Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 645–648
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Réflexion retardée pour des paquets d'ondes dispersives sur un réseau en forme d'étoile

Felix Ali Mehmeti, Virginie Régnier

Laboratoire de mathématiques appliquées et de calcul scientifique, Institut des sciences et techniques de Valenciennes, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 Valenciennes cedex 9, France

Reçu le 18 juillet 2002 ; accepté après révision le 30 septembre 2003

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

On étudie des équations de Klein–Gordon sur deux demi-axes de longueur infinie avec des relations de dispersion différentes. Le coefficient de réflexion au point de connexion dépend de la fréquence. On encadre la part du flot d'énergie réfléchi lorsque la bande de fréquence initiale est suffisamment étroite. La réflexion est retardée pour les basses fréquences et notre expression du retard concorde avec les expériences récentes de Haibel et Nimtz (Ann. Physik (Leipzig) 10 (2001) 707–712). Les résultats sont généralisables à un réseau en forme d'étoile à n branches ($n > 2$). ***Pour citer cet article : F. Ali Mehmeti, V. Régnier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Retarded reflection of dispersive wave packets in a star-shaped network. We study Klein–Gordon equations on two half-axes with different dispersion relations. The reflection coefficient at the connecting point depends on the frequency. We obtain lower and upper bounds of the reflected part of the energy flow when the frequency band involved in the initial signal is sufficiently narrow. The reflection is delayed for low frequency wave packets and our expression of the delay is in accordance with the recent experiments of Haibel and Nimtz (Ann. Physik (Leipzig) 10 (2001) 707–712). The results are generalized to the case of a star-shaped network with n branches ($n > 2$). ***To cite this article: F. Ali Mehmeti, V. Régnier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

Considérons n branches ($n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$) de longueur infinie reliées en un point. L'objectif de cette note est l'étude de la réflexion en ce noeud du flot d'énergie de paquets d'ondes dispersives en fonction de leur bande de fréquence. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, Ω_k désigne $(0; +\infty)$, I un intervalle de $\mathbb{R}^{+*}$, $a_n > a_{n-1} > \cdots > a_1 > 0$ et $c > 0$. Le problème noté (P) consiste à chercher $u = (u_1, \ldots, u_n)$ où, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $u_k : I \times \overline{\Omega_k} \to \mathbb{R}$ est tel que

Adresses e-mail : alimehme@univ-valenciennes.fr (F. Ali Mehmeti), virginie.regnier@univ-valenciennes.fr (V. Régnier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.09.026

$$(E_k): \quad \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(t,x) + a_k u_k(t,x) = 0, \quad \forall (t,x) \in I \times \Omega_k ;$$

$$(T_0): \quad u_i(t,0) = u_j(t,0), \quad \forall t \in I,\ \forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 ;$$

$$(T_1): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x}(t,0^+) = 0, \quad \forall t \in I ;$$

$$(IC_1): \quad u_k(0,\cdot) = \varphi_k ; \qquad (IC_2): \frac{\partial u_k}{\partial t}(0,\cdot) = 0$$

avec $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $k \in \{1,\dots,n\}$. Le modèle décrit un réseau de lignes de transmission si n est un entier supérieur à 2. Ali Mehmeti a étudié ce problème dans [1]. Il y donne les définitions de base et le cadre abstrait de (P). Voir également [2] pour des résultats récents concernant les équations aux dérivées partielles sur des multistructures. Dans le cas particulier $n = 2$, le modèle décrit aussi une particule relativiste dans un espace unidimensionnel avec une marche de potentiel de hauteur $(a_2 - a_1)$. Des résultats asymptotiques en temps pour cette situation particulière ont été calculés dans [1] à partir de la représentation spectrale de la solution. Les fonctions propres généralisées qui interviennent ont été trouvées indépendamment par Croc et Dermenjian dans une étude de milieux stratifiés bidimensionnels [3]. Pour des expériences physiques récentes, voir [5].

2. Notion de flot d'énergie

Définition 2.1. On définit $D(A) = \{v \in \prod_{k=1}^n H^2(\Omega_k)\,;\ v$ satisfait $(T_0), (T_1)\}$, A l'opérateur spatial défini sur $D(A)$ par $Av := (-c^2 \frac{\mathrm{d}^2 v_k}{\mathrm{d}x^2} + a_k v_k)_{k=1,\dots,n}$. Si u est la solution du problème (P) telle que $t \mapsto u(t,\cdot)$ est dans $C^2(\mathbb{R}^+, \prod_{k=1}^n L^2(\Omega_k)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, D(A^{1/2})) \cap C^0(\mathbb{R}^+, D(A))$ alors le flot d'énergie correspondant à u_k, en $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega_k}$, est défini par : $j_k(t,x) := c^2 u_{k,t}(t,x) u_{k,x}(t,x)$ et la densité d'énergie par : $\rho_k(t,x) := \frac{1}{2}(c^2 (u_{k,x})^2(t,x) + a_k u_k^2(t,x) + (u_{k,t})^2(t,x))$.

Il est connu que A est autoadjoint et que $D(A^{1/2}) = \{v \in \prod_{k=1}^n H^1(\Omega_k)\,;\ v$ satisfait $(T_0)\}$. Une équation de continuité relie flot et densité d'énergie : le taux d'accroissement de l'énergie dans un domaine est égal au flot entrant (le signe du flot d'énergie indiquant son sens de propagation).

3. Coefficient de réflexion et bande de fréquence

On considère maintenant (P) avec $n = 2$, $I = (0; +\infty)$, $a_2 > a_1 > 0$, $O_1 = (-\infty; 0)$, $O_2 = \Omega_2 = (0; +\infty)$ et $\varphi_1 \equiv R(f|_{O_1})$, $\varphi_2 \equiv f|_{O_2}$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et R est l'opérateur de réflexion défini par $Rf(x) = f(-x)$, pour $x \in \mathbb{R}$. On considère u_1 définie sur O_1. Appelons (KG) ce problème.

Définition 3.1. Soient $w_1 \geqslant \sqrt{a_1}$ et $0 < \varepsilon < 2(w_1 - \sqrt{a_1})$ tous deux fixés. On appelle $J = (w_1 - \varepsilon/2; w_1 + \varepsilon/2)$ et on définit le coefficient de réflexion C_R sur $\mathbb{R}$ par $C_R(w) := \frac{K_1(w^2) - K_2(w^2)}{K_1(w^2) + K_2(w^2)}$ où, pour $j \in \{1; 2\}$ $K_j(\lambda) := \mathrm{i}\sqrt{\frac{\lambda - a_j}{c^2}}$ si $\lambda \geqslant a_j$, $\sqrt{\frac{a_j - \lambda}{c^2}}$ sinon.

Notons pour w dans $(\sqrt{a_1}; \sqrt{a_2})$, $\phi(w) := \arg(C_R(w))$. On appelle $\gamma(w)$ et $\delta(w)$ les parties réelle et imaginaire de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi(w) - \frac{w}{w_1}\phi(w_1))}$ et on définit $G : \{f / (R(f|_{O_1}), f|_{O_2}) \in \prod_{k=1}^2 L^2(\Omega_k)\} \times J \to \mathbb{R}$ par $G(f,w) := \gamma(w) + \delta(w)\{\int_{-\infty}^0 f(u)\cos(\xi_1(w^2)u)\,\mathrm{d}u\}/\{\int_{-\infty}^0 f(u)\sin(\xi_1(w^2)u)\,\mathrm{d}u\}$ où $\xi_j(\lambda) = |K_j(\lambda)|$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une fonction f a pour bande de fréquence J si $(R(f|_{O_1}), f|_{O_2}) \in \prod_{k=1}^2 L^2(\Omega_k)$ et si, pour $j \in \{1; 2\}$, le support de $(V(R(f|_{O_1}), f|_{O_2}))_j$ est contenu dans $[(w_1 - \varepsilon/2)^2; (w_1 + \varepsilon/2)^2]$, où V est défini dans [1] et rappelé ci-dessous.

Rappelons que le spectre de l'opérateur spatial A est $(a_1; +\infty)$ (cf. [1]) et que ses fonctions propres généralisées sont E_λ^1 et E_λ^2 où, pour $\lambda \in (a_1; +\infty)$

$$E^1_\lambda := \begin{cases} (\cos(\xi_1(\lambda)\cdot) + \frac{\xi_2(\lambda)}{\xi_1(\lambda)}\sin(\xi_1(\lambda)\cdot),\ \mathrm{e}^{-\xi_2(\lambda)\cdot}) & \text{si } \lambda \in (a_1; a_2), \\ (\cos(\xi_1(\lambda)\cdot), \cos(\xi_2(\lambda)\cdot)) & \text{si } \lambda \in (a_2; +\infty), \end{cases}$$

$$E^2_\lambda := \left(\frac{-\sin(\xi_1(\lambda)\cdot)}{\xi_1(\lambda)}, \frac{\sin(\xi_2(\lambda)\cdot)}{\xi_2(\lambda)}\right) \quad \text{si } \lambda \in (a_2; +\infty).$$

L'opérateur V est défini comme suit : pour $j = 1; 2$ et $\lambda \in (a_2; +\infty)$ ou pour $j = 1$ et $\lambda \in (a_1; a_2)$, $(Vf)_j(\lambda) := \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f_k(u) E^j_\lambda(u)\,\mathrm{d}u$ où $f = (f_1, f_2) \in \prod_{k=1}^2 L^2(\Omega_k)$. V est donc la projection sur les fonctions propres généralisées $(E^k_\lambda)_{k\in\{1;2\}}$. Il joue le rôle habituel de la transformée de Fourier.

4. Répartition du flot d'énergie

Proposition 4.1. *Si $(R(f|_{O_1}), f|_{O_2}) \in D(A)$, le problème (KG) a une unique solution u telle que $t \mapsto u(t,\cdot) = (Ru_1(t,\cdot), u_2(t,\cdot))$ est dans $C^2(\mathbb{R}^+, \prod_{k=1}^n L^2(\Omega_k)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, D(A^{1/2})) \cap C^0(\mathbb{R}^+, D(A))$.*

Si, de plus, f a pour bande de fréquence J, alors la solution est donnée sur O_k par $u_k = u^0_k + u^R_k + u^{j,T}_k$ où $(k, j) \in \{1; 2\}^2$, $j \neq k$ et où u^0_k, u^R_k et $u^{j,T}_k$ sont les termes originel, réfléchi et transmis (provenant de la j-ième branche) de la solution du problème (KG). Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times O_1$:

$$u^0_1(t,x) = \frac{1}{2\pi c^2}\int_J \cos(wt)\Im\left(\frac{2w}{K_1(w^2)}\left(\int_{-\infty}^0 f(u)\,\mathrm{e}^{K_1(w^2)(u-x)}\,\mathrm{d}u\right)\right)\mathrm{d}w,$$

$$u^R_1(t,x) = \frac{1}{2\pi c^2}\int_J \cos(wt)\Im\left(\frac{K_1(w^2)-K_2(w^2)}{K_1(w^2)+K_2(w^2)}\frac{2w}{K_1(w^2)}\left(\int_{-\infty}^0 f(u)\,\mathrm{e}^{K_1(w^2)(u+x)}\,\mathrm{d}u\right)\right)\mathrm{d}w,$$

$$u^{2,T}_1(t,x) = \frac{1}{2\pi c^2}\int_J \cos(wt)\Im\left(\frac{2K_1(w^2)}{K_1(w^2)+K_2(w^2)}\frac{2w}{K_1(w^2)}\left(\int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-K_2(w^2)u+K_1(w^2)x}\,\mathrm{d}u\right)\right)\mathrm{d}w.$$

Des termes d'énergie positive et négative peuvent être isolés dans u^0_1 et u^R_1 qui sont notés $u^{0,+}_1$, $u^{0,-}_1$ et $u^{R,+}_1$, $u^{R,-}_1$ respectivement, où :

$$u^{R,+}_1(t,x) = \frac{1}{2\pi c^2}\Im\left(\int_J \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wt}\frac{K_1(w^2)-K_2(w^2)}{K_1(w^2)+K_2(w^2)}\frac{w}{K_1(w^2)}\left(\int_{-\infty}^0 f(u)\,\mathrm{e}^{K_1(w^2)(u+x)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}w\right),$$

$$u^{0,+}_1(t,x) = \frac{1}{2\pi c^2}\Im\left(\int_J \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wt}\frac{w}{K_1(w^2)}\left(\int_{-\infty}^0 f(u)\,\mathrm{e}^{K_1(w^2)(u-x)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}w\right),$$

$$u^{R,-}_1(t,x) = \frac{1}{2\pi c^2}\Im\left(\int_J \mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}\frac{K_1(w^2)-K_2(w^2)}{K_1(w^2)+K_2(w^2)}\frac{w}{K_1(w^2)}\left(\int_{-\infty}^0 f(u)\,\mathrm{e}^{K_1(w^2)(u+x)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}w\right),$$

$$u^{0,-}_1(t,x) = \frac{1}{2\pi c^2}\Im\left(\int_J \mathrm{e}^{\mathrm{i}wt}\frac{w}{K_1(w^2)}\left(\int_{-\infty}^0 f(u)\,\mathrm{e}^{K_1(w^2)(u-x)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}w\right).$$

Par analogie, on définit u^0_2, u^R_2 et $u^{1,T}_2$. Les flots d'énergie originel (associé à u^0_1) et réfléchi (associé à u^R_1) seront notés j^0_1 et j^R_1. Remarquons que le flot j_1 n'est pas la somme des flots originel, réfléchi et transmis mais le terme additionnel est proportionnel à la largeur ε de la bande de fréquence qui est supposée par la suite suffisamment petite. Les flots d'énergie correspondant à $u^{0,+}_1$, $u^{0,-}_1$ et $u^{R,+}_1$, $u^{R,-}_1$ seront notés $j^{0,+}_1$, $j^{0,-}_1$, $j^{R,+}_1$ et $j^{R,-}_1$.

La répartition du flot d'énergie est la suivante :

Théorème 4.2. *Etant donné* $(t, w_1, \varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times [\sqrt{a_1}; +\infty) \times (0; 2(w_1 - \sqrt{a_1}))$, *on suppose que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *donnée initiale du problème* (KG), *vérifie les deux conditions suivantes* :

(1) f *a pour bande de fréquence* $J = (w_1 - \varepsilon/2; w_1 + \varepsilon/2)$.

(2) ε *est tel que les fonctions* $w \mapsto \cos(wt)$, $w \mapsto \sin(wt)$, $T_s f : w \mapsto \int_{-\infty}^0 f(u)\sin(\xi_1(w^2)u)\,\mathrm{d}u$ *et, si* $\overline{J}$ *est inclus dans* $(\sqrt{a_2}; +\infty)$, $T_c f : w \mapsto \int_{-\infty}^0 f(u)\cos(\xi_1(w^2)u)\,\mathrm{d}u$ *sont de signe constant et ne s'annulent pas sur* J. *Si* $\overline{J} \subset (\sqrt{a_1}; \sqrt{a_2})$, *il est aussi tel que* $T_s f$ *et* $T_c f$ *sont des fonctions continues sur* $\overline{J}$.

Conclusion. (1) $(R(f|_{O_1}), f|_{O_2}) \in D(A)$.

(2) Si $\overline{J} \subset (\sqrt{a_2}; +\infty)$, alors $C_R(w_1)$ est réel, $j_1^0(t, 0^-) \neq 0$ pour $t > 0$ et $j_1^R(t, 0^-)/j_1^0(t, 0^-)$ appartient à $[-(C_R(w_1 - \varepsilon/2))^2; -(C_R(w_1 + \varepsilon/2))^2]$.

(3) Si $\overline{J} \subset (\sqrt{a_1}; \sqrt{a_2})$, $C_R(w_1)$ est complexe. Le terme originel (resp. réfléchi) de la solution est la somme des termes $u_1^{0,+}$ et $u_1^{0,-}$ (resp. $u_1^{R,+}$ et $u_1^{R,-}$) donnés dans la Définition 3.

Alors $j_1^{0,-}(0, 0^-) \neq 0$, $j_1^{0,+}(0, 0^-) \neq 0$ et, si $G(f, w) \geqslant 0$, $\forall w \in J$, les deux quotients $j_1^{R,\pm}(\pm\phi(w_1)/w_1, 0^-)/j_1^{0,\pm}(0, 0^-)$ appartiennent à $[-\max_{w\in\overline{J}} G^2(f, w); -\min_{w\in\overline{J}} G^2(f, w)]$.

(Notons que $G(f, w_1) = 1$ et que $w \mapsto G(f, w)$ est continue sur $\overline{J}$.)

La théorie spectrale de l'opérateur spatial A (cf. [1]) est utilisée pour obtenir une expression pour la solution de (KG). L'idée du choix de la base propre vient d'un article de Deutch et Low (cf. [4]). On a ensuite recours à une formule de la moyenne pour extraire le coefficient de réflexion des intégrales qui apparaissent dans le flot d'énergie. Dans le cas des paquets d'ondes à basses fréquences, on peut dire, en mécanique quantique, qu'une partie des particules parvient à franchir la barrière malgré une énergie insuffisante : c'est l'effet de tunnel. L'interaction entre la particule et la marche de potentiel la maintient pendant un moment au voisinage de zéro avant qu'elle ne soit réfléchie, d'où le retard $\phi(w_1)/w_1$, fonction décroissante de la fréquence w_1. Ali Mehmeti avait déjà conjecturé ce phénomène de retard dans la réflexion dans [1], Section 1.6.20. A noter le phénomène d'inversion du temps qui rend le retard négatif pour u_1^-. En fait ce terme d'énergie négative décrivant une particule qui se propage en remontant le temps doit être interprété comme un terme d'énergie positive correspondant à une antiparticule. Des conditions suffisantes pour les hypothèses du théorème sur la donnée initiale f peuvent être données.

Exemple numérique. On choisit $c = a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $t = 0$, $w_1 = 1{,}9$, $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\bigl(V\bigl(R(f|_{O_1}), f|_{O_2}\bigr)\bigr)_1(\lambda) = \begin{cases} (6\pi/(\lambda-1))(\sqrt{\lambda-1} - \sqrt{(w_1-\varepsilon/2)^2-1}) & \text{si } \sqrt{\lambda} \in \overline{J}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f ainsi choisie vérifie les hypothèses du théorème. La part du flot d'énergie réfléchi appartient à $[0{,}998602; 1{,}00218]$ avec un retard de 0,89535, i.e. la réflexion est retardée mais presque totale.

Remark 1. Si $n > 2$, C_R devient $C_R^k(w) := (K_k(w^2) - \sum_{j\neq k} K_j(w^2))/(\sum_{j=1}^n K_j(w^2))$ (coefficient de réflexion sur la k-ième branche) et le coefficient de transmission de la l-ième branche vers la k-ième s'écrit $(l \neq k)$: $T_{l,k}(w) = 2K_k(w^2)/(\sum_{j=1}^n K_j(w^2))$ où $(l, k) \in \{1 \cdots n\}^2$, $w \in \mathbb{R}$.

Références

[1] F. Ali Mehmeti, Spectral theory and L^∞-time decay estimates for Klein–Gordon equations on two half axes with transmission: the tunnel effect, Math. Methods Appl. Sci. 17 (1994) 697–752.

[2] F. Ali Mehmeti, J. von Below, S. Nicaise (Eds.), Partial Differential Equations on Multistructures, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, 2001.

[3] E. Croc, Y. Dermenjian, Analyse spectrale d'une bande acoustique multistratifiée I : Principe d'absorption limite pour une stratification simple, SIAM J. Math. Anal. 26 (1995) 880–924.

[4] J.M. Deutch, F.E. Low, Barrier penetration and superluminal velocity, Ann. Physics 228 (1993) 184–202.

[5] A. Haibel, G. Nimtz, Universal relationship of time and frequency in photonic tunnelling, Ann. Physik (Leipzig) 10 (2001) 707–712.