Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 511–516
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique/Équations aux dérivées partielles

Une note sur les lemmes div–curl

Pascal Auscher [a], Emmanuel Russ [b], Philippe Tchamitchian [b]

[a] *Université de Paris-Sud, Orsay et CNRS UMR 8628, 91405 Orsay cedex, France*
[b] *Faculté des sciences et techniques de Saint-Jérôme, avenue escadrille Normandie-Niémen, 13397 Marseille cedex 20 et LATP, CNRS UMR 6632, France*

Reçu le 3 juin 2003 ; accepté après révision 30 août 2003

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Soit Ω un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. On donne des versions limites des lemmes div–curl sur Ω, pour une fonction donnée f sur Ω dont le gradient appartient à un espace de Hardy sur Ω. ***Pour citer cet article : P. Auscher et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

A note on div–curl lemmata. Let Ω be a strongly Lipschitz domain of $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. We give endpoint versions of div–curl lemmata on Ω, for a given function f on Ω whose gradient belongs to a Hardy space on Ω. ***To cite this article: P. Auscher et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

The classical "div–curl" lemma states that, if $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ is such that $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ with $1 < p < +\infty$, and if $\mathbf{e} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ with $p' = p/(p-1)$ with divergence zero, then $\mathbf{e} \cdot \nabla f$ belongs to the real Hardy space $H^1(\mathbb{R}^n)$, see [3,5].

This result has been transposed by Hogan et al. in the following way:

Theorem 0.1 [8]. *If Ω is a bounded strongly Lipschitz domain in $\mathbb{R}^n$, if $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ with $\nabla f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, and if $\mathbf{e} \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ with divergence zero on Ω and $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 0$ on $\partial\Omega$ ($\mathbf{n}$ stands for the outward normal vector), then $\mathbf{e} \cdot \nabla f \in H^1_z(\Omega)$.*

Adresses e-mail : pascal.auscher@math.u-psud.fr (P. Auscher), emmanuel.russ@univ.u-3mrs.fr (E. Russ), philippe.tchamitchian@univ.u-3mrs.fr (P. Tchamitchian).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.08.004

In this statement, $H_z^1(\Omega)$ stands for the space of functions in $H^1(\mathbb{R}^n)$ supported in $\overline{\Omega}$. That Ω is a strongly Lipschitz domain means that $\partial\Omega$ is a finite union of parts of rotated graphs of Lipschitz maps, at most one of these parts possibly unbounded.

If we drop the assumption $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}=0$ in Theorem 0.1, the conclusion is that $\mathbf{e}\cdot\nabla f\in H_r^1(\Omega)$, where $H_r^1(\Omega)$ is the space of functions on Ω which are the restriction to Ω of some function in $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Notice that all the previous results are false when $p=1$. In this Note, we give correct substitutes of these theorems for $p=1$.

On $\mathbb{R}^n$, one has to assume that $\nabla f\in H^1(\mathbb{R}^n)$, which means that, for all $1\leqslant i\leqslant n$, $\partial_i f\in H^1(\mathbb{R}^n)$:

Proposition 0.1. *If $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ with $\nabla f\in H^1(\mathbb{R}^n)$ and $\mathbf{e}\in L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n)$ with $\operatorname{div}\mathbf{e}=0$ on $\mathbb{R}^n$, then $\mathbf{e}\cdot\nabla f\in H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Note that this fact, although it is a statement on $\mathbb{R}^n$, had not been observed before. Proposition 0.1 is a particular case of the following result, where Ω is a strongly Lipschitz domain of $\mathbb{R}^n$ (bounded or not):

Theorem 0.2. *Let Ω be a strongly Lipschitz domain of $\mathbb{R}^n$, $f\in L_c^1(\Omega)$ with $\nabla f\in L^1(\Omega)$ and $\mathbf{e}\in L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n)$ with $\operatorname{div}\mathbf{e}=0$ in $\mathbb{R}^n$.*

(a) *If $\nabla f\in H_r^1(\Omega)$, then $\mathbf{e}\cdot\nabla f\in H_r^1(\Omega)$ and*

$$\|\mathbf{e}\cdot\nabla f\|_{H_r^1(\Omega)}\leqslant C\|\nabla f\|_{H_r^1(\Omega)}\|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

(b) *If $\nabla f\in H_z^1(\Omega)$ and $\operatorname{Tr} f=0$ on $\partial\Omega$, then $\mathbf{e}\cdot\nabla f\in H_z^1(\Omega)$ and*

$$\|\mathbf{e}\cdot\nabla f\|_{H_z^1(\Omega)}\leqslant C\|\nabla f\|_{H_z^1(\Omega)}\|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

(c) *If $\nabla f\in H_r^1(\Omega)$ and $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}=0$ on $\partial\Omega$, then $\mathbf{e}\cdot\nabla f\in H_z^1(\Omega)$ and*

$$\|\mathbf{e}\cdot\nabla f\|_{H_z^1(\Omega)}\leqslant C\|\nabla f\|_{H_r^1(\Omega)}\|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Here, $f\in L_c^1(\Omega)$ means that, for all compact subset $K\subset\mathbb{R}^n$, $\int_{K\cap\Omega}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty$. Moreover, $\nabla f\in H_r^1(\Omega)$ (resp. $\nabla f\in H_z^1(\Omega)$) means that, for each $1\leqslant i\leqslant n$, $\partial_i f\in H_r^1(\Omega)$ (resp. for each $1\leqslant i\leqslant n$, $\partial_i f\in H_z^1(\Omega)$). Observe also that, in Theorem 0.2, $\operatorname{Tr} f$ is well-defined in $L^1(\partial\Omega)$ since $\nabla f\in L^1(\Omega)$. Finally, there exists $f\in L^1(\Omega)$ such that $\nabla f\in H_r^1(\Omega)$, $\operatorname{Tr} f=0$ on $\partial\Omega$ and $\nabla f\notin H_z^1(\Omega)$. Thus, the various functions spaces referred to in Theorem 0.2 are all distinct from each other.

The proof relies on a maximal characterization of functions in $L_c^1(\Omega)$ whose gradient belong to $H_r^1(\Omega)$ or to $H_z^1(\Omega)$.

Theorem 0.2 is stated and proved in [1], where a systematic study of spaces of functions in $L^1(\Omega)$ whose gradients belong to $H_r^1(\Omega)$ or to $H_z^1(\Omega)$ is presented.

Remark 1. A substitute to the classical div–curl lemma when $p=+\infty$ is as follows: if $\mathbf{e}\in H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n)$ satisfies $\operatorname{div}\mathbf{e}=0$ in $\mathbb{R}^n$, and if $\mathbf{F}\in L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n)$ is such that $\operatorname{curl}\mathbf{F}=0$ in $\mathbb{R}^n$, then $\mathbf{e}\cdot\mathbf{F}\in H^1(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|\mathbf{e}\cdot\mathbf{F}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|\mathbf{e}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

The proof of this result relies on the atomic decomposition for the divergence-free Hardy space $H_\rho^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n)$ [7]. When Ω is a strongly Lipschitz domain of $\mathbb{R}^n$, a similar statement for a vector field $\mathbf{e}\in H_z^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$ may also be given, thanks to the results of [9]. The case when $\mathbf{e}\in H_r^1(\Omega,\mathbb{C}^n)$ is still open.

1. Introduction

On désigne sous le vocable « lemme div–curl » un ensemble de résultats qui font apparaître des propriétés de régularité de certaines expressions différentielles, l'existence de telles propriétés étant liée à des compensations portées par les expressions étudiées.

L'exemple le plus simple, et le plus caractéristique, est le suivant : on considère une distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 < p < +\infty$, une distribution vectorielle $\mathbf{e} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$, $p' = p/(p-1)$, à divergence nulle, et on forme $\mathbf{e} \cdot \nabla f$. Cette fonction appartient bien sûr à $L^1(\mathbb{R}^n)$, mais on a en fait beaucoup mieux.

2. Résultats

Théorème 2.1 [3,5]. *Sous les hypothèses précédentes,* $\mathbf{e} \cdot \nabla f$ *appartient à l'espace de Hardy réel* $H^1(\mathbb{R}^n)$ *et on a*

$$\|\mathbf{e} \cdot \nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{e}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)},$$

où $C > 0$ *ne dépend que de* n *et* p.

Rappelons comment est défini l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ (voir, par exemple, [6]) : on fixe une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ d'intégrale 1 et, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$. Si $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\mathcal{M}g(x) = \sup_{t>0} |g * \phi_t|(x).$$

Alors $g \in H^1(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $\mathcal{M}g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, et la norme de g dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ est

$$\|g\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{M}g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

On rappelle également que $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ et que toute fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est d'intégrale nulle. De plus, contrairement à $L^1(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$ est un espace dual (voir [4]). On mesure ainsi l'amélioration de régularité contenue dans le Théorème 2.1. Nous renvoyons à [3] et [5] pour de nombreux autres exemples et applications.

Considérons maintenant $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine fortement lipschitzien (ce qui signifie que $\partial\Omega$ est une réunion finie de portions de graphes lipschitziens, ou d'images de tels graphes par une transformation orthogonale, et qu'au plus une de ces portions est non bornée). Hogan et al. ont transposé le Théorème 2.1 de la manière suivante (supposant de plus Ω borné) :

Théorème 2.2 [8]. *Si* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *avec* $\nabla f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, *si* $\mathbf{e} \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *avec* $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ *sur* Ω *et* $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$, *alors* $\mathbf{e} \cdot \nabla f \in H^1_z(\Omega)$ *et*

$$\|\mathbf{e} \cdot \nabla f\|_{H^1_z(\Omega)} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}\|\mathbf{e}\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

où la constante $C > 0$ *ne dépend que de* Ω *et* p.

Dans cet énoncé, $\mathbf{n}$ désigne la normale extérieure, de sorte que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}$ est bien défini sur $\partial\Omega$ lorsque $\mathbf{e}$ est à divergence nulle. Quant à l'espace $H^1_z(\Omega)$, il s'agit de l'espace des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{\Omega}$. Cet espace ne coïncide pas avec l'espace $H^1_r(\Omega)$ des fonctions qui sont la restriction à Ω d'au moins une fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$, parce que la fonction indicatrice de Ω n'est pas un multiplicateur de $H^1(\mathbb{R}^n)$ (songer que toute fonction de $H^1(\mathbb{R}^n)$ est d'intégrale nulle). La présence de $H^1_z(\Omega)$ dans le Théorème 2.2 est liée à la condition au bord imposée sur $\mathbf{e}$. Si on supprime cette condition, on obtient le

Théorème 2.3. *Si* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *avec* $\nabla f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, *si* $\mathbf{e} \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *avec* $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ *sur* Ω, *alors* $\mathbf{e} \cdot \nabla f \in H^1_r(\Omega)$ *et*

$$\|\mathbf{e} \cdot \nabla f\|_{H^1_r(\Omega)} \leqslant C\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}\|\mathbf{e}\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

où la constante $C > 0$ *ne dépend que de* Ω *et* p.

Cet énoncé n'est toutefois pas le but principal de cette Note. Les trois résultats qui précèdent deviennent en effet faux lorsque $p = 1$, et ce sont leurs substituts corrects que nous voulons décrire.

Dans $\mathbb{R}^n$, il convient de supposer que ∇f appartient lui-même à l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial_i f \in H^1(\mathbb{R}^n)$:

Proposition 2.4. *Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\nabla f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et $\mathbf{e} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ avec $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbf{e} \cdot \nabla f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|\mathbf{e} \cdot \nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

où $C > 0$ ne dépend que de n.

On peut remarquer que, dans cet énoncé, la condition $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ est nécessaire, car, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{e} \cdot \nabla f$ doit avoir une intégrale nulle sur $\mathbb{R}^n$. Ce résultat, bien qu'il fasse intervenir l'espace de Hardy H^1 sur $\mathbb{R}^n$ et non sur un domaine, semble nouveau. Il s'agit d'un cas particulier de l'énoncé suivant, dans lequel Ω est un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ (borné ou non) :

Théorème 2.5. *Soit $f \in L^1_c(\Omega)$ telle que $\nabla f \in L^1(\Omega)$ et $\mathbf{e} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ vérifiant $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ dans $\mathbb{R}^n$.*

(a) *Si $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$, alors $\mathbf{e} \cdot \nabla f \in H^1_r(\Omega)$ et*
$$\|\mathbf{e} \cdot \nabla f\|_{H^1_r(\Omega)} \leqslant C \|\nabla f\|_{H^1_r(\Omega)} \|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$
(b) *Si $\nabla f \in H^1_z(\Omega)$ et $\operatorname{Tr} f = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\mathbf{e} \cdot \nabla f \in H^1_z(\Omega)$ et*
$$\|\mathbf{e} \cdot \nabla f\|_{H^1_z(\Omega)} \leqslant C \|\nabla f\|_{H^1_z(\Omega)} \|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$
(c) *Si $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$ et $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\mathbf{e} \cdot \nabla f \in H^1_z(\Omega)$ et*
$$\|\mathbf{e} \cdot \nabla f\|_{H^1_z(\Omega)} \leqslant C \|\nabla f\|_{H^1_r(\Omega)} \|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Dans ces énoncés, $C > 0$ ne dépend que de Ω.

On précise que $f \in L^1_c(\Omega)$ si, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $\int_{K\cap\Omega} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$. De plus, $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$ (resp. $\nabla f \in H^1_z(\Omega)$) signifie que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial_i f \in H^1_r(\Omega)$ (resp. $\partial_i f \in H^1_z(\Omega)$). Noter que, dans le Théorème 2.5, $\operatorname{Tr} f$ est bien défini dans $L^1(\partial\Omega)$ puisque $\nabla f \in L^1(\Omega)$. Par ailleurs, il existe $f \in L^1(\Omega)$ telle que $\nabla f \in H^1_r(\Omega)$, $\operatorname{Tr} f = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\nabla f \notin H^1_z(\Omega)$. Les espaces fonctionnels que nous employons sont donc tous bien distincts.

Indication sur la preuve. Montrons par exemple l'assertion (a) du Théorème 2.5. Soit $x \in \Omega$. On note $T_x(\Omega)$ la classe des fonctions $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans un cube Q centré dans Ω et contenant x, telles que $\phi = 0$ sur $\partial\Omega$ et

$$\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + l_Q \|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant |Q|^{-1},$$

où l_Q désigne la longueur du côté de Q et $|Q|$ la mesure de Lebesgue de Q. D'après la caractérisation de $H^1_r(\Omega)$ en termes de fonction maximale (voir [2]), il suffit de montrer que l'expression

$$M(x) = \sup_{\phi\in T_x} \left| \int_\Omega \mathbf{e}(y) \cdot \nabla f(y) \phi(y)\,\mathrm{d}y \right|$$

définit une fonction de $L^1(\Omega)$ et que

$$\|M\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C \|\nabla f\|_{H^1_r(\Omega)} \|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

On fixe donc une fonction $\phi \in T_x(\Omega)$. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_\Omega \mathbf{e}(y)\cdot\nabla f(y)\phi(y)\,\mathrm{d}y = -\int_\Omega f(y)\,\mathrm{div}(\phi\,\mathbf{e})(y)\,\mathrm{d}y.$$

La fonction vectorielle $\phi\,\mathbf{e}$ est à support dans Q, bornée par $\|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|Q|^{-1}$.

De plus, $\mathrm{div}(\phi\,\mathbf{e}) = \mathbf{e}\cdot\nabla\phi$, ce qui montre que

$$l_Q\big\|\mathrm{div}(\phi\,\mathbf{e})\big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|Q|^{-1}.$$

Enfin, $\phi\,\mathbf{e}\cdot\mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Soit $G_x(\Omega)$ la classe des fonctions $\boldsymbol{\Phi} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ à support dans un cube Q contenant x et centré dans Ω, telles que $\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, et vérifiant

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + l_Q\|\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant |Q|^{-1};$$

on définit

$$N^{(1)}(f)(x) = \sup_{\boldsymbol{\Phi}\in G_x(\Omega)}\left|\int_\Omega f(y)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Phi}(y)\,\mathrm{d}y\right|.$$

On a donc

$$M(x) \leqslant \|\mathbf{e}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}N^{(1)}f(x).$$

La preuve de l'assertion (a) du Théorème 2.5 est alors une conséquence du lemme-clé suivant :

Lemme 2.6. $\|N^{(1)}f\|_{L^1(\Omega)} \sim \|\nabla f\|_{H^1_r(\Omega)}$.

La saveur de ce résultat réside dans la condition de régularité imposée aux fonctions test $\boldsymbol{\Phi}$ dans la définition de $N^{(1)}(f)$. Cette condition ne porte que sur leur divergence et non sur leur matrice jacobienne. C'est pourquoi le Lemme 2.6 ne résulte pas directement de la caractérisation des fonctions scalaires de $H^1_r(\Omega)$ en terme de fonctions maximales, mais prend en compte la structure différentielle de ∇f.

La preuve des assertions (b) et (c) du Théorème 2.5 est identique et utilise des représentations analogues en termes de fonctions maximales de $\|f\|_{H^1_z(\Omega)}$ et de $\|\nabla f\|_{H^1_z(\Omega)}$.

Tous ces résultats, et notamment la preuve du Lemme 2.6, figurent dans [1], où une étude systématique de l'espace des fonctions de $L^1(\Omega)$ dont le gradient appartient à $H^1_r(\Omega)$ ou $H^1_z(\Omega)$ est présentée.

Remarque 1. On peut aussi donner un substitut au lemme div–curl classique lorsque $p = +\infty$: si $\mathbf{e} \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ vérifie $\mathrm{div}\,\mathbf{e} = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, et si $\mathbf{F} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ est tel que $\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = 0$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbf{e}\cdot\mathbf{F} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\mathbf{e}\cdot\mathbf{F}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\mathbf{e}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|\mathbf{F}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Le preuve de ce résultat s'appuie sur la décomposition atomique pour l'espace de Hardy $H^1_\rho(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ à divergence nulle [7]. Si Ω est un domaine fortement lipschitzien de $\mathbb{R}^n$, il est également possible de donner un énoncé analogue pour un champ $\mathbf{e} \in H^1_z(\Omega, \mathbb{C}^n)$, grâce aux résultats de [9]. Le cas où $\mathbf{e} \in H^1_r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ reste ouvert.

Références

[1] P. Auscher, E. Russ, P. Tchamitchian, Hardy–Sobolev spaces on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$, Preprint.

[2] D.-C. Chang, G. Dafni, E.M. Stein, Hardy spaces, *BMO* and boundary value problems for the Laplacian on a smooth domain in $\mathbb{R}^N$, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (4) (1999) 1605–1661.

[3] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, J. Math. Pures Appl. (9) 72 (3) (1993) 247–286.
[4] R. Coifman, G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1997) 569–645.
[5] S. Dobyinsky, Lemme Div–Curl et renormalisations du produit, J. Math. Pures Appl. (9) 72 (2) (1993) 239–245.
[6] C. Fefferman, E.M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972) 137–195.
[7] J.E. Gilbert, J.A. Hogan, J.D. Lakey, Atomic decomposition of divergence-free Hardy spaces, Special Vol., Proc. 5th IWAA, Math. Moravica (1997) 33–52.
[8] J. Hogan, C. Li, A. McIntosh, K. Zhang, Global higher integrability of Jacobians on bounded domains, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17 (2) (2000) 193–217.
[9] Z. Lou, Hardy spaces of exact forms on domains, Ph.D. thesis, Australian National University, 2002.