

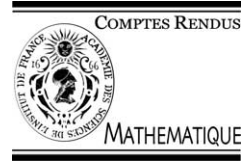


ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 407–412



Numerical Analysis

Domain decomposition for a finite volume method on non-matching grids

Laurent Saas^a, Isabelle Faille^a, Frédéric Nataf^b, Françoise Willien^a

^a IFP, 1 et 4, avenue Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison cedex, France

^b CMAP, CNRS UMR7641, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Received 25 November 2002; accepted 1 December 2003

Presented by Olivier Pironneau

Abstract

We are interested in a robust and accurate domain decomposition method with Robin interface conditions on non-matching grids using a finite volume discretization. We introduce transmission operators on the non-matching grids and define new interface conditions of Robin type. Under a compatibility assumption, we show the equivalence between Robin interface conditions and Dirichlet–Neumann interface conditions and the well-posedness of the global and local problems. Two error estimates are given in terms of the discrete H^1 -norm: one in $O(h^{1/2})$ with operators based on piecewise constant functions and the other in $O(h)$ (as in the conforming case) with operators using a linear rebuilding. Numerical results are given. **To cite this article:** *L. Saas et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

Résumé

Décomposition de domaine pour une méthode de volumes finis sur maillages non conformes. Nous présentons une méthode de décomposition de domaine sur maillages non-conformes pour une méthode volumes finis avec des conditions d'interface de Robin. Des opérateurs de transmission sont introduits pour obtenir les conditions de type Robin. Sous une hypothèse de compatibilité, nous énonçons l'équivalence des conditions d'interface de Robin avec des conditions de Dirichlet–Neumann et que les problèmes globaux et locaux sont bien posés. Nous donnons deux estimations d'erreur en norme H^1 discrète : l'une en $O(h^{1/2})$ pour des opérateurs basés sur les fonctions constantes par morceaux et l'autre en $O(h)$ (comme pour le cas conforme) pour des opérateurs comportant une reconstruction linéaire. Des résultats numériques sont donnés. **Pour citer cet article :** *L. Saas et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).*

© 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.

E-mail addresses: laurent.saas@ifp.fr (L. Saas), isabelle.faille@ifp.fr (I. Faille), nataf@cmapp.polytechnique.fr (F. Nataf), francoise.willien@ifp.fr (F. Willien).

1631-073X/\$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Published by Elsevier SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2003.12.014

Version française abrégée

Introduction

Notre but est la mise au point d'une méthode de décomposition de domaine sur maillages non conformes pour une méthode de volumes finis [6] avec des conditions d'interface de Robin optimisées [8] aussi précise que dans le cas conforme et possédant une base théorique. Nous considérons le problème simplifié (1), (2) sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) partitionné en deux sous domaines Ω_i ($i = 1, 2$) sans recouvrement avec des grilles non conformes à l'interface $\Gamma_{12} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$. A chaque sous domaine Ω_i ($i = 1, 2$) est associé un maillage admissible \mathcal{T}_i au sens des volumes finis [6] et les maillages \mathcal{E}_i des domaines Ω_i sur l'interface Γ_{12} sont non conformes : $\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$. La discrétisation volumes finis de (1), (2) dans Ω_i ($i = 1, 2$) est donnée par les Éqs. (3), (4). Aux Éqs. (3), (4) doivent être associées des conditions d'interface pour assurer la continuité de l'inconnue principale et de son flux sur les maillages non conformes \mathcal{E}_i de Γ_{12} . Dans la suite nous présentons les opérateurs de transmission pour prendre en compte la non conformité des maillages au niveau de l'interface, puis explicitons les conditions d'interface de Dirichlet–Neumann et de Robin. Ensuite nous affirmons que les problèmes globaux et locaux sont bien posés et nous donnons une estimation d'erreur en norme H^1 discrète. A la fin nous présentons des résultats numériques.

Opérateurs de transmission

Pour assurer la continuité faible de l'inconnue principale et de sa dérivée normale à travers Γ_{12} , on introduit les espaces $P^0(\mathcal{E}_i)$ ($i = 1, 2$) des fonctions constantes par morceaux sur \mathcal{E}_i et des opérateurs de transmission $Q_i : P^0(\mathcal{E}_j) \rightarrow P^0(\mathcal{E}_i)$ qui satisfont l'hypothèse (H1). Nous donnons deux exemples d'opérateurs de transmission qui vérifient cette hypothèse. Le premier exemple correspond à la restriction de P_i^C projection orthogonale $L^2(\Gamma_{12})$ sur $P^0(\mathcal{E}_i)$. Le second exemple comprend une reconstruction linéaire pour avoir une meilleure précision et correspond au couple d'opérateurs de transmission définis par (5) et (6) où \mathcal{E}_1^2 désigne le maillage obtenu par déraffinement par deux du maillage \mathcal{E}_1 , $P_d^1(\mathcal{E}_1^2)$ désigne l'espace des fonctions linéaires pas forcément continues par morceaux sur \mathcal{E}_1^2 , P_1^L est la projection orthogonale $L^2(\Gamma_{12})$ sur $P_d^1(\mathcal{E}_1^2)$, $I_1 : P^0(\mathcal{E}_i) \rightarrow P_d^1(\mathcal{E}_1^2)$ correspond à l'opérateur d'interpolation linéaire et $(I_1)^T$ à son transposé par rapport au produit scalaire $L^2(\Gamma_{12})$.

Conditions d'interface

Comme dans [3], nous définissons les conditions d'interface de Dirichlet–Neumann par (7), (8). Nous introduisons les opérateurs de conditions d'interface $\mathcal{S}_i : P^0(\mathcal{E}_j) \rightarrow P^0(\mathcal{E}_i)$ pour pouvoir considérer des conditions d'interface plus générales que des conditions de Robin et nous supposons qu'ils vérifient l'hypothèse (H2). Puis nous définissons les conditions d'interface de Robin généralisées par (9), (10).

Problèmes bien posés

Nous avons les

Théorème 0.1. *Sous les hypothèses (H1), (H2), les problèmes définis par les Éqs. (3), (4), (7), (8) ou par les Éqs. (3), (4), (9), (10) sont équivalents et bien posés.*

Théorème 0.2. *Sous les hypothèses (H1), (H2), le problème local défini dans Ω_1 par les Éqs. (3), (4), (9) et le problème local défini dans Ω_2 par les Éqs. (3), (4), (10) sont bien posés.*

Estimation d'erreur

En supposant que la solution de (1), (2) vérifie $p \in C^2(\overline{\Omega})$ et en effectuant l'hypothèse supplémentaire $(H3_\gamma)$ sur le maillage, on obtient pour l'estimation d'erreur en norme H^1 discrète [7] :

Théorème 0.3. *Sous les hypothèses (H1) and $(H3_\gamma)$, $\exists C(\Omega) > 0$ tel que les erreurs e_i en norme H^1 discrète dans Ω_i ($i = 1, 2$) correspondant au schéma (3), (4), (7), (8) vérifient :*

- si $Q_i = P_i^C$ (avec $\gamma = 1$) : $(\sum_{i=1,2} [\eta \|e_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + |e_i|_{1, \mathcal{T}_i}^2])^{1/2} \leq C(\Omega)h^{1/2}$ (et $O(h)$ si la grille du maître Ω_1 est une sous-grille de l'esclave Ω_2) ;
- si les Q_i sont définis par (5), (6) (avec $\gamma = 1/2$) : $(\sum_{i=1,2} [\eta \|e_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + |e_i|_{1, \mathcal{T}_i}^2])^{1/2} \leq C(\Omega)h$.

La même estimation d'erreur est obtenue pour le problème (3), (4), (9), et (10) du fait du Théorème 4.1.

Résultats numériques

Le problème est formulé comme une méthode de sous-structuration et est résolu par un algorithme GMRES. La Fig. 1 représente le comportement asymptotique de l'erreur en norme H^1 discrète et du nombre d'itération de GMRES en fonction du pas du maillage. Les différentes méthodes comparées sont : TPFA [5], Ceres (similaire à TPFA mais une interpolation linéaire est effectuée pour avoir la consistance du flux sur Γ_{12} , voir [4]), New Cement [1] et les deux méthodes proposées, avec différents opérateurs de conditions d'interface $S_i = \text{diag}(\alpha_i)$ ($\alpha_i = 1$, $\alpha_i = \alpha_{\text{opt}}^i$ [8] and $\alpha_i = 1/h_i$ avec h_i le pas du maillage de Ω_i). On constate que le nombre d'itérations de GMRES est toujours plus petit pour α_{opt}^i comme attendu.

1. Introduction

Our aim is to develop numerical methods with theoretical results which combine finite volume method [6] and domain decomposition algorithm on nonmatching grids with Robin optimized interface conditions [8] and which are as accurate as the finite volume scheme in conforming case ($O(h)$ in discrete H^1 -norm). In the framework of finite volume or mixed finite element methods, several discretization methods for non-matching grids have been developed [1,2,4,5], but those methods either do not use Robin conditions or do not have finite volume accuracy or do not have mathematical basis. We consider the following simplified model problem:

$$\eta p - \Delta p = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

$$p = g \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{2}$$

with $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) bounded polygonal domain, $\eta > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ and $g \in L^2(\partial\Omega)$. We assume that domain Ω is divided into two nonoverlapping subdomains Ω_i ($i = 1, 2$), with grids that do not match on the interface $\Gamma_{12} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$.

We consider a finite volume admissible mesh [6] \mathcal{T}_i associated with Ω_i ($i = 1, 2$), which is a set of closed polygonal subsets of Ω_i such that $\Omega_i = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_i} K$ and \mathcal{E}_{Ω_i} is the set of faces of \mathcal{T}_i . $\mathcal{N}_i(K) = \{K' \in \mathcal{T}_i: K \cap K' \in \mathcal{E}_{\Omega_i}\}$ is the set of the cells adjacent to K and $[K, K']$ denotes the face $K \cap K'$. Let ε be a face of \mathcal{E}_{Ω_i} located on the boundary of Ω_i . $K(\varepsilon)$ denotes the control cell $K \in \mathcal{T}_i$ such that $\varepsilon \in K$. \mathcal{E}_{iD} is the set of faces such that $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}_{iD}} \varepsilon$. \mathcal{E}_i is the set of faces such that $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}_i} \varepsilon$. $\mathcal{E}(K)$ denotes the set of the faces of $K \in \mathcal{T}_i$. $\mathcal{E}_{iD}(K) = \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_{iD}$ is the set of faces of $K \in \mathcal{T}_i$ which are on $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$. $\mathcal{E}_i(K) = \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_i$ is the set of faces of $K \in \mathcal{T}_i$ which are on $\partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$. We introduce p_K^i an approximation of $p(x_K)$ (where x_K is a point inside the control cell K), p_ε^i an approximation of $p(y_\varepsilon)$ (where y_ε is the center of $\varepsilon \in \mathcal{E}_i$) and u_ε^i an approximation

of the flux $\frac{\partial p}{\partial n}(y_\varepsilon)$ outward Ω_i through \mathcal{E}_i . We note g_ε^i an approximation of g on ε , F_K^i an approximation of $\int_K f$. $d(\cdot, \cdot)$ denotes the \mathbb{R}^d Euclidean distance and $m(\cdot)$ the Lebesgue measure. Then a finite volume scheme [6] of (1), (2) can be defined on Ω_i by the set of equations: $\forall K \in \mathcal{T}_i$

$$\eta p_K^i m(K) - \sum_{K' \in \mathcal{N}_i(K)} \frac{p_{K'}^i - p_K^i}{d(x_{K'}, x_K)} m(K, K') - \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_{i,D}(K)} \frac{g_\varepsilon^i - p_K^i}{d(y_\varepsilon, x_K)} m(\varepsilon) - \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}_i(K)} u_\varepsilon^i m(\varepsilon) = F_K^i \quad (3)$$

with

$$u_\varepsilon^i = \frac{p_\varepsilon^i - p_K^i}{d(y_\varepsilon, x_K)} \quad \text{on } \varepsilon \in \mathcal{E}_i k. \quad (4)$$

2. Transmission operator

In order to enforce a weak continuity on non-matching grids at the interface Γ_{12} of the principal unknown p and of its normal derivative u , we introduce $P^0(\mathcal{E}_i)$ the space of piecewise constant functions on \mathcal{E}_i and the transmission operators $Q_i : P^0(\mathcal{E}_j) \rightarrow P^0(\mathcal{E}_i)$ which satisfy the following compatibility condition:

$$(H1) \quad \forall u \in P^0(\mathcal{E}_1) \text{ et } \forall v \in P^0(\mathcal{E}_2), \langle Q_2(u), v \rangle_{L^2(\Gamma_{12})} = \langle u, Q_1(v) \rangle_{L^2(\Gamma_{12})}.$$

In the following we study two particular types of transmission operators satisfying hypothesis (H1).

2.1. Orthogonal L^2 projection on $P^0(\mathcal{E}_i)$

The first type of operator is the restriction on $P^0(\mathcal{E}_j)$ of P_i^C the L^2 orthogonal projection onto $P^0(\mathcal{E}_i)$ ($i \neq j$, with $i, j = 1, 2$).

2.2. Operator with linear rebuilding

The second type of operator, inspired by [2], uses a reconstruction process to have a more accurate transmission. We introduce the interface grid \mathcal{E}_1^2 which is \mathcal{E}_1 coarsened by two, $P_d^1(\mathcal{E}_1^2)$ the space of piecewise linear functions on \mathcal{E}_1^2 , the interpolation operator $I_1 : P^0(\mathcal{E}_1) \mapsto P_d^1(\mathcal{E}_1^2)$ and $(I_1)^T : P_d^1(\mathcal{E}_1^2) \mapsto P^0(\mathcal{E}_1)$ its transpose with respect to the $L^2(\Gamma_{12})$ inner product ($\forall u \in P^0(\mathcal{E}_1)$ and $\forall v \in P_d^1(\mathcal{E}_1^2)$), we have $\langle I_1(u), v \rangle_{L^2(\Gamma_{12})} = \langle u, (I_1)^T(v) \rangle_{L^2(\Gamma_{12})}$, P_1^L the $L^2(\Gamma_{12})$ orthogonal projection onto $P_d^1(\mathcal{E}_1^2)$ and P_2^C the $L^2(\Gamma_{12})$ orthogonal projection onto $P^0(\mathcal{E}_2)$. The transmission operators are:

$$Q_1 = (I_1)^T [P_1^L |_{P^0(\mathcal{E}_2)}] \quad (\text{for the normal derivative}), \quad (5)$$

$$Q_2 = [P_2^C |_{P_d^1(\mathcal{E}_1^2)}] I_1 \quad (\text{for the unknown}). \quad (6)$$

3. Interface conditions

As in [3], we define the Dirichlet–Neumann interface conditions by:

$$p_2 = Q_2(p_1) \quad \text{on } \mathcal{E}_2, \quad (7)$$

$$u_1 = Q_1(-u_2) \quad \text{on } \mathcal{E}_1. \quad (8)$$

To define more general interface conditions, we introduce interface conditions operators $S_i : P^0(\mathcal{E}_i) \rightarrow P^0(\mathcal{E}_i)$ which satisfy the following hypothesis:

(H2) S_i is definite positive: $\forall u \in P^0(\mathcal{E}_i), u \neq 0, \langle S_i(u), u \rangle_{L^2(\Gamma_{12})} > 0$.

For example S_i can be the discrete Steklov–Poincaré operator or the optimized Robin interface coefficients [8]. The general interface conditions are then defined by:

$$p_2 + Q_2(S_1^{-1}Q_1(u_2)) = Q_2(p_1 - S_1^{-1}(u_1)) \quad \text{on } \mathcal{E}_2, \tag{9}$$

$$Q_1(S_2Q_2(p_1)) + u_1 = Q_1(S_2p_2 - u_2) \quad \text{on } \mathcal{E}_1. \tag{10}$$

4. Well posedness and Error estimate

The finite volume scheme associated to (1), (2) in Ω is then defined by (3), (4), (7), (8) for the Dirichlet–Neumann interface conditions problem and by (3), (4), (9), (10) for the general interface conditions problem. The following theorem, proven in [7], ensures that the two problems have the same unique solution which does not depend on the interface operator S_i (interface condition operator):

Theorem 4.1. *Under hypothesis (H1), (H2), the global problems defined by the set of Eqs. (3), (4), (7), (8) or by (3), (4), (9), (10) are equivalent and are well posed.*

To solve the set of discrete equations, we wish to use a domain decomposition algorithm, at each iteration of which, local problems on subdomains are solved. The second theorem, proven in [7], gives the well posedness of the local problems and allows us to use a domain decomposition algorithm.

Theorem 4.2. *Under hypothesis (H1), (H2), the local problem defined in Ω_1 by Eqs. (3), (4), (9) and the local problem defined in Ω_2 by Eqs. (3), (4), (10) are well posed.*

Error estimates have been carried out for the two types of transmission operators introduced before under the following additional hypothesis (H3 $_\gamma$) on the mesh:

(H3 $_\gamma$) Let $\gamma > 0, \exists C > 0$ s.t. $\forall i = 1, 2, \forall \varepsilon \in \mathcal{E}_i \text{ diam}(\varepsilon) \leq Cd(y_\varepsilon, x_K)^\gamma$.

Theorem 4.3. *Under hypothesis (H1) and (H3 $_\gamma$), $\exists C(\Omega) > 0$ s.t. the classical finite volume error e_i in Ω_i of (3), (4), (7), (8) satisfies:*

- if $Q_i = P_i^C$ (with $\gamma = 1$): $(\sum_{i=1,2} [\eta \|e_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + |e_i|_{1, \mathcal{T}_i}^2])^{1/2} \leq C(\Omega)h^{1/2}$ (and $O(h)$ if the grid of the master Ω_1 is a subgrid of the slave Ω_2);
- if the operators Q_i are defined by (5), (6) (with $\gamma = 1/2$): $(\sum_{i=1,2} [\eta \|e_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + |e_i|_{1, \mathcal{T}_i}^2])^{1/2} \leq C(\Omega)h$.

The same error estimate holds for (3), (4), (9), (10) because of Theorem 4.1.

5. Numerical results

When no interface grid is a subgrid of the other, the Robin interface conditions (9), (10) introduce a dependency of the interface conditions on Ω_i with the grid of the neighboring subdomain Ω_j . To cancel this dependency

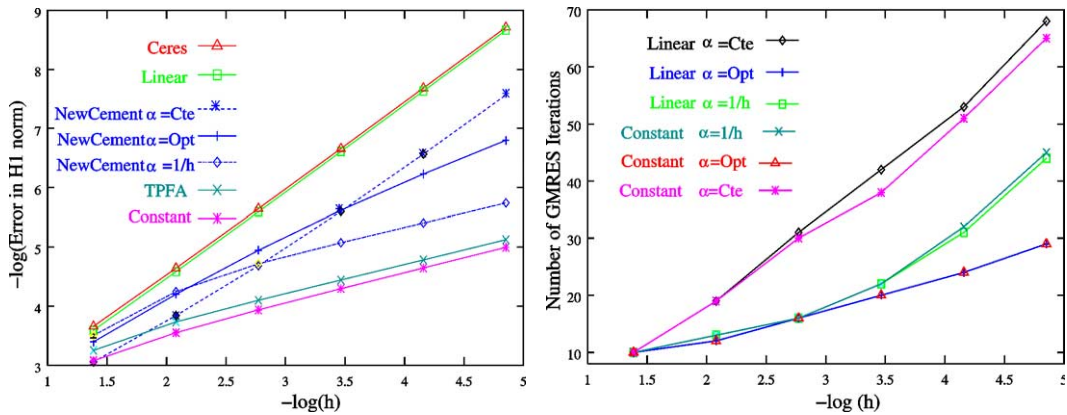


Fig. 1. (Left) Error vs. log of the mesh size (h) and (right) iteration counts vs. $\log(h)$ for various interface conditions.

a subgrid based on \mathcal{E}_1 and \mathcal{E}_2 and new unknowns are introduced on Γ_{12} to write equivalent Robin interface conditions but an interface band linear system has to be solved at each domain decomposition iteration. Then the problem is formulated as a substructuring method solved by a GMRES algorithm. We compare different methods: TPFA [5], Ceres (like TPFA but a linear interpolation is done to have a consistent flux on the interface, see [4]), New Cement [1] and the two proposed methods, with different $S_i = \text{diag}(\alpha_i)$ ($\alpha_i = 1$, $\alpha_i = \alpha_{\text{opt}}^i$ [8] and $\alpha_i = 1/h_i$ with h_i the size of the mesh of Ω_i). For Ceres and Linear we obtain, see Fig. 1, f an order of 1.8 (higher than expected because the regular Cartesian meshes). For New Cement, as in theory the order depends on the choice of α_i . For TPFA and Constant we obtain an order of 0.5 as expected. The number of iterations is the lowest for $\alpha_i = \alpha_{\text{opt}}^i$.

References

- [1] Y. Achdou, C. Japhet, Y. Maday, F. Nataf, A new cement to glue nonconforming grids with Robin interface conditions: the finite volume case, Tech. Report CMAP, École Polytechnique 419, 1999.
- [2] T. Arbogast, L.C. Cowsar, M.F. Wheeler, I. Yotov, Mixed finite element methods on non-matching multiblock grids, *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (4) (2000) 1295–1315.
- [3] C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera, A new nonconforming approach to domain decomposition: the Mortar element method, in: H. Brezis, J.-L. Lions (Eds.), *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, 1989.
- [4] C. Bernier, E. Candus, I. Faille, F. Nataf, Maillages non coincidents pour la modélisation des écoulements en milieux poreux, Technical Report IFP, IFP 54332, 2000.
- [5] R. Cautrès, R. Herbin, F. Hubert, Non matching finite volume grids and the non overlapping Schwarz algorithm, in: *Proceeding of the Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods*, 2000, pp. 213–219.
- [6] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, Finite volume methods, in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, VII, Elsevier, 2000, pp. 715–1022.
- [7] L. Saas, I. Faille, F. Willien, F. Nataf, Décomposition de domaine pour volumes finis sur maillages non conformes avec conditions d'interface de Robin optimisées, Tech. Report IFP, IFP 56947, 2002.
- [8] F. Willien, I. Faille, F. Nataf, F. Schneider, Domain decomposition methods for fluid flow in porous medium, in: *6th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery*, 1998.