

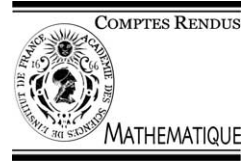


ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 437–440



Logique/Combinatoire

## Sur les graphes 2-reconstructibles

Abderrahim Boussairi, Abdelhak Chaichaa

Université Hassan II, faculté des sciences Ain Chock, département de mathématiques et informatique, km 8 route d'El Jadida,  
BP 5366, Maarif, Casablanca, Maroc

Reçu le 31 juillet 2003 ; accepté le 27 août 2003

Présenté par Jean-Yves Girard

---

### Résumé

Soit  $k$  un entier ( $k \geq 1$ ) et  $G = (V, E)$  un graphe ayant au moins  $k$  sommets, un graphe  $G' = (V, E')$  est une  $k$ -reconstruction de  $G$  si pour toute partie  $W$  de  $V$  à  $k$  éléments, les sous-graphes  $G(W)$  et  $G'(W)$  induits par  $W$  sont isomorphes. Le graphe  $G$  est  $k$ -reconstructible, lorsque toute  $k$ -reconstruction de  $G$  est isomorphe à  $G$ . Lopez (Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317) a prouvé que tout graphe est 6-reconstructible. Pour  $k = 3, 4$  et  $5$ , les graphes  $k$ -reconstructibles ont été étudiés dans Boudabbous et Lopez (Eur. J. Combin. 23 (2002) 507–522 ; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 329 (1999) 845–848). Dans cette Note, nous introduisons un groupe de permutations permettant d'interpréter la 2-reconstructibilité et nous caractérisons les graphes qui s'abritent dans un graphe 2-reconstructible. *Pour citer cet article : A. Boussairi, A. Chaichaa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**On the 2-reconstructible graphs.** Let  $k$  be an integer ( $k \geq 1$ ) and  $G = (V, E)$  a graph with more than  $k$  vertices, a graph  $G' = (V, E')$  is a  $k$ -reconstruction of  $G$  if, for any subset  $W$  of  $V$  with  $k$  elements, the subgraphs  $G(W)$  and  $G'(W)$  induced by  $W$  are isomorphic. The graph  $G$  is  $k$ -reconstructible when each  $k$ -reconstruction of  $G$  is isomorphic to  $G$ . Lopez (Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317) proved that any graph is 6-reconstructible. For  $k = 3, 4$  and  $5$ , the  $k$ -reconstructible graphs were studied in Boudabbous and Lopez (Eur. J. Combin. 23 (2002) 507–522; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 329 (1999) 845–848). In this Note, we introduce a permutations group allowing for the interpretation of the 2-reconstructibility and we characterize the graphs which are embedded in a 2-reconstructible graph. *To cite this article: A. Boussairi, A. Chaichaa, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

---

Adresses e-mail : [aboussairi@hotmail.com](mailto:aboussairi@hotmail.com) (A. Boussairi), [chaichaa@hotmail.com](mailto:chaichaa@hotmail.com) (A. Chaichaa).

1631-073X/\$ – see front matter © 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

doi:10.1016/j.crma.2003.08.002

## 1. Introduction

### 1.1. Graphe ; isomorphisme ; abriement

Un *graphe* est un couple  $G = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini et  $E$  est un ensemble de couples d'éléments distincts de  $V$ . Les éléments de  $V$  sont les *sommets* de  $G$  et les éléments de  $E$  sont les *arêtes* de  $G$ . Une paire  $\{x, y\}$  d'éléments de  $V$  telle que l'intersection  $\{(x, y), (y, x)\} \cap E$  est un singleton est appelée paire *orientée* de  $G$ . Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes et  $f$  une application de  $V_1$  dans  $V_2$  ; l'application  $f$  est un *isomorphisme* de  $G_1$  sur  $G_2$  si elle est bijective et si pour toute paire  $\{x, y\}$  d'éléments de  $V_1$  nous avons :  $(x, y) \in E_1$  est équivalent à  $(f(x), f(y)) \in E_2$ . Lorsqu'une telle bijection existe, les graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont *isomorphes*, ce qui est noté  $G_1 \simeq G_2$ . Un *automorphisme* d'un graphe  $G = (V, E)$  est un isomorphisme de  $G$  sur lui-même ; les automorphismes du graphe  $G$  forment un groupe de permutations de l'ensemble  $V$  appelé *groupe d'automorphismes* de  $G$  et noté  $\text{Aut}(G)$ . Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , nous disons qu'un graphe  $H$  s'*abrite* dans  $G$  lorsqu'il existe une partie  $W$  de  $V$  telle que  $H$  soit isomorphe au *sous-graphe*  $G(W) = (W, E \cap (W \times W))$  de  $G$  induit par  $W$ .

Dans la suite, le groupe symétrique sur un ensemble  $Y$  sera noté  $\text{Sym}(Y)$  et si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $Y$ , l'ensemble  $\{x \in Y : x \in A \text{ et } x \notin B\}$  sera noté  $A \setminus B$ .

### 1.2. La décomposabilité des graphes

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$ , une partie  $W$  de  $V$  est un *intervalle* de  $G$  lorsque pour tous éléments  $a, b$  de  $W$  et  $x$  de  $V \setminus W$  nous avons :  $(a, x) \in E$  (resp.  $(x, a) \in E$ ) si et seulement si  $(b, x) \in E$  (resp.  $(x, b) \in E$ ). Par exemple,  $\emptyset$ ,  $\{x\}$  ( $x \in V$ ) et  $V$  sont des intervalles de  $G$  appelés intervalles *triviaux*. Toute paire orientée de  $G$  constituant un intervalle sera appelée un *2-intervalle* de  $G$ . Un graphe est *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux, il est *décomposable* dans le cas contraire.

### 1.3. Hypomorphie ; restructibilité

Soit  $V$  un ensemble à  $n$  éléments et  $k$  un entier naturel inférieur ou égal à  $n$ . Deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  définis sur l'ensemble  $V$  sont *k-hypomorphes* si pour toute partie  $W$  de cardinal  $k$  de  $V$ , les sous-graphes  $G_1(W)$  et  $G_2(W)$  sont isomorphes. Un graphe  $G$  est *k-restructible* si tout graphe  $k$ -hypomorphe à  $G$  lui est isomorphe.

Il est clair qu'un graphe  $G$  est 2-restructible si tout graphe  $G'$ , obtenu à partir de  $G$  par inversion de l'orientation de certaines de ses paires orientées, est isomorphe à  $G$ .

### 1.4. Position du problème

À l'origine des problèmes de reconstructions se trouve la conjecture de Ulam [7]. Plusieurs variantes de cette conjecture ont été ensuite proposées notamment par Fraïssé [4] et Pouzet [6]. Dans [5] Lopez a prouvé que tout graphe à au moins 13 sommets est 6-restructible. Par contre, pour  $k = 2, 3, 4$  ou  $5$  les graphes ne sont pas en général  $k$ -restructibles. Le problème de la classification des graphes  $k$ -restructibles pour  $k = 4$  et  $k = 5$  a été résolu par Boudabbous [1] et par Boudabbous et Lopez [2] pour  $k = 3$ .

Concernant les graphes 2-restructibles, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** *Soit  $G$  un graphe. Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que  $G$  s'abrite dans un graphe 2-restructible :*

(HT<sub>1</sub>) *Deux paires orientées de  $G$  sont disjointes.*

(HT<sub>2</sub>) *Tout sous-graphe de  $G$  à  $s$  paires orientées et  $2s$  sommets ( $s \geq 2$ ) est décomposable.*

## 2. Quelques résultats concernant les graphes 2-reconstructibles

Avant d'énoncer les principaux résultats de ce paragraphe, nous introduisons quelques définitions et notations qui vont nous servir par la suite.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $\{x, y\}$  une paire d'éléments de  $V$ .

- (a) Si  $(x, y) \in E$  et  $(y, x) \in E$  on note  $x \xleftrightarrow{G} y$ .
- (b) Si  $(x, y) \in E$  et  $(y, x) \notin E$  on note  $x \xrightarrow{G} y$ .
- (c) Si  $(x, y) \notin E$  et  $(y, x) \notin E$  on note  $x \overset{G}{\cdot\cdot\cdot} y$ .

Dans le cas (b) nous disons que la paire  $\{x, y\}$  est *orientée de  $x$  vers  $y$* .

Pour toute paire orientée  $\{a, b\}$  de  $G$ , nous notons  $G^{(a,b)}$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en inversant l'orientation de la paire  $\{a, b\}$ .

**Remarque 1.** (i) Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes isomorphes et  $\{a, b\}$  une paire orientée de  $G_1$ . Tout isomorphisme  $\sigma$  de  $G_1$  sur  $G_2$  est un isomorphisme de  $G_1^{(a,b)}$  sur  $G_2^{(\sigma(a), \sigma(b))}$ .

(ii) Un graphe  $G$  est 2-reconstructible si et seulement si pour toute paire orientée  $\{a, b\}$  de  $G$ , le graphe  $G^{(a,b)}$  est isomorphe à  $G$ .

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $x$  un sommet de  $G$ . Considérons les ensembles :  $D_e(x) = \{y \in V \mid y \xrightarrow{G} x\}$  (resp.  $D_s(x) = \{y \in V \mid x \xrightarrow{G} y\}$ ) et  $D(x) = D_e(x) \cup D_s(x)$ . Le cardinal de  $D_e(x)$  (resp.  $D_s(x)$ ) s'appelle le *degré entrant* (resp. le *degré sortant*) de  $x$  et sera noté  $d_e(x)$  (resp.  $d_s(x)$ ). Le *degré* de  $x$  est  $d(x) = d_e(x) + d_s(x)$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe dont les paires orientées sont disjointes deux à deux. A un élément  $x$  de  $V$ , nous associons l'élément  $\bar{x}$  de  $V$  tel que :  $\bar{x} = x$  si  $d(x) = 0$  et si  $d(x) = 1$ ,  $\bar{x}$  est l'unique élément de  $V$  formant une paire orientée avec  $x$  dans  $G$ . Nous définissons ainsi une permutation involutive de  $V$ . Dorénavant, si  $A$  est une partie de  $V$  l'image de  $A$  par cette permutation sera notée  $\bar{A}$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Nous appelons *pseudo-automorphisme* de  $G$  toute permutation  $\sigma$  de  $V$  telle que : pour toute paire  $\{x, y\}$  d'éléments de  $V$ , les sous-graphes  $G(\{x, y\})$  et  $G(\{\sigma(x), \sigma(y)\})$  sont isomorphes. L'ensemble des pseudo-automorphismes de  $G$  est un groupe de permutations de  $V$  contenant  $\text{Aut}(G)$  et sera noté  $\text{Paut}(G)$ .

Dans toute la suite, l'orbite d'un élément  $x$  de  $V$ , suivant  $\text{Paut}(G)$ , sera notée  $O(x)$ .

Rappelons, tout d'abord, le résultat suivant dû à Boudabbous et Lopez [3].

**Lemme 2.1.** *Dans un graphe 2-reconstructible, deux paires orientées sont disjointes.*

Soit  $G = (V, E)$  un graphe dont les paires orientées sont disjointes deux à deux. Nous appelons *section* de  $G$  toute partie  $S$  de  $V$  telle que  $S \cup \bar{S} = V$  et  $S \cap \bar{S} = \{x \in V \mid d(x) = 0\}$ .

**Lemme 2.2.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe à  $n$  sommets et  $r$  paires orientées disjointes deux à deux. Nous avons alors :*

- (i) *Le graphe  $G$  possède  $2^r$  sections contenant chacune  $n - r$  éléments.*
- (ii) *Pour toute permutation  $\sigma$  appartenant à  $\text{Paut}(G)$  et pour tout élément  $x$  de  $V$  nous avons :  $d(x) = d(\sigma(x))$  et  $\sigma(\bar{x}) = \sigma(x)$ .*
- (iii) *Les automorphismes de  $G$  sont exactement les pseudo-automorphismes de  $G$  qui laissent invariant la section  $S_0 = \{x \in V \mid d_e(x) = 0\}$ .*

**Proposition 2.3.** *Sous les notations et les hypothèses du Lemme 2.2, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le graphe  $G$  est 2-reconstructible.*
- (ii) *Le groupe  $\text{Paut}(G)$  agit transitivement sur l'ensemble des sections de  $G$ .*
- (iii) *L'indice du sous-groupe  $\text{Aut}(G)$  dans  $\text{Paut}(G)$  est égal à  $2^s$ .*

**Corollaire 2.4.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe 2-reconstructible et  $x$  un sommet de  $G$  alors :  $O(x) = O(\bar{x})$  et le sous-graphe  $G(O(x))$  est 2-reconstructible.*

### 3. Preuve du Théorème 1.1

En plus des résultats du paragraphe précédent la preuve du théorème utilise les résultats suivants.

**Lemme 3.1.** *Un graphe 2-reconstructible n'abrite pas les graphes suivants :*

$$I_1 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{(0, 1), (2, 3), (0, 2), (2, 0), (1, 3), (3, 1)\}) \quad \text{et}$$

$$I_2 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{(0, 1), (2, 3), (0, 3), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}). \quad (1)$$

**Proposition 3.2.** *Tout graphe 2-reconstructible  $G = (V, E)$  à  $s$  paires orientées et  $2s$  sommets admet un 2-intervalle.*

**Démonstration.** Notons  $\vec{G} = \{\{z_1, \bar{z}_1\}, \dots, \{z_s, \bar{z}_s\}\}$  l'ensemble des paires orientées de  $G$ . Le groupe  $\text{Paut}(G)$  agit d'une manière naturelle sur  $\vec{G}$ . Soit  $\varphi$  l'homomorphisme du groupe  $\text{Paut}(G)$  dans  $\text{Sym}(\vec{G})$  correspondant à cette action. Le noyau de  $\varphi$  est  $\ker(\varphi) = \Delta \cap \text{Paut}(G)$  où  $\Delta$  est le sous-groupe de  $\text{Sym}(V)$  engendré par les transpositions  $(z_1, \bar{z}_1), \dots, (z_s, \bar{z}_s)$ . D'après la Proposition 2.3, l'ordre de  $\text{Paut}(G)$  est divisible par  $2^s$ . Or  $2^s$  ne divise pas  $s!$ , donc l'homomorphisme  $\varphi$  n'est pas injective. Soit  $\delta$  un élément de  $\ker(\varphi) \setminus \{\text{Id}_V\}$  et  $(z_i, \bar{z}_i)$  une transposition figurant dans la décomposition de  $\delta$ . Montrons que  $\{z_i, \bar{z}_i\}$  est un intervalle de  $G$ , pour cela supposons le contraire. Il existe alors un élément  $a$  de  $V \setminus \{z_i, \bar{z}_i\}$  tel que  $(a \xrightarrow{G} z_i \text{ et } a \xrightarrow{G} \bar{z}_i)$  ou  $(a \xleftarrow{G} \bar{z}_i \text{ et } a \xleftarrow{G} z_i)$ . Nous avons nécessairement  $\delta(a) = \bar{a}$  et par suite le graphe  $G(\{z_i, \bar{z}_i, a, \bar{a}\})$  est isomorphe à  $I_1$  ou  $I_2$  ce qui contredit le Lemme 3.1.  $\square$

**Lemme 3.3.** *Soit  $G$  un graphe vérifiant les conditions HT<sub>1</sub> et HT<sub>2</sub> du Théorème 1.1 alors tout sous-graphe de  $G$  à  $s$  paires orientées et  $2s$  sommets ( $s \geq 2$ ) admet un 2-intervalle.*

**Preuve** (Théorème 1.1). La preuve est basée sur la Proposition 3.2, le Corollaire 2.4 et le Lemme 3.3.  $\square$

### Remerciements

Nos sincères remerciements à Pierre Ille, Gérard Lopez et au rapporteur pour leurs remarques et suggestions.

### Références

- [1] Y. Boudabbous, La 5-reconstructibilité et l'indécomposabilité des relations binaires, Eur. J. Combin. 23 (2002) 507–522.
- [2] Y. Boudabbous, G. Lopez, Procédé de construction des relations binaires non ( $\leq 3$ )-reconstructibles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 329 (1999) 845–848.
- [3] Y. Boudabbous, G. Lopez, Communication privée, 2002.
- [4] R. Fraïssé, Abrègement entre relations, et spécialement entre chaînes, Symposi. Math., Istituto Nazionale di Alta Matematica 5 (1970) 203–251.
- [5] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317.
- [6] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Z. 150 (1976) 117–134.
- [7] S.M. Ulam, A Collection of Mathematical Problems, Wiley, New York, 1960.