Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 929–934

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géometrie différentielle/Analyse mathématique

Un problème de type Yamabe sur les variétés spinorielles compactes

Bernd Ammann [a], Emmanuel Humbert [b], Bertrand Morel [b]

[a] *Mathematisches Institut, Universität Bonn, Zimmer 22 Beringstrasse 1, 53115 Bonn, Allemagne*
[b] *Institut Élie Cartan BP 239, Université de Nancy 1, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, France*

Reçu le 16 février 2004 ; acepté après révision le 16 mars 2004

Disponible sur Internet le 24 avril 2004

Présenté par Marcel Berger

Résumé

Soit (M, g, σ) une variété spinorielle compacte de dimension $n \geqslant 2$. On note $\lambda_1^+(\tilde{g})$ la plus petite valeur propre > 0 de l'opérateur de Dirac dans la métrique $\tilde{g} \in [g]$ conforme à g. On définit $\lambda_{\min}^+(M, [g], \sigma) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1^+(\tilde{g}) \operatorname{Vol}(M, \tilde{g})^{1/n}$. On montre que $0 < \lambda_{\min}^+(M, [g], \sigma) \leqslant \lambda_{\min}^+(\mathbb{S}^n)$. On trouve des conditions suffisantes pour lesquelles on obtient l'inégalité stricte $\lambda_{\min}^+(M, [g], \sigma) < \lambda_{\min}^+(\mathbb{S}^n)$. Cette inégalité stricte a des applications en géométrie spinorielle conforme. ***Pour citer cet article : B. Ammann et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abstract

A Yamabe type problem on compact spin manifolds. Let (M, g, σ) be a compact spin manifold of dimension $n \geqslant 2$. Let $\lambda_1^+(\tilde{g})$ be the smallest positive eigenvalue of the Dirac operator in the metric $\tilde{g} \in [g]$ conformal to g. We then define $\lambda_{\min}^+(M, [g], \sigma) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1^+(\tilde{g}) \operatorname{Vol}(M, \tilde{g})^{1/n}$. We show that $0 < \lambda_{\min}^+(M, [g], \sigma) \leqslant \lambda_{\min}^+(\mathbb{S}^n)$. We find sufficient conditions for which we obtain strict inequality $\lambda_{\min}^+(M, [g], \sigma) < \lambda_{\min}^+(\mathbb{S}^n)$. This strict inequality has applications to conformal spin geometry. ***To cite this article: B. Ammann et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).***

Abridged English version

Let (M, g, σ) be a compact spin manifold of dimension $n \geqslant 2$. For a metric $\tilde{g}$ in the conformal class $[g]$ of g, let $\lambda_1^+(\tilde{g})$ be the smallest positive eigenvalue of the Dirac operator D in the metric $\tilde{g}$. Similarly, let $\lambda_1^-(\tilde{g})$ be the largest negative eigenvalue of D. We define

$$\lambda_{\min}^+\bigl(M, [g], \sigma\bigr) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1^+(\tilde{g}) \operatorname{Vol}(M, \tilde{g})^{1/n} \quad \text{and} \quad \lambda_{\min}^-\bigl(M, [g], \sigma\bigr) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} \bigl|\lambda_1^-(\tilde{g})\bigr| \operatorname{Vol}(M, \tilde{g})^{1/n}.$$

Adresses e-mail : ammann@math.uni-hamburg.de (B. Ammann), humbert@iecn.u-nancy.fr (E. Humbert), morel@iecn.u-nancy.fr (B. Morel).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.03.018

As a first result we obtain

$$\lambda^+_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) \leqslant \lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big) = \frac{n}{2}\,\omega_n^{1/n} \tag{1}$$

and

$$\lambda^-_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) \leqslant \lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big) = \lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big). \tag{2}$$

The main result is then the following:

Theorem 0.1. *Inequality* (1) (*resp. inequality* (2)) *is strict if* (M,g) *is nonconformally flat and* $n \geqslant 7$ *or if* (M,g) *is conformally flat, if* D *is invertible and if the mass endomorphism possesses a negative* (*resp. positive*) *eigenvalue.*

This result has applications to conformal spin geometry.

1. Introduction

Soit (M,g,σ) une variété spinorielle compacte de dimension $n \geqslant 2$. Si $\tilde g \in [g]$ est une métrique conforme à g, on note $\lambda^+_1(\tilde g)$ (resp. $\lambda^-_1(\tilde g)$) la plus petite valeur propre positive (resp. négative) de l'opérateur de Dirac par rapport à la métrique $\tilde g$. On définit alors

$$\lambda^+_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) = \inf_{\tilde g \in [g]} \lambda^+_1(\tilde g)\,\mathrm{Vol}(M,\tilde g)^{1/n} \quad \text{et} \quad \lambda^-_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) = \inf_{\tilde g \in [g]} \big|\lambda^-_1(\tilde g)\big|\,\mathrm{Vol}(M,\tilde g)^{1/n}.$$

Lott et le premier auteur ont montré dans [13,1] que

$$\lambda^+_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) > 0 \quad \text{et} \quad \lambda^-_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) > 0.$$

De nombreux travaux sont consacrés à l'étude de ces invariants conformes, en particulier [10,13,7,3,2]. Les problèmes que nous abordons dans cette Note sont issus d'un résultat de Ammann [3,2] qui dit que si $n \neq 2$ ou $\mathrm{Ker}(D) = \{0\}$ alors

$$\lambda^+_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) \leqslant \lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big) = \frac{n}{2}\omega_n^{1/n} \quad \text{et} \quad \lambda^-_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) \leqslant \lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big) = \lambda^-_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big), \tag{3}$$

où ω_n est le volume de la sphère unité standard $\mathbb{S}^n$. À la lecture de ce résultat se posent plusieurs questions naturelles : d'abord, est-ce que les inégalités (3) sont vraies dans le cas $n = 2$ et D non inversible ? Ensuite, à quelles conditions sont-elles strictes ? L'intérêt de répondre à cette dernière question est multiple. En effet, les inégalités strictes

$$\lambda^+_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) < \lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big) \tag{4}$$

et

$$\lambda^-_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) < \lambda^-_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big) = \lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big) \tag{5}$$

ont plusieurs applications. L'une d'elles, via l'inégalité d'Hijazi ([10] et [11]), a trait au célèbre problème de Yamabe dont la résolution fut obtenue par Aubin [6] et Schoen [15] au milieu des années 1980. Pour plus d'informations sur ce problème, le lecteur pourra se référer à [6,9] ou [12].

Une autre application, plus nouvelle, concerne l'équation

$$D(\varphi) = \lambda|\varphi|^{2/(n-1)}\varphi, \quad \text{avec } \|\varphi\|_{2n/(n-1)} = 1.$$

Cette équation fut étudiée dans [3,2] où il est démontré que si (4) (resp. (5)) est vraie alors on peut résoudre l'équation précédente avec $\lambda = \lambda^+_{\min}(M,[g],\sigma)$ (resp. $= \lambda^-_{\min}(M,[g],\sigma)$). Cette EDP est invariante par un changement conforme de métrique, et elle est critique du point de vue des injections de Sobolev en ce sens que les injections de Sobolev qui interviennent dans sa résolution ne sont pas compactes. De ce point de vue, cette équation est très proche de celle qui intervient dans la résolution du problème de Yamabe. Dans [3,2] on montre aussi que $\lambda^+_{\min}(M,[g],\sigma)$ (resp. $\lambda^-_{\min}(M,[g],\sigma)$) est atteinte. Il est à noter que le schéma de démonstration de ces résultats est proche de celui utilisé pour la résolution du problème de Yamabe même si de nombreuses difficultés interviennent en travaillant avec les spineurs.

Les résultats que nous obtenons sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit (M,g,σ) une variété spinorielle compacte de dimension $n \geqslant 2$. Alors les inégalités larges* (3) *sont toujours vraies. De plus,*

- *Si (M,g) est non conformément plate et si $n \geqslant 7$ alors les deux inégalités* (4) *et* (5) *sont vraies.*
- *Si (M,g) est conformément plate, si D est inversible et si l'endomorphisme de masse* (*voir dernier paragraphe*) *possède une valeur propre strictement négative* (*resp. positive*) *alors l'inégalité* (4) (*resp.* (5)) *est vraie.*

Remarque 1. On montre que l'opérateur de masse a un spectre symétrique si $n \not\equiv 3 \bmod 4$. Dans ce cas, s'il est non nul, on obtient directement que les deux inégalités (4) et (5) sont vraies.

2. Le principe de démonstration du Théorème 1.1

La démonstration du théorème est basée sur la construction d'un spineur test adéquat (voir la Proposition 1 ci-dessous pour plus de détails sur cette affirmation). Cela apporte des difficultés supplémentaires par rapport au cas classique des fonctions. Dans le cas conformément plat, on retrouve par ailleurs un lien étroit avec le théorème de la masse positive utilisé par Schoen dans son étude [15] du problème de Yamabe. On définit dans notre contexte une masse, l'endomorphisme de masse, comme le terme constant de la fonction de Green de l'opérateur de Dirac.

La première étape consiste à formuler le problème sous forme variationnelle.

Proposition 2.1 [1]. *Soit $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$. On définit*

$$J(\psi) = \frac{(\int_M |D\psi|^{2n/(n+1)} v_g)^{(n+1)/n}}{|\int_M \langle D\psi, \psi\rangle v_g|}.$$

Alors

$$\lambda^+_{\min}\big(M,[g],\sigma\big) \ (\textit{resp. } \lambda^-_{\min}\big(M,[g],\sigma\big)) = \inf_{\psi} J(\psi), \tag{6}$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des spineurs de classe C^∞ tels que $(\int_M \langle D\psi,\psi\rangle v_g) > 0$ (resp. < 0).

Le problème se ramène ainsi à trouver un spineur ψ pour lequel $J(\psi) < \lambda^+_{\min}(\mathbb{S}^n)$.

2.1. Le cas non conformément plat

Dans ce cas, le spineur ψ s'obtient de la manière suivante : à partir d'un spineur de Killing sur la sphère (qui réalise l'infimum dans la fonctionnelle ci-dessus), on obtient via la projection stéréographique de pôle N et la covariance conforme de l'opérateur de Dirac, un spineur φ sur $\mathbb{R}^n$ qui satisfait

$$D\varphi = \frac{n}{2} f\varphi,$$

où $f(x) = 2/(1+|x|^2)$ est telle que les métriques de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et de $\mathbb{R}^n$ satisfassent $g_{\mathbb{S}^n} = f^2 g_{\mathrm{eucl}}$. On choisit un point $p \in M$. Puisque (M,g) est non conformément plate, quitte à remplacer g par une métrique qui lui est conforme, on montre qu'on peut supposer que $\mathrm{Ric}_g(p)=0$ et $\Delta_g(\mathrm{Scal}_g)(p)=0$. En plus on a $\mathrm{Weyl}_g(p)\neq 0$ si $n\geqslant 4$. On trivialise le fibré des spineurs autour de p en utilisant la trivialisation de Bourguignon–Gauduchon (voir [8,4]). On obtient alors un difféomorphisme $\tau:\Sigma U\to\Sigma V$ où U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et V un voisinage de p dans M tels que pour tout $x\in V$, τ est une isométrie de $\Sigma_{\exp_p(x)}U$ sur $\Sigma_x V$. Soit maintenant η une fonction de cut-off de classe C^∞ au voisinage de p et 0 sur $M\setminus V$. On pose

$$\psi_\varepsilon=\eta\tau\circ\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On montre alors que si le spineur de Killing de la sphère duquel on est parti est bien choisi, alors, quand $\epsilon\to 0$, $J(\psi_\varepsilon)=\lambda^+_{\min}(\mathbb{S}^n)+\mathrm{o}(1)$ même si (M,g) est conformément plate. De plus, si $n\geqslant 7$ et si (M,g) est non conformément plate, on a

$$J(\psi_\varepsilon)\leqslant\lambda^+_{\min}\big(\mathbb{S}^n\big)\left[1-\frac{|\mathrm{Weyl}_g(p)|^2}{120(n-4)(n-2)n}\varepsilon^4+\mathrm{o}\big(\varepsilon^4\big)\right].$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin de comparer de manière très précise les opérateurs de Dirac agissant sur $\mathbb{R}^n$ et sur M via la trivialisation. Si ϵ est petit, $\lambda^+_{\min}(M,[g],\sigma)\leqslant J(\psi_\varepsilon)<\lambda^+_{\min}(\mathbb{S}^n)$. Pour $\lambda^-_{\min}$, il suffit de remplacer φ par $\varphi(-x)$ et la méthode marche aussi. Cela démontre le Théorème 1.1.

2.2. *Le cas conformément plat*

Dans ce paragraphe, on suppose que (M,g) est conformément plate et que D est inversible. La méthode précédente ne s'applique plus puisque $\mathrm{Weyl}_g\equiv 0$. On aura alors besoin d'introduire la notion d'endomorphisme de masse. Soit $p\in M$ un point de M fixé. Quitte à faire un changement conforme de métrique, on peut supposer que g est plate au voisinage de p.

2.2.1. *L'endomorphisme de masse (voir [5])*

L'endomorphisme de masse est le terme constant dans la fonction de Green de D. La fonction de Green de D est un endomorphisme

$$G_D:\Sigma_p M\to\Gamma\big(\Sigma\big(M\setminus\{p\}\big)\big)$$

qui à un élément ψ_0 de $\Sigma_p M$ associe un spineur de classe C^∞ défini sur $M\setminus\{p\}$ et qui satisfait

$$D\big(G_D(\psi_0)\big)=\psi_0\delta_p$$

au sens des distributions. Ici, δ_p est la masse de Dirac en p. Alors,

Proposition 2.2. *La fonction de Green G_D existe et est unique. De plus, si on choisit une carte $\varphi=(x_1,\dots,x_n)$ dans laquelle la métrique est euclidienne et telle que $\varphi(p)=0$, alors on peut identifier ΣU (U voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$) et ΣV (V voisinage de p dans M) de manière triviale, grâce par exemple à la trivialisation de Bourguignon–Gauduchon. Avec cette identification, G_D a le développement suivant quand x tend vers p*

$$\omega_{n-1}G_D\psi_0(x)=\frac{x}{|x|^n}\cdot\psi_0+v(x)\psi_0,$$

où $v(x)(\psi_0)$ est un spineur harmonique défini au voisinage de p.

Définition 2.3. On appelle *endormophisme de masse* l'endomorphisme suivant :

$$\alpha:\left|\begin{array}{l}\Sigma_p M\to\Sigma_p M,\\ \psi_0\mapsto v(p)(\psi_0).\end{array}\right.$$

L'endomorphisme de masse est linéaire et autoadjoint. Ses valeurs propres sont donc réelles. Si $n \not\equiv 3 \bmod 4$, son spectre est symétrique. De plus, le signe de ses valeurs propres ne dépend pas de la métrique plate au voisinage de p choisie dans la classe conforme de g.

Exemple 1.

– Si (M, g) est un tore plat alors l'endomorphisme de masse est nul.
– Si (M, g) est l'espace projectif réel de dimension $n \equiv 3 \bmod 4$, alors l'endomorphisme de masse est un multiple non nul de l'identité.

Remarque 2. Supposons n impair. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) < -n$, le noyau d'intégration $k(z; x, y) \in \mathrm{Hom}(\Sigma_x M, \Sigma_y M)$ de D^z est continu en les variables (x, y) sur $M \times M$. La fonction $h(z; x) := k(z; x, x)$ a une extension méromorphe pour $z \in \mathbb{C}$. Okikiolu [14, Theorem 1.2.2] démontre que $h(-1; p) = \alpha$.

2.3. Preuve du Théorème 1.1 au cas conformément plat

Soit ψ_0 un vecteur propre de α associé à la valeur propre ν. Soit aussi $\varepsilon > 0$ petit et

$$\rho := \varepsilon^{1/(n+1)}, \quad \varepsilon_0 := \frac{\rho^n}{\varepsilon} f\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{n/2}.$$

Les spineurs-tests ψ_ε^+ (pour $\lambda_{\min}^+$) et ψ_ε^- (pour $\lambda_{\min}^-$) utilisés ici sont les suivants

$$\psi_\varepsilon^\pm := \left| \begin{array}{ll} f\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{n/2}\left(1 \mp \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \psi_0 \mp \varepsilon_0 \nu \psi_0 & \text{si } r \leqslant \rho, \\ \mp \varepsilon_0 \big(G_D(\psi_0) - \eta v(x)(\psi_0) - \nu\psi_0\big) + \eta f\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{n/2} \psi_0 & \text{si } \rho \leqslant r \leqslant 2\rho, \\ \varepsilon_0 G_D(\psi_0) & \text{si } r \geqslant 2\rho, \end{array} \right.$$

où f est comme au paragraphe précédent, où $r = |x|$ et où η est une fonction de cut-off function égale à 1 sur $B(p, \rho)$, égale à 0 sur le complémentaire de $B(p, 2\rho)$ et qui satisfait $|\nabla\eta| \leqslant \frac{2}{\rho}$. Il faut remarquer que le spineur φ construit au paragraphe précédent exprimé en coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ a la forme suivante :

$$\varphi = f\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{n/2}\left(1 \mp \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \varphi_0,$$

où φ_0 est un spineur constant. Donc le spineur ψ_ε, comme dans le cas non conformément plat est égal à $\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ dans un voisinage de p. On calcule alors que

$$J(\psi_\epsilon) \leqslant \lambda_{\min}^+\big(\mathbb{S}^n\big) + C_0 \nu \epsilon^{n-1} + o\big(\epsilon^{n-1}\big),$$

où C_0 est une constante strictement positive. Pour ϵ petit, on trouve que $J(\psi_\varepsilon) < \lambda_{\min}^+(\mathbb{S}^n)$. Cela prouve le Théorème 1.1.

Références

[1] B. Ammann, A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue, Differential Geom. Appl. 18 (2003) 21–32.
[2] B. Ammann, The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions, Preprint, arXiv math.DG/0309061.
[3] B. Ammann, A variational problem in conformal spin geometry, Habilitationsschrift, Universität Hamburg, May 2003.
[4] B. Ammann, E. Humbert, B. Morel, On a nonlinear Dirac equation of Yamabe type, Preprint, arXiv math.DG/0308107.

[5] B. Ammann, E. Humbert, B. Morel, Mass endomorphism and spinorial Yamabe type problems on conformally flat manifolds, Preprint Inst. É. Cartan, Nancy 2003/58.
[6] T. Aubin, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures Appl. (9) 55 (1976) 269–296.
[7] C. Bär, Lower eigenvalue estimates for Dirac operators, Math. Ann. 293 (1992) 39–46.
[8] J.-P. Bourguignon, P. Gauduchon, Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques, Commun. Math. Phys. 144 (1992) 581–599.
[9] E. Hebey, Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés, Diderot, 1997.
[10] O. Hijazi, A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors, Commun. Math. Phys. 104 (1986) 151–162.
[11] O. Hijazi, Première valeur propre de l'opérateur de Dirac et nombre de Yamabe, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 313 (1991) 865–868.
[12] J.M. Lee, T.H. Parker, The Yamabe problem, Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) 17 (1987) 37–91.
[13] J. Lott, Eigenvalue bounds for the Dirac operator, Pacific J. Math. 125 (1986) 117–126.
[14] K. Okikiolu, Critical metrics for the determinant of the Laplacian in odd dimensions, Ann. of Math. 153 (2) (2001) 471–531.
[15] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Differential Geom. 20 (1984) 479–495.