Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 255–259

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Mathematical Physics

Generalized infinite-dimensional Fresnel integrals

Sergio Albeverio [a,b], Sonia Mazzucchi [b]

[a] *Institut für Angewandte Mathematik, Wegelerstr. 6, 53115 Bonn, Germany*
[b] *Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo, Italy*

Received 28 October 2003; accepted 7 November 2003

Presented by Paul Malliavin

Abstract

A generalized infinite dimensional oscillatory integral with a polynomially growing phase function is defined and explicitly computed in terms of an absolutely convergent Gaussian integral. The results are applied to the Feynman path integral representation for the solution of the Schrödinger equation with an anharmonic oscillator potential. ***To cite this article: S. Albeverio, S. Mazzucchi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Résumé

Intégrales de Fresnel en dimension infinie. Un concept d'intégrale oscillatoire généralisée en dimension infinie, avec une fonction de phase de croissance, polynomiale à l'infini, est introduit. L'intégrale est calculée explicitement en termes d'intégrales gaussiennes absolument convergentes. Les résultats sont appliqués à une representation de type « intégrale sur les chemins de Feynman » de la solution de l'équation de Schrödinger à potentiel anharmonique. ***Pour citer cet article : S. Albeverio, S. Mazzucchi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Version française abrégée

Dans [3,6,1,2,8] (voir aussi [7] pour une revue récente sur les intégrales des chemins de Feynman) une réalisation mathématique rigoureuse de la représentation (2) par des intégrales heuristiques sur les chemins de Feynman de l'équation de Schrödinger, Eq. (1) (pour une particule quantique non relativiste en mouvement dans $\mathbb{R}^d$ sous l'influence d'un potentiel V) a été donnée en termes d'intégrales oscillatoires en dimension infinie, avec une fonction de phase quadratique (intégrale de Fresnel) sur un espace des chemins bien choisi. L'outil fondamental est une égalité de type Parseval (3), qui peut-être appliquée si le potentiel V est la somme d'une partie « oscillateur harmonique » et d'une perturbation bornée qui peut-être écrite comme transformée de Fourier ou de Laplace d'une mesure complexe à variation bornée sur $\mathbb{R}^d$. Nous présentons ici une extension de ces résultats en démontrant une generalisation de l'égalité de Parseval pour ces intégrales oscillatoires en dimension infinie avec fonction de phase

E-mail addresses: albeverio@uni-bonn.de (S. Albeverio), mazzucch@science.unitn.it (S. Mazzucchi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2003.11.022

polynomiale. En utilisant ce résultat, nous donnons une définition mathématique rigoureuse de la représentation « intégrale des chemins de Feynman » pour la solution de l'equation de Schrödinger avec un potentiel qui est la somme d'une « partie oscillateur harmonique » et d'une « perturbation quartique ».

Soit $\mathcal{H}$ un espace réel séparable de dimension infinie avec produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et norme $|\cdot|$. Soit $(i,\mathcal{H},\mathcal{B})$ un espace abstrait de Wiener construit sur be $\mathcal{H}$ ($(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ est un espace de Banach opportun). On obtient le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Soit $B:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ auto-adjoint de classe trace, $(I-B)$ strictement positif, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\leqslant 0$. Soit $A:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ un tenseur complètement symétrique positif et covariant sur $\mathcal{H}$ tel que l'application $V:\mathcal{H}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto V(x)\equiv A(x,x,x,x)$ soit continue pour la norme $\|\cdot\|$. Soit $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ la transformée de Fourier d'une mesure complexe à variation bornée μ_f sur $\mathcal{H}$ qui satisfait à la condition* (4) (*ce qui restreint la croissance de μ_f à l'infini*). *Alors l'intégrale oscillatoire* (5) (*avec $\hbar>0$*) *est rigoureusement définie et donnée par l'intégrale par rapport à la mesure complexe* (*σ-additive*) *μ_f sur $\mathcal{H}$ d'une espérance par rapport à une mesure gaussienne μ sur $\mathcal{B}$* (6) *où $n(k)(\cdot)$ resp. $\langle\cdot,B\cdot\rangle$ resp. $\widetilde{V}$ sont les extensions de l'application linéaire $\langle\cdot,k\rangle$ resp. de la forme quadratique $\langle\cdot,B\cdot\rangle$ resp. de la function V de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{B}$. On a aussi la relation* (7).

Considérons alors l'équation de Schrödinger (1) sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec un potentiel oscillatoire anharmonique $V(x)=\frac{1}{2}x\Omega^2x+\lambda C(x,x,x,x)$, où C est un tenseur complètement positif symétrique covariant d'ordre quatre, Ω est une matrice $d\times d$ positive symétrique, $\lambda\geqslant 0$ est une constante. Nous considérous deux vecteurs $\phi,\psi_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$. Au moyen du Théorème 0.1 il est possible de donner une interprétation mathématique rigoureuse de la répresentation heuristique (8) par des intégrales sur les chemins de Feynman et la solution de l'Éq. (1) comme le prolongement analytique par rapport au paramètre λ d'une intégrale oscillatoire de dimension infinie sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}=\mathbb{R}^d\times H_t$, où H_t est l'espace de Hilbert des chemins absolument continus $\gamma:[0,t]\to\mathbb{R}^d$, avec $\gamma(0)=0$ et produit scalaire $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle=\int_0^t\dot\gamma_1(s)\dot\gamma_2(s)\,\mathrm{d}s$. La mesure cylindrique gaussienne sur H_t centrée, avec opérateur covariance l'identité, s'étend à une mesure σ-additive de probabilité sur l'espace de Wiener $C_t=\{\omega\in C([0,t];\mathbb{R}^d)\mid\gamma(0)=0\}$, la mesure de Wiener W. Étant donné l'espace de Banach $\mathcal{B}=\mathbb{R}^d\times C_t$ muni de la mesure produit $N\otimes W$, où N est la mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}^d$ avec covariance égale à la matrice $d\times d$ identité, $(i,\mathcal{H},\mathcal{B})$ est un espace de Wiener abstrait. Si on suppose $\phi,\psi_0\in L^2(\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$, $\hat\mu_0=\psi_0$, $\hat\mu_\phi(x)=(2\pi\mathrm{i}\hbar)^{d/2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}|x|^2}\bar\phi(x)$, où μ_0 et μ_ϕ satisfont à des restrictions de croissance à l'infini, et t suffisemment petit (voir [5] pour plus de détails), on obtient le théoreme suivant :

Théorème 0.2. *Supposons $\lambda\leqslant 0$. Alors l'intégrale oscillatoire en dimension infinie* (9) *est bien definie et donnée par des intégrations par rapport à des produits de mesures de probabilité et de mesures σ-additives* (10) *ainsi que* (11) (*dans le même esprit que dans le Théorème* 0.1). *Le prolongement analytique de ces représentations pour $\lambda\geqslant 0$ donne la solution* (*au sens faible*) *de la solution $\psi(t)$ de l'équation de Schrödinger* (1) (*dans le sens que le prolongement analytique de* (10) *resp.* (11) *est égal à $\langle\phi,\psi(t)\rangle$*) *pour $\lambda\geqslant 0$.*

1. Introduction

In 1942 Feynman proposed a heuristic representation for the solution of the Schrödinger equation for a non-relativistic quantum mechanical particle moving in a potential V:

$$\begin{cases}\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi=-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi,\\ \psi(0,x)=\psi_0(x),\end{cases}\tag{1}$$

($\hbar$ being the reduced Planck's constant, $m > 0$ the mass of the particle). According to Feynman, the state of the system, the so-called "wave function", at time t evaluated at the point $x \in \mathbb{R}^d$ is given as a "sum over all possible histories", that is an integral over the paths $\gamma(s)_{s\in[0,t]}$ with fixed end point:

$$\psi(t,x) = \quad \text{“}const \cdot \int_{\{\gamma|\gamma(t)=x\}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_t(\gamma)}\psi_0\big(\gamma(0)\big)D\gamma\text{”}, \tag{2}$$

where $S_t(\gamma) = S_t^0(\gamma) - \int_0^t V(\gamma(s))\,\mathrm{d}s$, $S_t^0(\gamma) = m\int_0^t \frac{\dot{\gamma}^2(s)}{2}\,\mathrm{d}s$, is the classical action functional of the system, evaluated along the path γ. Formula (2), as it stands, has not a well defined mathematical meaning (e.g., in 1960 Cameron proved that Feynman's heuristic complex measure $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_t(\gamma)}D\gamma$ cannot be σ-additive and of bounded variation). As a consequence, mathematicians tried to realize the involved heuristic "Feynman's measure" as a linear continuous functional on a suitable Banach algebra of functions. A possible approach is by means of an infinite dimensional oscillatory integrals on a suitable Hilbert space of paths (see [3,1,6]). An oscillatory integral with quadratic phase function $\widetilde{\int}_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\langle x,Qx\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$ (where $Q: D(Q) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ is a linear self-adjoint invertible operator), a so-called *Fresnel integral*, on a real separable Hilbert space $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ can indeed be defined by a sequential approach. Following Hörmander, if $\mathcal{H}$ is finite dimensional, the oscillatory integral is defined as the limit of a sequence of regularized absolutely convergent Lebesgue integrals. If $\mathcal{H}$ is infinite dimensional, according to [6], an infinite dimensional oscillatory integral (IDOI) is defined as the limit of a sequence of finite dimensional oscillatory integrals. The description of the largest class of function f for which the integral is well defined is an open problem (even in finite dimension!), but one can find some interesting subsets of it, e.g., $\mathcal{F}(\mathcal{H})$: the Banach algebra of complex functions which are Fourier transforms of complex bounded variation measures on $\mathcal{H}$. Indeed, even if $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, one can prove that if $f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, i.e., if f is the Fourier transform of an arbitrary complex bounded variation measure μ_f on $\mathcal{H}$ and if $Q - I$ is any trace class operator, then the oscillatory integral is well defined and it can be explicitly computed in terms of an absolutely convergent integral with respect to a σ-additive measure, namely μ_f itself, on $\mathcal{H}$ by means of a Parseval-type equality [3,6,1]:

$$\widetilde{\int} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\langle x,Qx\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x = (\det Q)^{-1/2}\int_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\langle x,Q^{-}x\rangle}\mu_f(\mathrm{d}x), \tag{3}$$

($\det Q$ being the Fredholm determinant of the operator Q). In this setting it has been proved [3,6,1] that the solution of the Schrödinger equation can be represented by an infinite dimensional oscillatory integral on a suitable Hilbert space of paths. Unfortunately, the only unbounded potentials which can be handled by this "direct method" are the sum of an harmonic oscillator part and a bounded perturbation which belongs to $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$ (i.e., the space of Fourier transforms of a complex bounded variation measures on $\mathbb{R}^d$). This class does not include some physically interesting potentials, such as those growing polynomially at infinity.[1] In order to solve this problem it is necessary to enlarge the class of phase functions for which the corresponding infinite dimensional oscillatory integral can be defined and explicitly computed. In the following we extend the results in [3,6,1] to a class of phase functions which are the sum of a quadratic plus a quartic term (see [5] for more details).

2. Results

Let $\mathcal{H}$ be a real separable infinite dimensional Hilbert space, with inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ and norm $|\cdot|$. Let ν be the finitely additive cylinder measure on $\mathcal{H}$, defined by its characteristic functional $\hat{\nu}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar}{2}|x|^2}$. Let $\|\cdot\|$ be a "measurable" norm on $\mathcal{H}$, that is $\|\cdot\|$ is such that for every $\varepsilon > 0$ there exist a finite-dimensional projection

[1] A similar situation holds for the extension in [2,8] where $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ is replaced by the space of Laplace transforms of measures.

$P_\varepsilon : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, such that for all $P \perp P_\varepsilon$ one has $\nu(\{x \in \mathcal{H} \mid \|P(x)\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$, where P and P_ε are called orthogonal ($P \perp P_\varepsilon$) if their ranges are orthogonal in $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Denoted by $\mathcal{B}$ the completion of $\mathcal{H}$ in the $\|\cdot\|$-norm and by i the continuous inclusion of $\mathcal{H}$ in $\mathcal{B}$, one can prove that $\mu \equiv \nu \circ i^{-1}$ is a countably additive Gaussian measure on the Borel subsets of $\mathcal{B}$. The triple $(i, \mathcal{H}, \mathcal{B})$ is called an *abstract Wiener space*.

Let $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ be a completely symmetric positive covariant tensor operator on $\mathcal{H}$ such that the map $V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto V(x) \equiv A(x,x,x,x)$ is continuous in the $\|\cdot\|$ norm. As a consequence, V is continuous in the $|\cdot|$-norm, moreover it can be extended by continuity to a random variable $\overline{V}$ on $\mathcal{B}$, with $\overline{V}|_{\mathcal{H}} = V$. Hence, given a self-adjoint trace class operator $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, the quadratic form on $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{H} \mapsto \langle x, Bx\rangle$, can be extended to a random variable on $\mathcal{B}$, denoted again by $\langle\cdot, B\cdot\rangle$. In this setting one can prove the following generalization of Parseval-type equality (3):

Theorem 2.1. *Let B be self-adjoint trace class, $I - B$ strictly positive, $\lambda \leqslant 0$ and $f \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $f \equiv \hat{\mu}_f$, and let us suppose that the bounded variation measure μ_f satisfies the following assumption*:

$$\int_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{\frac{\hbar}{4}\langle k,(I-B)^{-1}k\rangle} |\mu_f|(\mathrm{d}k) < +\infty. \tag{4}$$

Then the infinite dimensional oscillatory integral

$$\widetilde{\int}_{\mathcal{H}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\langle x,(I-B)x\rangle} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\hbar}A(x,x,x,x)} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

exists and is given by:

$$\int_{\mathcal{H}} \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(k)(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2\hbar}\langle\omega,B\omega\rangle} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{\hbar}\bar{V}(\omega)}\big]\mu_f(\mathrm{d}k). \tag{6}$$

It is also equal to:

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\frac{1}{2\hbar}\langle\omega,B\omega\rangle} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{\hbar}\bar{V}(\omega)} f\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\omega\big)\big]; \tag{7}$$

here $\mathbb{E}$ denotes the expectation value with respect to the standard Gaussian measure μ on $\mathcal{B}$ (with mean zero and covariance given by the scalar product in $\mathcal{H}$).

An analogous result can be proven for a more general class of polynomial phase functions, in the case the Hilbert space $\mathcal{H}$ is finite-dimensional (see ref. [4]).

Let us consider the Schrödinger equation (1) on $L^2(\mathbb{R}^d)$ for an anharmonic oscillator potential $V = \frac{1}{2}x\Omega^2 x + \lambda C(x,x,x,x)$, where C is a completely symmetric positive, fourth order, covariant tensor on $\mathbb{R}^d$, Ω is a positive symmetric $d \times d$ matrix, $\lambda \geqslant 0$ a constant. Let us consider two vectors $\phi, \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. By means of Theorem 2.1 it is possible to give mathematical meaning to the "Feynman path integral" representation of the solution of Eq. (1):

$$\big(\phi, \psi(t)\big) = \text{“}\int_{\mathbb{R}^d} \bar{\phi}(x) \int_{\{\gamma \mid \gamma(t)=x\}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_t(\gamma)} \psi_0\big(\gamma(0)\big) D\gamma\,\mathrm{d}x\text{”} \tag{8}$$

as the analytic continuation (in the parameter λ) of an infinite dimensional generalized oscillatory integral on the Hilbert space $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d \times H_t$, where H_t is the Hilbert space of absolutely continuous paths $\gamma : [0,t] \to \mathbb{R}^d$, with $\gamma(0) = 0$ and inner product $\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle = \int_0^t \dot{\gamma}_1(s)\dot{\gamma}_2(s)\,\mathrm{d}s$. The cylindrical Gaussian measure on H_t with covariance operator the identity extends to a σ-additive measure on the Wiener space $C_t = \{\omega \in C([0,t];\mathbb{R}^d) \mid \gamma(0) = 0\}$: the Wiener measure W. Given the Banach space $\mathcal{B} = \mathbb{R}^d \times C_t$ endowed with the product measure $N(\mathrm{d}x) \times W(\mathrm{d}\omega)$, where N is the Gaussian measure on $\mathbb{R}^d$ with covariance equal to the $d \times d$ identity matrix, $(i, \mathcal{H}, \mathcal{B})$ is an abstract Wiener space.

By assuming that $\phi,\psi_0\in L^2(\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{F}(\mathbb{R}^d)$, $\hat\mu_0=\psi_0$, $\hat\mu_\phi(x)=(2\pi\mathrm{i}\hbar)^{d/2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}|x|^2}\bar\phi(x)$, with μ_0 and μ_ϕ satisfying some restrictions on their growth at infinity, and if t is sufficiently small (see [5] for more details), it is possible to prove that the following holds:

Theorem 2.2. *Let us assume that $\lambda\leqslant 0$. Then the infinite dimensional oscillatory integral,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times H_t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{\hbar}\int_0^t C(\gamma(s)+x,\gamma(s)+x,\gamma(s)+x,\gamma(s)+x)\,\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\int_0^t\dot\gamma(s)^2\,\mathrm{d}s}\\ \times\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\int_0^t(\gamma(s)+x)\Omega^2(\gamma(s)+x)\,\mathrm{d}s}\bar\phi(x)\psi_0(\gamma(t)+x)\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

is well defined and is given by:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times H_t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d\times C_t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}(x\cdot y+\sqrt{\hbar}n(\gamma)(\omega))}\mathrm{e}^{\frac{1}{2\hbar}\int_0^t(\sqrt{\hbar}\omega(s)+x)\Omega^2(\sqrt{\hbar}\omega(s)+x)\,\mathrm{d}s}\\ \times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{\hbar}\int_0^t C(\sqrt{\hbar}\omega(s)+x,\sqrt{\hbar}\omega(s)+x,\sqrt{\hbar}\omega(s)+x,\sqrt{\hbar}\omega(s)+x)\,\mathrm{d}s}W(\mathrm{d}\omega)\frac{\mathrm{e}^{-|x|^2/(2\hbar)}}{(2\pi\hbar)^{d/2}}\,\mathrm{d}x\Bigg)\mu_f(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\gamma) \tag{10}$$

(*where* $(2\pi\mathrm{i}\hbar)^{d/2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}|x|^2}\bar\phi(x)\psi_0(x+\gamma(t)=\hat\mu_f(x,\gamma))$. *This is also equal to*:

$$(\mathrm{i})^{d/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d\times C_t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{\hbar}\int_0^t C(\sqrt{\hbar}\omega(s)+x,\sqrt{\hbar}\omega(s)+x,\sqrt{\hbar}\omega(s)+x,\sqrt{\hbar}\omega(s)+x)\,\mathrm{d}s}\\ \times\mathrm{e}^{\frac{1}{2\hbar}\int_0^t(\sqrt{\hbar}\omega(s)+x)\Omega^2(\sqrt{\hbar}\omega(s)+x)\,\mathrm{d}s}\bar\phi\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}x\big)\psi_0\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\sqrt{\hbar}\omega(t)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}x\big)W(\mathrm{d}\omega)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Moreover the following holds:

Theorem 2.3. *The Gaussian integrals* (10) *and* (11) *have an analytic continuation to $\lambda\geqslant 0$ which represents the inner product $\langle\phi,\psi(t)\rangle$, where $\psi(t)$ is the solution of the Schrödinger equation* (1).

References

[1] S. Albeverio, Z. Brzeźniak, Finite-dimensional approximation approach to oscillatory integrals and stationary phase in infinite dimensions, J. Funct. Anal. 113 (1) (1993) 177–244.

[2] S. Albeverio, Z. Brzeźniak, Z. Haba, On the Schrödinger equation with potentials which are Laplace transform of measures, Potential Anal. 9 (1) (1998) 65–82.

[3] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn, Oscillatory integrals and the method of stationary phase in infinitely many dimensions, with applications to the classical limit of quantum mechanics, Invent. Math. 40 (1) (1977) 59–106.

[4] S. Albeverio, S. Mazzucchi, Generalized Fresnel integrals, SFB 611, Preprint No. 59, Bonn, 2003.

[5] S. Albeverio, S. Mazzucchi, Feynman path integrals for polynomially growing potentials, Preprint of the University of Trento, 2003.

[6] D. Elworthy, A. Truman, Feynman maps, Cameron–Martin formulae and anharmonic oscillators, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 41 (2) (1984) 115–142.

[7] G.W. Johnson, M.L. Lapidus, The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus, Oxford University Press, New York, 2000.

[8] T. Kuna, L. Streit, W. Westerkamp, Feynman integrals for a class of exponentially growing potentials, J. Math. Phys. 39 (9) (1998) 4476–4491.