la même vitesse de phase. De nombreuses estimations (rigoureuses et numériques) ont été données pour l'amplitude des ondelettes dans la queue de l'onde solitaire généralisée lorsque sa partie centrale a la forme d'un  $\text{sech}^2$  [4,1]. Dans ce cas, l'équation typique est celle de Korteweg–de Vries avec une non-linéarité quadratique. Or certains systèmes physiques peuvent également être modélisés sous la forme d'une équation de Korteweg–de Vries modifiée avec non-linéarité cubique. C'est le cas par exemple lorsque deux fluides sont superposés [2,3]. Les ondes solitaires sont alors beaucoup plus larges et plates dans leur partie centrale. Lorsque leur vitesse augmente, leur amplitude atteint une limite et elles s'élargissent de plus en plus jusqu'à ressembler à des fronts. Cette Note donne une estimation (non rigoureuse) pour l'amplitude des ondelettes dans ce cas.

Lorsque des ondes solitaires généralisées sont calculées numériquement, par exemple par une méthode spectrale de type Fourier, le comportement des solutions dépend de la longueur  $L$  du domaine de calcul en plus des paramètres physiques du problème exact. Il est alors important de savoir comment varient les ondelettes des ondes solitaires généralisées en fonction de  $L$  lorsque  $L \rightarrow \infty$ . Afin d'étudier ces solutions, on établit un modèle simplifié constitué d'une équation linéaire d'oscillateur harmonique forcée par une onde solitaire. Sa résolution conduit à des intégrales de Fourier tronquées dont le comportement change sensiblement selon le forçage.

## 2. Résolution de l'équation forcée

Il est montré dans [2] que l'étude d'ondes dans un système de deux couches fluides superposées avec surface libre peut se ramener à l'étude d'un système de deux équations couplées, soit de type Korteweg–de Vries, soit

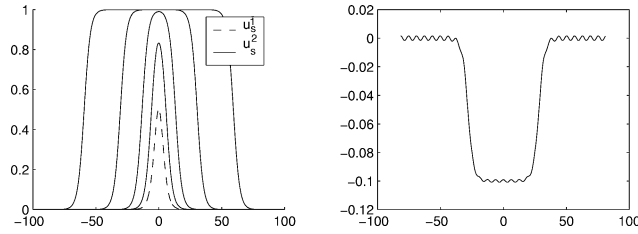


Fig. 1.  $u_s^1$  et  $u_s^2$  pour  $a = 1, \beta = 0,2$  et pour plusieurs valeurs de  $\varepsilon$  (la solution la plus plate est obtenue pour  $\varepsilon = 10^{-10}$ ) (gauche) ; solution  $v$  typique (droite).

Fig. 1.  $u_s^1$  and  $u_s^2$  for  $a = 1, \beta = 0.2$  and for several values of  $\varepsilon$  (the flattest solution is obtained for  $\varepsilon = 10^{-10}$ ) (left); typical  $v$  solution (right).

de type Korteweg–de Vries modifiée. Rappelons que l'équation de KdV  $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$  admet des ondes solitaires

$$u(x, t) = \frac{3a^2}{\cosh^2[(a/2)(x - a^2t)]},$$

tandis que l'équation de KdV modifiée  $u_t + uu_x - u^2u_x + u_{xxx} = 0$  admet des ondes solitaires

$$u(x, t) = \frac{a}{a/(2 - a) + (1 - a/(2 - a)) \cosh^2[(1/6)\sqrt{3a(1 - a/2)}(x - (a/3)(1 - a/2)t)]}.$$

On s'intéresse ici à la résolution d'un modèle plus simple

$$v''(x) + q^2v(x) = -Ku_s^{1,2}(x), \quad x \in [-L/2; L/2], \quad v \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où  $q$  est le nombre d'onde,  $K$  un coefficient réel et  $L$  la longueur du domaine d'intégration. Les deux forçages considérés (voir Fig. 1) ont pour expression

$$u_s^1(x) = \frac{a}{2 \cosh^2(\beta x)}, \quad u_s^2(x) = \frac{a}{1 + \varepsilon \cosh(2\beta x)}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad a > 0, \quad \beta > 0. \tag{2}$$

Le premier forçage est un cas particulier du second dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Des conditions aux limites périodiques sont imposées pour comparer facilement les résultats analytiques avec une résolution numérique par transformées de Fourier :

$$v(-L/2) = v(L/2), \quad v'(-L/2) = v'(L/2).$$

La solution générale de (1) s'écrit comme la somme d'oscillations harmoniques et d'une intégrale faisant apparaître le forçage :

$$v(x) = A \cos(qx) + B \sin(qx) - \frac{K}{q} \left( \sin(qx) \int_0^x u_s^{1,2}(y) \cos(qy) \, dy + \cos(qx) \int_x^\infty u_s^{1,2}(y) \sin(qy) \, dy \right).$$

Dans toute la suite, on exclut le cas résonant  $qL/2 = 0[\pi]$ . Les constantes  $A$  et  $B$  sont fixées en vérifiant les conditions aux bords. On trouve alors

$$v(x) = -\frac{K}{q} \left( \sin(qx) \int_0^x u_s^{1,2}(y) \cos(qy) \, dy + \cos(qx) \left( \int_x^{L/2} u_s^{1,2}(y) \sin(qy) \, dy + \frac{\int_0^{L/2} u_s^{1,2}(y) \cos(qy) \, dy}{\tan(qL/2)} \right) \right). \tag{3}$$

En remarquant que la solution aux bords correspond à des extrema locaux, on en déduit une évaluation des amplitudes des oscillations. Pour cela, on retire à la solution  $v$  sa partie locale (bien que, dans ce cas, elle soit négligeable)

$$a_{L/2}^{1,2} = v\left(\frac{L}{2}\right) - \left(-\frac{K}{q^2} u_s^{1,2}\left(\frac{L}{2}\right)\right) = \frac{K}{q^2} u_s^{1,2}\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{K}{q} \left(\frac{\int_0^{L/2} u_s^{1,2}(y) \cos(qy) dy}{\sin(qL/2)}\right). \quad (4)$$

Pour connaître le comportement de ces amplitudes en fonction de  $L$ , il faut obtenir des informations sur l'intégrale de Fourier tronquée qui apparaît dans l'expression.

### 3. Calcul de l'intégrale

Dans les deux cas, on se ramène à  $u_s^{1,2}(z) e^{iqz}$  dont le prolongement dans le plan complexe est analytique sauf en des points isolés. Pour  $u_s^1$ , les singularités sont des pôles doubles situés périodiquement sur l'axe imaginaire. Pour  $u_s^2$ , ce sont des pôles simples symétriques par rapport à l'axe imaginaire

$$z^1 = i\frac{\pi}{2\beta} \left[ i\frac{\pi}{\beta} \right], \quad z^{2\pm} = \pm \frac{\cosh^{-1}(1/\varepsilon)}{2\beta} + i\frac{\pi}{2\beta} \left[ i\frac{\pi}{\beta} \right].$$

On en déduit un chemin d'intégration  $\gamma$  sur lequel on applique le théorème des résidus :



$$\int_{\gamma} u_s^{1,2}(z) \exp(iqz) dz = 2\pi i \sum \text{Res}(u_s^{1,2}(z) e^{iqz}, z^{1,2\pm}).$$

En remarquant que  $u_s^1$  et  $u_s^2$  sont périodiques de période  $i\pi/\beta$ , les deux intégrations sur les chemins parallèles à l'axe réel se regroupent et font ainsi apparaître les intégrales que l'on cherche à calculer :

$$\int_{-L/2}^{L/2} u_s^{1,2}(x) e^{iqx} dx + \int_{L/2}^{-L/2} u_s^{1,2}\left(x + \frac{i\pi}{\beta}\right) e^{iq\left(x + \frac{i\pi}{\beta}\right)} dx = \int_{-L/2}^{L/2} u_s^{1,2}(x) e^{iqx} dx (1 - e^{-q\pi/\beta}).$$

On obtient alors l'expression analytique suivante pour l'intégrale

$$\int_{-L/2}^{L/2} u_s^{1,2}(x) e^{iqx} dx = \frac{2\pi i \sum \text{Res}(u_s^{1,2}(z) e^{iqz}, z^{1,2}) + R^{1,2}(L)}{1 - e^{-q\pi/\beta}},$$

où  $R^{1,2} \rightarrow 0$  quand  $L \rightarrow \infty$  d'après le lemme de Jordan. Le calcul des résidus complète le raisonnement. Celui-ci s'effectue à l'aide de développements en série et conduit aux expressions des intégrales en prenant les parties réelles

$$\int_0^{L/2} u_s^1(x) \cos(qx) dx = \frac{\pi a q}{2\beta^2 \sinh(q\pi/(2\beta))} + \frac{\text{Re}(R^1(L))}{2(1 - e^{-q\pi/\beta})}, \quad (5)$$

$$\int_0^{L/2} u_s^2(x) \cos(qx) dx = \frac{\pi a}{2\beta\sqrt{1-\varepsilon^2} \sinh(q\pi/(2\beta))} \sin\left(\frac{q}{2\beta} \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + \frac{\text{Re}(R^2(L))}{2(1-e^{-q\pi/\beta})}. \quad (6)$$

Enfin, il est possible d'écrire les restes  $R^{1,2}(L)$  de telle sorte que le comportement en  $L$  soit mis en évidence :

$$R^{1,2}(L) = \frac{a}{1-e^{-q\pi/\beta}} \left( \sin\left(\frac{qL}{2}\right) J_s^{1,2}(L) - \cos\left(\frac{qL}{2}\right) J_c^{1,2}(L) \right). \quad (7)$$

Les nouvelles intégrales  $J_{s,c}^{1,2}(L)$  qui apparaissent tendent monotoniquement vers zéro lorsque  $L \rightarrow \infty$ . En effet, approcher  $u_s^{1,2}$  sur l'intervalle tronqué  $[-L/2; L/2]$  suppose que cet intervalle est beaucoup plus grand que la largeur  $L_{\text{sol}}$  de l'onde solitaire, laquelle est directement liée à  $\varepsilon$ . Ainsi, une hypothèse peu contraignante sur  $L$ , à savoir  $L > 3L_{\text{sol}}$ , suffit à ce que les intégrandes soient dominés par  $L$  dans tous les cas.

#### 4. Comportement quand $L \rightarrow \infty$

En particulier, ce raisonnement montre que

$$\int_0^\infty u_s^1(x) \cos(qx) dx = \frac{\pi a q}{2\beta^2 \sinh(q\pi/(2\beta))},$$

$$\int_0^\infty u_s^2(x) \cos(qx) dx = \frac{\pi a}{2\beta\sqrt{1-\varepsilon^2} \sinh(q\pi/(2\beta))} \sin\left(\frac{q}{2\beta} \cosh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right).$$

L'apparition d'une fonction oscillante dans le cas  $u_s^2$  dénote un comportement différent de celui du cas  $u_s^1$ , puisque l'intégrale peut s'annuler pour certaines valeurs (en fait une infinité) des paramètres de l'équation, ce qui veut dire que les oscillations peuvent disparaître. Ceci est important car, pour une onde solitaire  $u_s^1$ , le comportement de l'intégrale de Fourier caractérise tout-à-fait ce qui se passe dans la solution des équations complètes. On peut donc légitimement imaginer que le comportement différent observé ici pour  $u_s^2$  pourrait se retrouver dans la résolution d'un système qui admet ce type de solutions.

#### 5. Comportement en fonction de la longueur du domaine de calcul

Si l'on se place désormais dans un contexte numérique, l'occurrence d'une fonction sinusoïdale dans le résidu pose des difficultés supplémentaires dans l'observation des petites oscillations. Dans le cas présent, les amplitudes sont explicitement décrites en fonction de  $L$

$$a_{L/2}^1 = \frac{K}{q^2} u_s^1\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{K}{q} \left( \frac{1}{\sin(qL/2)} \frac{\pi a q}{2\beta^2 \sinh(q\pi/(2\beta))} + \frac{a}{1-e^{-q\pi/\beta}} \left( J_s^1(L) - \frac{J_c^1(L)}{\tan(qL/2)} \right) \right), \quad (8)$$

$$a_{L/2}^2 = \frac{K}{q^2} u_s^2\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{K}{q} \left( \frac{1}{\sin(qL/2)} \frac{\pi a \sin\left(\frac{q}{2\beta} \cosh^{-1}(1/\varepsilon)\right)}{2\beta\sqrt{1-\varepsilon^2} \sinh(q\pi/(2\beta))} + \frac{a}{1-e^{-q\pi/\beta}} \left( J_s^2(L) - \frac{J_c^2(L)}{\tan(qL/2)} \right) \right). \quad (9)$$

Tout d'abord, dans le cas  $u_s^1$ , on retrouve le comportement classique des ondes solitaires généralisées : si l'on dessine l'amplitude en fonction de  $L$ , on voit une alternance de formes en  $\cap$  et  $\cup$  provenant de  $1/\sin(qL/2)$ . Les extrema locaux peuvent être exponentiellement petits en fonction de certains paramètres, mais l'amplitude ne

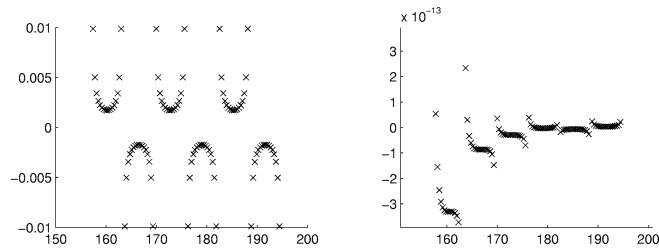


Fig. 2. Comportement classique de l'amplitude  $a_{L/2}^1(L)$  des ondes solitaires généralisées (gauche) ; comportement particulier de  $a_{L/2}^2(L)$  dans le cas d'un forçage large (droite).

Fig. 2. Classical behavior of the amplitude  $a_{L/2}^1(L)$  of generalized solitary waves (left); special behavior of  $a_{L/2}^2(L)$  in the case of a wide forcing (right).

s'annule jamais (Fig. 2 à gauche). Ces observations issues des calculs numériques sont donc en accord avec la conclusion de l'existence des oscillations. Tout cela est cependant soumis à la condition que le deuxième terme soit négligeable, donc que  $L$  soit assez grand.

En ce qui concerne le cas  $u_s^2$ , effectuer la même chose peut mener à une erreur d'interprétation. Pour la plupart des valeurs des paramètres, ce sera identique. En revanche, pour un jeu de paramètres un peu différent, on peut rendre le résidu arbitrairement petit. Ceci implique que sur un intervalle de  $L$ , fixé simplement à partir de l'approximation de  $u_s^2$ , on peut voir apparaître le comportement du dernier terme, issu des restes du calcul des résidus, et qui n'est pas significatif du phénomène (Fig. 2 à droite). Pour corriger cela, il faudrait déterminer un intervalle de  $L$  sur lequel le résidu redevient prédominant, bien que petit. Or, cet intervalle serait arbitrairement éloigné. On en conclut que dans ce cas, le calcul numérique, ou tout au moins la méthode utilisée, ne permet pas de capter directement le bon comportement.

En conséquence, il est indispensable d'avoir une connaissance du comportement au niveau des singularités du plan complexe lorsque l'on cherche de telles solutions. Ensuite seulement, une étude numérique en fonction de la taille du domaine de calcul peut être entreprise et apporter des informations pertinentes.

## Remerciements

Nous tenons à remercier Eric Lombardi pour l'intérêt porté à ce travail. Le premier auteur remercie la Délégation Générale pour l'Armement pour son soutien.

## Références

- [1] J.P. Boyd, Weakly Nonlocal Solitary Waves and Beyond-All-Orders Asymptotics, in: Math. Appl., Kluwer Academic, 1998.
- [2] F. Dias, A. Il'ichev, Interfacial waves with free-surface boundary conditions: an approach via a model equation, *Physica D* 150 (2001) 278–300.
- [3] F. Dias, J.-M. Vanden-Broeck, On internal fronts, *J. Fluid Mech.* 479 (2003) 145–154.
- [4] E. Lombardi, Oscillatory Integrals and Phenomena Beyond All Algebraic Orders, in: Lecture Notes in Math., Vol. 1741, Springer-Verlag, 2000.