

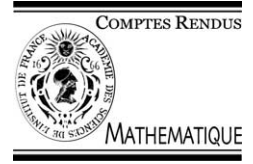


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 97–102



Physique mathématique/Équations aux dérivées partielles

Modélisation de structures électromagnétiques périodiques – matériaux bianisotropes avec mémoire

Alain Bossavit^a, Georges Griso^b, Bernadette Miara^c

^a Laboratoire de génie électrique de Paris (CNRS), 11, rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

^b Université Pierre et Marie Curie, laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu, 75252 Paris, France

^c ESIEE, laboratoire de modélisation et simulation numérique, 2, boulevard Blaise Pascal, 93160 Noisy-le-Grand, France

Reçu le 8 septembre 2003 ; accepté le 14 septembre 2003

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

On propose dans cette Note une justification rigoureuse de la loi de comportement limite d'un matériau électromagnétique bianisotrope avec mémoire présentant une structure périodique et dont tous les paramètres constitutifs dépendent du temps. Cette étude est menée sur les formulations temporelle puis fréquentielle des équations de Maxwell en appliquant la méthode de l'éclatement périodique introduite par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso. **Pour citer cet article : A. Bossavit et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Modelling of periodic electromagnetic structures – bi-anisotropic materials with memory. In this Note we propose a rigorous justification of the limit constitutive law of a periodic bi-anisotropic electromagnetic structure with memory. This study is based on the periodic unfolding method, introduced by D. Cioranescu, A. Damlamian and G. Griso, and is applied on the time domain and on the frequency domain. **To cite this article : A. Bossavit et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).**

© 2003 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let α be a positive parameter meant to go to 0, we consider the electromagnetic field u^α of a *chiral* material defined by its constitutive law: $L^\alpha u^\alpha(t, x) = A^\alpha(t, x)u^\alpha(t, x) + \int_0^t B^\alpha(s, x)u^\alpha(s, x) ds + \int_0^t C^\alpha(t-s, x)u^\alpha(s, x) ds$ in which the 6×6 matrices A^α , B^α , C^α are assumed to be *periodic* with period α (as discussed in the beginning of Section 1.2) and not necessary diagonal. The field u^α is the unique solution to the variationnel problem (3).

To study the limit of the sequence $\{u^\alpha\}_\alpha$ we introduce the *periodic unfolding operator* \mathcal{T}_α and give its main property in Theorem 1.2.

Under appropriate assumptions stated in Theorem 1.3, we get the limit u of the sequence $\{u^\alpha\}_\alpha$ as the unique solution to the homogenized problem (5) where the new constitutive law is given by $\mathcal{L}u(t, x) = \mathcal{A}(t)u(t, x) +$

Adresses e-mail : bossavit@lgep.supelec.fr (A. Bossavit), georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso), b.miara@esiee.fr (B. Miara).

$\int_0^t \mathcal{B}(s)u(s, x) ds + \int_0^t \mathcal{C}(t, s)u(s, x) ds$. The expression of the *effective parameters* \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} is given in (10) and we note that the last integral term is not of a convolution form!

The proof of this result is based on the existence of two correctors \bar{u} and $\bar{\bar{u}}$ which appear in the limit problem (7). The *first corrector* \bar{u} , which is linear in u (instead of linear in ∇u as in diffusion problems) is the superposition of three elementary correctors, \bar{w}^A which depends upon the operator A , \bar{w}^0 which is related to the initial condition u^0 , and the kernel \bar{w} : $\bar{u}(t, x, y) = \bar{w}_k^A(t, y)u_k(t, x) + \bar{w}_k^0(t, y)u_k^0(x) + \int_0^t \bar{w}_k(t, s, y)u_k(s, x) ds$. The *second corrector* is given in [2].

In the last section we investigate the *stationary Maxwell equations* and get, through Theorem 2.1, the limit problem with the effective matrices and the extra source (11).

1. Lois de comportement et équations de Maxwell généralisées

L'homogénéisation des équations de Maxwell a déjà été traitée par la méthode de la compacité par compensation et par la méthode à double échelle [1–4]. Nous nous proposons de fournir ici un résultat d'homogénéisation général dans le cas où tous les coefficients qui interviennent dans la loi de comportement dépendent du temps. Les démonstrations détaillées se trouvent dans [2].

1.1. Problème d'évolution

On considère un domaine Ω de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne, un temps $T > 0$ et on note E le champ électrique, H le champ magnétique et $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$, $u = (E, H)$ le champ électromagnétique. Sous l'action d'une source extérieure $j : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^6$, $j = (j^E, j^H)$ le champ u est solution du problème d'évolution posé sur $(0, T) \times \Omega$ suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Lu(t, x) = Mu(t, x) + j(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u^0(x) & \text{dans } \Omega, \\ n(x) \wedge u_1(t, x) = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où M est l'opérateur de Maxwell

$$M : v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^6) \rightarrow Mv = \begin{pmatrix} \text{rot } v_2 \\ -\text{rot } v_1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas d'un milieu diélectrique linéaire et *isotrope* la loi de comportement associée à l'opérateur L qui relie l'induction électrique D et l'induction magnétique B à E et H est de la forme :

$$\begin{cases} D(t, x) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(t, x)E(t, x) + \int_0^t \sigma^E(s, x)E(s, x) ds + \int_0^t v^E(t-s)E(s, x) ds, \\ B(t, x) = \mu_0 \mu_r(t, x)H(t, x) + \int_0^t \sigma^H(s, x)H(s, x) ds + \int_0^t v^H(t-s)H(s, x) ds, \end{cases}$$

avec $\varepsilon_r, \mu_r, \dots$ qui sont des scalaires ou des matrices diagonales. Dans ce travail on étend l'étude au cas des matériaux *chiraux*, c'est-à-dire ceux dont la loi de comportement est symétrique en E et H , ce qui conduit à la représentation suivante de L :

$$Lu(t, x) = A(t, x)u(t, x) + \int_0^t B(s, x)u(s, x) ds + \int_0^t C(t-s, x)u(s, x) ds, \quad (2)$$

où les matrices A , B , C d'ordre 6 sont quelconques.

On introduit les trois espaces

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \text{rot } v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)\},$$

$H_0(\text{rot}, \Omega) = \{v \in H(\text{rot}, \Omega), n(x) \wedge v(x) = 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^3)\},$
 $V(\Omega) = H_0(\text{rot}, \Omega) \times H(\text{rot}, \Omega)$ et on établit un premier résultat général.

Proposition 1.1. Soit $A \in W^{2,1}(0, T, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36}))$ une matrice symétrique et uniformément coercive, $B \in W^{2,1}(0, T, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36}))$ et $C \in W^{2,1}(0, T, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36}))$. Alors le problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A(t, x)u(t, x) + \int_0^t B(s, x)u(s, x) ds + \int_0^t C(t-s, x)u(s, x) ds) \\ = Mu(t, x) + j(t, x) \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, x) = u^0(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ n(x) \wedge u_1(t, x) = 0 \quad \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^6)) \cap L^\infty(0, T, V(\Omega))$ associée à la condition initiale $u^0 \in V(\Omega)$ et à la source extérieure $j \in W^{1,1}(0, T, L^2(\Omega; \mathbb{R}^6))$. De plus cette solution vérifie les majorations :

$$\|u\|_{L^\infty(0,T,V(\Omega))} + \|du/dt\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq c(\|j\|_{W^{1,1}(0,T,L^2(\Omega))} + \|u^0\|_{V(\Omega)}).$$

1.2. Homogénéisation et opérateur d'éclatement périodique

On considère maintenant un matériau dont la structure périodique est caractérisée par un motif élémentaire de taille α . On note $Y =]0, 1[$ la cellule de référence. Pour tout $z \in \mathbb{R}^3$ on note $[z]$ l'unique combinaison entière telle que $z - [z] \in Y$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a la décomposition unique $x = \alpha([\frac{x}{\alpha}] + \{\frac{x}{\alpha}\})$. On suppose que les paramètres de la loi de comportement sont oscillants et de la forme $A^\alpha(x) = A(\{\frac{x}{\alpha}\})$, $B^\alpha(x) = B(\{\frac{x}{\alpha}\})$, $C^\alpha(x) = C(\{\frac{x}{\alpha}\})$. On étudie la limite de la suite des champs électromagnétiques $\{u^\alpha\}_\alpha$ solutions des problèmes variationnels :

$$\int_\Omega L^\alpha u^\alpha \cdot v = \int_\Omega A^\alpha(0)u^{\alpha,0} \cdot v + \int_0^t \int_\Omega \text{rot} u_2^\alpha \cdot v_1 - \text{rot} u_1^\alpha \cdot v_2 + j^\alpha \cdot v \quad \forall t \in (0, T), \forall v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^6). \quad (3)$$

L'opérateur d'éclatement périodique $\mathcal{T}_\alpha : v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R})$ (introduit dans [3]) est défini par :

$$\mathcal{T}_\alpha(v)(x, y) = v(\alpha[x/\alpha] + \alpha y), \quad x \in \Omega, y \in Y,$$

avec v prolongé par 0 en dehors de Ω . La propriété de \mathcal{T}_α dont nous avons besoin pour établir la convergence de u^α est énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 1.2. Soit $\{v^\alpha\}_\alpha$ une suite uniformément bornée dans $H(\text{rot}, \Omega)$. Après extraction éventuelle de sous-suites, il existe trois champs : $v \in H(\text{rot}, \Omega)$, $\bar{v} \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(Y; \mathbb{R}))$, $\bar{\bar{v}} \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(Y; \mathbb{R}^3))$, $\text{div}_y(\bar{\bar{v}}) = 0$, tels que :

$$\begin{aligned} v^\alpha &\rightharpoonup v \quad \text{dans } H(\text{rot}, \Omega) \text{ faible}, & \mathcal{T}_\alpha(v^\alpha) &\rightharpoonup v + \nabla_y \bar{v} \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^3) \text{ faible}, \\ \mathcal{T}_\alpha(\text{rot} v^\alpha) &\rightharpoonup \text{rot}_x v + \text{rot}_y \bar{\bar{v}} \quad \text{dans } L^2(\Omega \times Y; \mathbb{R}^3) \text{ faible}. \end{aligned}$$

On rappelle que toutes les fonctions à valeurs dans $L^2(Y)$ sont de moyenne nulle.

Idée de la démonstration. On utilise la décomposition $H(\text{rot}, \Omega) = \nabla H_0^1(\Omega) \oplus H(\text{rot}, \text{div} 0, \Omega)$, avec $H(\text{rot}, \text{div} 0, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \text{rot} v \in L^2(\Omega), \text{div} v = 0 \text{ dans } L^2(\Omega)\}$.

Hypothèses. Pour pouvoir étudier le comportement asymptotique de la solution on fait les hypothèses suivantes sur les données :

$$\begin{cases} u^{\alpha,0} \rightarrow u^0 \quad \text{dans } V(\Omega) \text{ fort}, \\ j^\alpha \rightarrow j \quad \text{dans } W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^6)) \text{ fort}. \end{cases} \quad (4)$$

On est alors en mesure de formuler le problème homogénéisé.

Théorème 1.3. Soit $A^\alpha \in W^{2,1+\beta}(0, T, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36}))$ une matrice symétrique et uniformément coercive, $B^\alpha \in W^{2,1+\beta}(0, T, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36}))$ et $C^\alpha \in W^{2,1+\beta}(0, T, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36}))$ avec $\beta > 0$, $u^{\alpha,0} \in V(\Omega)$ et $j^\alpha \in W^{1,1}(0, T, L^2(\Omega))$ vérifiant (4), la suite $\{u^\alpha\}_\alpha$ converge vers un unique champ électromagnétique limite

$$u = (E, H) \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Omega, \mathbb{R}^6)) \cap L^\infty(0, T, V(\Omega))$$

solution du problème global homogénéisé

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{L}u = Mu + j - \frac{d}{dt} \mathcal{L}^0 u^0 & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = u^0 & \text{dans } \Omega, \\ n \wedge u_1 = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

La source extérieure supplémentaire $\frac{d}{dt} \mathcal{L}^0 u^0$ ne dépend que de la condition initiale u^0 , son expression est donnée ci-dessous en (9).

La loi de comportement homogénéisée \mathcal{L} qui relie le déplacement électrique limite D et l'induction magnétique limite B aux champs E et H : $(D, B) = \mathcal{L}(E, H)$ est de la forme :

$$\mathcal{L}u(t, x) = \mathcal{A}(t)u(t, x) + \int_0^t \mathcal{B}(s)u(s, x) ds + \int_0^t \mathcal{C}(t, s)u(s, x) ds, \quad (6)$$

où \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} sont trois matrices indépendantes de x , leurs expressions étant données ci-dessous en (10).

Idée de la démonstration. Elle se fait en plusieurs étapes que nous présentons succinctement.

(i) On montre que la solution u^α de (3) est uniformément bornée et, en s'appuyant sur le Théorème 1.2, on établit qu'il existe trois champs limites :

$$\begin{cases} u \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^6)) \cap L^\infty(0, T; V(\Omega)), \\ \bar{u} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(Y; \mathbb{R}^2))), \\ \bar{\bar{u}} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(Y; \mathbb{R}^6))), \quad \text{div}_y(\bar{u}_1) = 0, \quad \text{div}_y(\bar{\bar{u}}_2) = 0 \end{cases}$$

qui sont solutions du problème :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times Y} L(u + \nabla_y \bar{u})(t) \cdot v &= \int_0^t \int_{\Omega \times Y} ((\text{rot}_x u_2(s) + \text{rot}_y \bar{\bar{u}}_2(s)) \cdot v_1 - (\text{rot}_x u_1(s) + \text{rot}_y \bar{\bar{u}}_1(s)) \cdot v_2) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega \times Y} j(s) \cdot v ds + \int_{\Omega \times Y} A(0)u^0 \cdot v \quad \forall v \in L^2(\Omega \times Y). \end{aligned} \quad (7)$$

(ii) Pour construire la solution homogénéisée u et les correcteurs \bar{u} et $\bar{\bar{u}}$ on choisit des fonctions de test qui utilisent la décomposition orthogonale $L^2(Y) = \nabla H_{\text{per}}^1(Y) \oplus H_{\text{per}}(\text{div} 0, Y)$ où $H(\text{div} 0, Y) = \{v \in L^2(Y), \text{div} v = 0 \text{ dans } L^2(Y)\}$. On considère la décomposition $u(t, x) = u_k(t, x)e_k$ où e_k est la base canonique de \mathbb{R}^6 et on montre que le premier correcteur \bar{u} peut être mis sous la forme :

$$\bar{u}(t, x, y) = \bar{w}_k^A(t, y)u_k(t, x) + \bar{w}_k^0(t, y)u_k^0(x) + \int_0^t \bar{w}_k(t, s, y)u_k(s, x) ds \quad \text{avec } \bar{u}(0, x, y) = 0. \quad (8)$$

Les trois familles de correcteurs élémentaires $(\bar{w}^A, \bar{w}^0, \bar{w})$ (à valeurs dans \mathbb{R}^6) sont solutions de différents problèmes de diffusion locaux posés sur Y :

- Le correcteur $\bar{w}_k^A \in W^{2,1+\beta}(0, T, H_{\text{per}}^1(Y))$, qui ne dépend que de l'opérateur A , résout : $\int_Y A(t, y) \nabla_y \bar{w}_k^A(t, y) \cdot \nabla_y \bar{v}(y) dy = - \int_Y A(t, y) e_k \cdot \nabla_y \bar{v}(y) dy \quad \forall \bar{v} \in H_{\text{per}}^1(Y)$.

- Le correcteur $\bar{w}_k^0 \in W^{2,1+\beta}(0, T, H_{\text{per}}^1(Y))$, qui est associé à la condition initiale $u(0, \cdot)$, résout : $\int_Y L \nabla_y \bar{w}_k^0(t, y) \cdot \nabla_y \bar{v}(y) dy = \int_Y A(0, y) e_k \cdot \nabla_y \bar{v}(y) dy \forall \bar{v} \in H_{\text{per}}^1(Y)$.
- Et le noyau $\bar{w}_k \in W^{2,1+\beta}(\mathcal{D}, H_{\text{per}}^1(Y))$ avec $\mathcal{D} = \{(t, s) \in [0, T]^2 : s \leq t\}$ résout : $\int_Y (A(t, y) \nabla_y \bar{w}_k(t, s, y) + \int_s^t (B(s_1, y) + C(t - s_1, y)) \nabla_y \bar{w}_k(s_1, s, y) ds_1) \cdot \nabla_y \bar{v}(y) dy = - \int_Y (B(s, y) + C(t - s, y)) (e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A(s, y)) \cdot \nabla_y \bar{v}(y) dy \forall \bar{v} \in H_{\text{per}}^1(Y), \forall (t, s) \in \mathcal{D}$.

On en déduit alors $\int_Y L(u + \nabla_y \bar{u}) dy = \mathcal{L}u + \mathcal{L}^0 u^0$ où l'opérateur homogénéisé \mathcal{L}^0 est associé à la condition initiale u^0 par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0 u^0(t, x) &= u_k^0(x) \int_Y L \nabla_y \bar{w}_k^0(t, y) \\ &= u_k^0(x) \int_Y \left(A(t, y) \nabla_y \bar{w}_k^0(t, y) + \int_0^t (B(s, y) + C(t - s, y)) \nabla_y \bar{w}_k^0(s, y) ds \right), \end{aligned} \tag{9}$$

et où l'opérateur homogénéisé \mathcal{L} est donné par (6). Les nouvelles matrices homogénéisées \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} sont définies par leurs colonnes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(t) &= \int_Y A(t, y) (e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A(t, y)) dy, & \mathcal{B}_k(t) &= \int_Y B(t, y) (e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A(t, y)) dy, \\ \mathcal{C}_k(t, s) &= \int_Y \left(A(t, y) \nabla_y \bar{w}_k(t, s, y) + \int_s^t (B(\tau, y) + C(t - \tau, y)) \nabla_y \bar{w}_k(\tau, s, y) d\tau \right) dy \\ &+ \int_Y C(t - s, y) (e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A(s, y)) dy. \end{aligned} \tag{10}$$

On remarque que dans (6) le dernier terme est plus général qu'un produit de convolution !

La convergence de l'opérateur « rotationnel » fait apparaître un deuxième correcteur \bar{u} , son expression en fonction u est donnée dans [2]. La convergence forte des suites $\{u^\alpha\}_\alpha$ et $\{\text{rot } u^\alpha\}_\alpha$ est établie dans [2].

2. Approche fréquentielle

Pour étudier le problème stationnaire on suppose que A^α et B^α sont indépendants du temps et on note $\hat{v}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} v(t) dt$ la transformée de Laplace de v .

Soit $A^\alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36})$ une matrice symétrique et uniformément coercive, $B^\alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36})$ et $C^\alpha \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{36}))$, il existe alors $p_0 > 0$ tel que $\hat{u}^\alpha = (\hat{E}^\alpha, \hat{H}^\alpha) \in L^\infty((p_0, \infty), V(\Omega))$ est l'unique solution de l'équation d'équilibre :

$$\begin{cases} (pA^\alpha(x) + B^\alpha(x) + p\hat{C}^\alpha(p, x))\hat{u}^\alpha = M\hat{u}^\alpha(p, x) + \hat{j}^\alpha(p, x) + A^\alpha(x)u^{\alpha,0}(x) & \text{dans } \Omega, \forall p \geq p_0, \\ n \wedge \hat{u}_1^\alpha = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La loi de comportement fréquentielle associée à (2) s'écrit : $(\hat{D}^\alpha(p, x), \hat{B}^\alpha(p, x)) = (A^\alpha(x) + \frac{1}{p}B^\alpha(x) + \hat{C}^\alpha(p, x))\hat{u}^\alpha(p, x)$. En reprenant les notations de la section précédente : $A^\alpha(x) = A(\{\frac{x}{\alpha}\})$, $B^\alpha(x) = B(\{\frac{x}{\alpha}\})$, $\hat{C}^\alpha(p, x) = \hat{C}(p, \{\frac{x}{\alpha}\})$ on obtient, par une démarche analogue, le résultat de convergence qui suit.

Théorème 2.1. La suite $\{\hat{u}^\alpha\}_\alpha$ converge vers un champ limite $\hat{u} \in L^\infty((p_0, \infty), V(\Omega))$ donné par

$$\begin{cases} (p\mathcal{A} + \mathcal{B} + p\hat{\mathcal{C}}(p))\hat{u}(p, x) = M\hat{u}(p, x) + \hat{j}(p, x) - \hat{\mathcal{L}}^0 u^0(p, x) & \text{dans } \Omega, \forall p \geq p_0, \\ n \wedge \hat{u}_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les matrices homogénéisées et la source supplémentaire sont données ci-dessous en (11).

Idée de la démonstration. En procédant comme dans le cas d'évolution on obtient le problème limite éclaté :

$$\int_{\Omega \times Y} (pA + B + p\widehat{C}(p))(\hat{u}(p) + \nabla_y \bar{u}(p)) \cdot v = \int_{\Omega \times Y} (\text{rot}_x \hat{u}_2(p) + \text{rot}_y \bar{u}_2(p)) \cdot v_1 \\ - (\text{rot}_x \hat{u}_1(p) + \text{rot}_y \bar{u}_1(p)) \cdot v_2 + \int_{\Omega \times Y} (\hat{j}(p) + Au^0) \cdot v \quad \forall v \in L^2(\Omega \times Y), \quad \forall p \geq p_0.$$

Comme précédemment le premier correcteur, qui permet de calculer la solution finale \hat{u} , est donné par $\bar{u}(p, x, y) = \bar{w}_k^A(y)\hat{u}_k(p, x) + \bar{w}_k(p, y)\hat{u}_k(p, x) + \bar{w}_k^0(p, y)u_k^0(x)$ avec

- $\bar{w}_k^A \in H_{\text{per}}^1(Y)$ unique solution de $\int_Y A \nabla_y \bar{w}_k^A \cdot \nabla_y \bar{v} = - \int_Y A e_k \cdot \nabla_y \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in H_{\text{per}}^1(Y)$,
- $\bar{w}_k \in L^\infty((p_0, \infty), H_{\text{per}}^1(Y))$ unique solution de $\int_Y (pA + B + p\widehat{C}) \nabla_y \bar{w}_k \cdot \nabla_y \bar{v} = - \int_Y (B + p\widehat{C})(e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A) \cdot \nabla_y \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in H_{\text{per}}^1(Y)$,
- $\bar{w}_k^0 \in L^\infty((p_0, \infty), H_{\text{per}}^1(Y))$ unique solution de $\int_Y (pA + B + p\widehat{C}) \nabla_y \bar{w}_k^0 \cdot \nabla_y \bar{v} = \int_Y A e_k \cdot \nabla_y \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in H_{\text{per}}^1(Y)$.

On obtient alors les expressions suivantes des matrices effectives et du terme de source :

$$\mathcal{A}_k = \int_Y A_k(y)(e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A(y)), \quad \mathcal{B}_k = \int_Y B(y)(e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A(y)), \\ \widehat{\mathcal{C}}_k(p) = \int_Y \widehat{C}(p, y)(e_k + \nabla_y \bar{w}_k^A(y)) + \left(A(y) + \frac{1}{p} B(y) + p\widehat{C}(p, y) \right) \nabla_y \bar{w}_k(p, y), \quad (11) \\ \widehat{\mathcal{L}}^0 u^0(p, x) = \int_Y (pA(y) + B(y) + p\widehat{C}(p, y)) \nabla_y \bar{w}_k^0(p, y) u_k^0(x) - \int_Y A(y) u^0(x).$$

Le deuxième correcteur est donné dans [2].

3. Conclusion

Lors de l'approche temporelle, on a établi les résultats d'homogénéisation dans le cas le plus général où A , B , C sont des matrices qui dépendent du temps et on a obtenu la loi de comportement (6) où les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} dépendent du temps et où \mathcal{C} est un noyau. Cependant si A et B sont indépendantes de t on montre alors dans [2] que la nouvelle loi de comportement homogénéisée est de la même forme que la loi initiale (2) : $\mathcal{L}u(t, x) = \mathcal{A}u(t, x) + \mathcal{B} \int_0^t u(s, x) ds + \int_0^t \mathcal{C}(t-s)u(s, x) ds$. Si de plus les phénomènes sont sans mémoire, i.e. si $C = 0$, on retrouve les résultats classiques.

Remerciements

Ce travail a été rendu possible grâce au projets européens HMS 2000 : « Homogenization and Multiple Scales » HPRN-CT-2000-00109 et « Smart Systems » HPRN-CT-2002-00284.

Références

- [1] G. Barbatis, I.G. Stratis, Homogenization of Maxwell's equations in dissipative bianisotropic media (2003), à paraître.
- [2] A. Bossavit, G. Griso, B. Miara, Modelling of periodic electromagnetic structures, Bianisotropic materials with memory, à paraître.
- [3] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (1) (2002) 99–104.
- [4] N. Wellander, Homogenization of the Maxwell equations: Case I. Linear theory, Appl. Math. 1 (2001) 29–51.