Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 555–559
Comptes Rendus Mathematique

Géométrie différentielle

Le laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent

Jean-Michel Bismut

Département de mathématique, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 5 janvier 2004 ; accepté le 6 janvier 2004

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

On donne une formule de Lichnerowicz pour le laplacien associé à une déformation de la théorie de Hodge. Ce laplacien est un opérateur hypoelliptique d'ordre deux sur le fibré cotangent. Il interpole naturellement entre le laplacien de Hodge et le générateur du flot géodésique. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle. We give a Lichnerowicz formula for the Laplacian associated to a deformation of Hodge theory. This Laplacian is a second order hypoelliptic operator on the cotangent bundle. It interpolates naturally between the classical Hodge Laplacian and the generator of the geodesic flow. ***To cite this article: J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

1. Introduction

Soit X une variété riemannienne compacte, et soit F un fibré plat hermitien sur S. Dans la Note [2], nous avons construit un adjoint de l'opérateur de de Rham sur T^*X relativement à une forme sesquilinéaire naturelle, dépendant d'un hamiltonien $\mathcal{H}$. Nous avons montré qu'on pouvait supposer cette forme hermitienne. Dans la présente Note, nous donnons une formule de Lichnerowicz pour le laplacien $\mathcal{L}$ correspondant. On montre que pour un choix convenable de $\mathcal{H}$, $\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{L}$ est hypoelliptique. On vérifie également au niveau formel que par déformation convenable d'un paramètre, ce laplacien interpole entre le laplacien ordinaire de X et le générateur du flot géodésique sur T^*X.

Dans la Note [3], on donne des résultats correspondants pour une famille de variétés X. Les résultats annoncés dans cette Note sont démontrés dans [1].

Adresse e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr (J.-M. Bismut).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.01.009

2. Une formule de Lichnerowicz sur T^*X

On reprend les notations de la Note [2]. En particulier X désigne une variété riemannienne compacte, ∇^{TX} est la connexion de Levi-Civita sur TX. Soit R^{TX} la courbure de ∇^{TX}. Soit F est un fibré plat muni d'une métrique hermitienne g^F, et $\omega(\nabla^F, g^F)$ est la 1-forme

$$\omega(\nabla^F, g^F) = (g^F)^{-1}\nabla^F g^F. \tag{1}$$

Soit $\pi : T^*X \to X$ le fibré cotangent de X. Soit ω la forme symplectique de T^*X. Soit $\mathcal{H} : T^*X \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞, et soit $Y^{\mathcal{H}}$ le champ de vecteurs hamiltonien associé sur T^*X. On considère le complexe de de Rham $(\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F), d^{T^*X})$ des formes à support compact sur T^*X à coefficients dans F. On pose

$$d^{T^*X}_{\mathcal{H}} = \mathrm{e}^{-\mathcal{H}} d^{T^*X} \mathrm{e}^{\mathcal{H}}. \tag{2}$$

Dans [2], on a construit un adjoint formel $\bar{d}^{T^*X}_{\phi,\mathcal{H}}$ de d^{T^*X} relativement à une forme sesquilinéaire sur $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$. On a montré que cet adjoint est aussi l'adjoint de d^{T^*X} relativement à une forme hermitienne sur $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$.

On a le scindage $TT^*X = TX \oplus T^*X$ induit par la connexion ∇^{TX}, et on a aussi l'identification correspondante $\Lambda^{\cdot}(T^*X) = \Lambda^{\cdot}(T^*X) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}(TX)$.

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale de TX, et soit $e^1, \ldots, e^n$ la base duale correspondante de T^*X. On désigne par $\hat{e}_1, \ldots, e_n$ et $\hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n$ d'autres copies de ces bases. Alors $e_1, \ldots, e_n, \hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n$ est une base de TT^*X, et $e^1, \ldots, e^n, \hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$ est la base duale de T^*T^*X. On pose

$$i_{\widehat{R^{TX}p}} = \frac{1}{2} e^i e^j i_{\widehat{R^{TX}(e_i,e_j)p}}, \qquad R^{T^*X} p\wedge = \frac{1}{2} i_{\hat{e}^i} i_{\hat{e}^j} R^{TX}(e_i, e_j) p \wedge . \tag{3}$$

Proposition 2.1. *On a les identités,*

$$\begin{aligned} d^{T^*X}_{\mathcal{H}} &= e^i \wedge \big(\nabla^{\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)\widehat{\otimes}F}_{e_i} + \nabla_{e_i}\mathcal{H}\big) + \hat{e}_i \wedge (\nabla_{\hat{e}^i} + \nabla_{\hat{e}^i}\mathcal{H}) + i_{\widehat{R^{TX}p}}, \\ \bar{d}^{T^*X}_{\phi,\mathcal{H}} &= \big(-i_{\hat{e}^i}\big(\nabla^{\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)\widehat{\otimes}F}_{e_i} + \omega\big(\nabla^F, g^F\big)(e_i) - \nabla_{e_i}\mathcal{H}\big) \\ &\qquad + i_{e_i}(\nabla_{\hat{e}^i} - \nabla_{\hat{e}^i}\mathcal{H}) + R^{TX}p\wedge\big) - i_{\hat{e}^i}(\nabla_{\hat{e}^i} - \nabla_{\hat{e}^i}\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{4}$$

Définition 2.2. On pose

$$\begin{aligned} A_{\phi,\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}\big(\bar{d}^{T^*X}_{\phi,2\mathcal{H}} + d^{T^*X}\big), \qquad & B_{\phi,\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}\big(\bar{d}^{T^*X}_{\phi,2\mathcal{H}} - d^{T^*X}\big), \\ \mathfrak{A}_{\phi,\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}\big(\bar{d}^{T^*X}_{\phi,\mathcal{H}} + d^{T^*X}_{\mathcal{H}}\big), \qquad & \mathfrak{B}_{\phi,\mathcal{H}} &= \frac{1}{2}\big(\bar{d}^{T^*X}_{\phi,\mathcal{H}} - d^{T^*X}_{\mathcal{H}}\big). \end{aligned} \tag{5}$$

On a de manière évidente,

$$\mathfrak{A}_{\phi,\mathcal{H}} = \mathrm{e}^{-\mathcal{H}} A_{\phi,\mathcal{H}} \mathrm{e}^{\mathcal{H}}, \qquad \mathfrak{B}_{\phi,\mathcal{H}} = \mathrm{e}^{-\mathcal{H}} B_{\phi,\mathcal{H}} \mathrm{e}^{\mathcal{H}}. \tag{6}$$

De plus $A^2_{\phi,\mathcal{H}} = -B^2_{\phi,\mathcal{H}}, \mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}} = -\mathfrak{B}^2_{\phi,\mathcal{H}}$. Si $\xi \in T^*T^*X = T^*X \oplus TX$, soit ξ^V la projection de ξ sur TX. Si $\sigma(A^2_{\phi,\mathcal{H}})$ est le symbole principla de $A^2_{\phi,\mathcal{H}}$, on a

$$\sigma\big(A^2_{\phi,\mathcal{H}}\big) = \frac{1}{4}|\xi^V|^2. \tag{7}$$

Si U est un champ de vecteurs, L_U est l'opérateur de dérivée de Lie correspondant. Soit Δ^V le laplacien le long des fibres T^*X. On pose

$$\widehat{\nabla^V\mathcal{H}} = \nabla_{\hat{e}^i}\mathcal{H}\hat{e}^i. \tag{8}$$

Théorème 2.3. *On a les identités,*

$$\begin{aligned}
A^2_{\phi,\mathcal{H}} &= \frac{1}{4}\left(-\Delta^V - \frac{1}{2}\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l} + 2L_{\widehat{\nabla^V\mathcal{H}}}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}e^i i_{\hat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega(\nabla^F,g^F)(e_j) + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F,g^F)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\right),\\
\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}} &= \frac{1}{4}\left(-\Delta^V - \frac{1}{2}\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l} + \left|\nabla^V\mathcal{H}\right|^2\right.\\
&\quad \left. - \Delta^V\mathcal{H} + 2\nabla_{\hat{e}^i}\nabla_{\hat{e}^j}\mathcal{H}\hat{e}_i i_{\hat{e}^j} + 2\nabla_{\hat{e}^i}\nabla_{e_j}\mathcal{H}e^j i_{\hat{e}^i}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F,g^F)(Y^{\mathcal{H}}) + \frac{1}{2}e^i i_{\hat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega(\nabla^F,g^F)(e_j) + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F,g^F)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

3. Le cas où $\mathcal{H} = c|p|^2/2$

On suppose désormais que $\mathcal{H} = \mathcal{H}^c$, avec $\mathcal{H}^c = c|p|^2/2$.

Théorème 3.1. *On a,*

$$L_{Y^{\mathcal{H}^c}} = \nabla^{\Lambda^\cdot(T^*T^*X)\otimes F}_{Y^{\mathcal{H}^c}} + c\hat{e}_i i_{e_i} + c\langle R^{TX}(p,e_i)p,e_j\rangle e^i i_{\hat{e}^j}. \tag{10}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
A^2_{\phi,\mathcal{H}^c} &= \frac{1}{4}\left(-\Delta^V + 2cL_{\hat{p}} - \frac{1}{2}\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(L_{Y^{\mathcal{H}^c}} + \frac{1}{2}e^i i_{\hat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega(\nabla^F,g^F)(e_j) + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F,g^F)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\right),\\
\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} &= \frac{1}{4}\left(-\Delta^V + c^2|p|^2 + c(2\hat{e}_i i_{\hat{e}^i} - n) - \frac{1}{2}\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(L_{Y^{\mathcal{H}^c}} + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F,g^F)(Y^{\mathcal{H}^c}) + \frac{1}{2}e^i i_{\hat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega(\nabla^F,g^F)(e_j) + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F,g^F)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Théorème 3.2. *Pour $c \neq 0$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial u} - A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$, $\frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ sont hypoelliptiques.*

Démonstration. Ceci résulte du Théorème 3.1 et du théorème de Hörmander [6]. □

4. Laplacien hypoelliptique et laplacien ordinaire

On utilise la notation $\mathcal{H} = |p|^2/2$. Pour $a \in \mathbf{R}^*$, soit r_a la dilatation des fibres de $T^*X : p \to ap$. On pose

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_\pm &= \frac{1}{2}\left(-\Delta^V \pm 2L_{\hat{p}} - \frac{1}{2}\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_l\rangle e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l}\right),\\
\mathfrak{b}_\pm &= -\left(\pm L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}e^i i_{\hat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega(\nabla^F,g^F)(e_j) + \frac{1}{2}\omega(\nabla^F,g^F)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Notons que $\mathfrak{a}_\pm$ commute avec r^*_{-1}, et que $\mathfrak{b}_\pm$ anticommute avec r^*_{-1}.

De (11), on tire que pour $c > 0$,

$$r^*_{1/\sqrt{c}} 2A^2_{\phi,2\mathcal{H}^c} r^*_{\sqrt{c}} = c\mathfrak{a}_+ + \sqrt{c}\,\mathfrak{b}_+. \tag{13}$$

Pour $c < 0$, on a une identité évidente du même type, où les indices $+$ sont remplacés par $-$.

Soit Φ^{T^*X} la forme de Thom de Mathai–Quillen [7] associée à la métrique g^{TX} et à la connexion ∇^{TX}. Le forme Φ^{T^*X} est normalisée de telle manière que

$$\Phi^{T^*X} = \exp\bigl(-|p|^2 + \cdots\bigr). \tag{14}$$

On vérifie que les opérateurs $\mathfrak{a}_\pm$ sont semi-simples. Le noyau de $\mathfrak{a}_+$ est engendrée par la fonction 1, et le projecteur $Q^{T^*X}_+$ sur le noyau est donné par $\alpha \to \pi_*(\alpha\Phi^{T^*X})$. Le noyau de $\mathfrak{a}_-$ est engendré par Φ^{T^*X}, et le projecteur correspondant $Q^{T^*X}_-$ est donné par $\alpha \to (\pi_*\alpha)\Phi^{T^*X}$.

Soit $o(TX)$ le fibré d'orientation de TX. On identifie l'espace $\Omega^{\cdot}(X,F)$ (resp. $\Omega^{\cdot}(X, F \otimes o(TX))$) à son image dans $\Omega^{\cdot}(T^*X, F)$ par l'application $\alpha \to \pi^*\alpha$ (resp. $\alpha \to \pi^*\alpha \wedge \Phi^{T^*X}$). Notons que $Q^{T^*X}_+$ (resp. $Q^{T^*X}_-$) est un inverse à gauche pour ce plongement.

Soit d^X l'opérateur de de Rham agissant sur $\Omega^{\cdot}(X,F)$ ou sur $\Omega^{\cdot}(X, F\otimes o(TX))$, et soit d^{X*} son adjoint formel pour le produit hermitien naturel. Le résultat suivant suggère que notre théorie est une déformation de la théorie de Hodge habituelle.

Théorème 4.1. *On a l'identité,*

$$-Q^{T^*X}_\pm \mathfrak{b}_\pm \mathfrak{a}^{-1}_\pm \mathfrak{b}_\pm Q^{T^*X}_\pm = \frac{1}{2}\bigl(d^X + d^{X*}\bigr)^2. \tag{15}$$

Notons qu'une formule comparable à (15) joue un rôle clé dans l'article de Bismut et Lebeau [4] où on déforme la théorie de Hodge d'une variété complexe X en la théorie de Hodge d'une sous-variété Y. Les identités (13) et (15) suggèrent que a structure matricielle de notre opérateur est essentiellement la même que dans [4]. On montre dans [5] que c'est effectivement le cas.

5. Une déformation vers le flot géodésique

On suppose de nouveau que $\mathcal{H}$ est un hamiltonien arbitraire. Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose $\mathcal{H}_a(x,p) = \mathcal{H}(x,ap)$. Du Théorème 2.3, on tire pour $b \in \mathbf{R}^*$,

$$\begin{aligned} r^*_{b^2}\mathfrak{A}^2_{\phi,b^2\mathcal{H}_{1/b^2}} r^*_{1/b^2} = {} & \frac{1}{4b^4}\Bigl(-\Delta^V - \frac{1}{2}\bigl\langle R^{TX}(e_i,e_j)e_k,e_l\bigr\rangle e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l}\Bigr) \\ & + \frac{1}{4}\bigl|\nabla^V\mathcal{H}\bigr|^2 + \frac{1}{4b^2}\bigl(-\Delta^V\mathcal{H} + 2\hat{e}_i i_{\hat{e}^j}\nabla_{\hat{e}^i}\nabla_{\hat{e}^j}\mathcal{H} + 2e^j i_{\hat{e}^i}\nabla_{\hat{e}^i}\nabla_{e_j}\mathcal{H}\bigr) \\ & - \frac{1}{2}\Bigl(L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}\omega\bigl(\nabla^F,g^F\bigr)\bigl(Y^{\mathcal{H}}\bigr) + \frac{1}{2b^2}e^i i_{\hat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega\bigl(\nabla^F,g^F\bigr)(e_j) \\ & + \frac{1}{2b^2}\omega\bigl(\nabla^F,g^F\bigr)(e_i)\nabla_{\hat{e}^i}\Bigr). \end{aligned} \tag{16}$$

De (16), on tire que quand $b \to +\infty$,

$$r^*_{b^2} 2\mathfrak{A}^2_{\phi,b^2\mathcal{H}_{1/b^2}} r^*_{1/b^2} = \frac{1}{2}\bigl|\nabla^V\mathcal{H}\bigr|^2 - \Bigl(L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}\omega\bigl(\nabla^F,g^F\bigr)\bigl(Y^{\mathcal{H}}\bigr)\Bigr) + \mathcal{O}\Bigl(\frac{1}{b}\Bigr). \tag{17}$$

Supposons que $\omega(\nabla^F, g^F) = 0$. Par, (17), on voit que quand $b \to +\infty$, l'opérateur $2\mathfrak{A}^2_{\phi,b^2\mathcal{H}_{1/b^2}}$ se comporte comme une perturbation du générateur du flot hamiltonien sur T^*X associé à $\mathcal{H}$.

Notons que si $\mathcal{H} = |p|^2/2$, alors $b^2\mathcal{H}_{1/b^2} = \mathcal{H}^{1/b^2}$. Il est donc équivalent de prendre $\mathcal{H} = \mathcal{H}^c$, avec $c = 1/b^2$. On a donc montré que dans ce cas, quand $b \to 0$, l'opérateur $A^2_{\phi,\mathcal{H}^{1/b^2}}$ converge en un sens adéquat vers le laplacien de X, et quand $b \to +\infty$, il converge vers une perturbation du générateur du flot géodésique.

Références

[1] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle (2004) à paraître.
[2] J.-M. Bismut, Une déformation de la théorie de Hodge sur le fibré cotangent, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004) sous presse.
[3] J.-M. Bismut, Une déformation en famille du complexe de de Rham–Hodge, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004) sous presse.
[4] J.-M. Bismut, G. Lebeau, Complex immersions and Quillen metrics, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (74) (1992), 1991, ii+298.
[5] J.-M. Bismut, G. Lebeau, The analysis of the hypoelliptic Laplacian (2004) sous presse.
[6] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967) 147–171.
[7] V. Mathai, D. Quillen, Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, Topology 25 (1) (1986) 85–110.