Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 39–42

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle

Sur les variétés sous-riemanniennes de contact isotropes

Abdol-Reza Mansouri

Division of Engineering and Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, MA 02138, États-Unis

Reçu le 7 janvier 2004 ; accepté après révision le 19 avril 2004

Disponible sur Internet le 20 mai 2004

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Dans cette Note, nous montrons que contrairement au cas de la dimension 3, il n'existe guère de variété sous-riemannienne de contact isotrope en dimension supérieure à 3. ***Pour citer cet article : A.-R. Mansouri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

On isotropic sub-Riemannian contact manifolds. In this Note, we show that contrary to the dimension 3 case, isotropic contact sub-Riemannian manifolds of dimension greater than 3 do not exist. ***To cite this article: A.-R. Mansouri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

1. Introduction

Soient M une variété lisse de dimension $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}^\star$), ω une 1-forme de contact sur M, $\mathcal{D}$ la distribution noyau de ω et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ une métrique riemannienne sur $\mathcal{D}$. La donnée $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ définit une structure sous-riemannienne de contact sur M. Il existe alors localement sur M un co-repère mobile $(\omega_i)_{i=1}^{2n+1}$ (dit adapté à la structure sous-riemannienne) tel que la distribution $\mathcal{D}$ soit donnée en tout point par le noyau de ω^{2n+1} et que la métrique sous-riemannienne puisse s'écrire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} = \omega^1 \otimes \omega^1 + \cdots + \omega^{2n} \otimes \omega^{2n}$, et tel que la $2n+1$-forme extérieure $\omega^{2n+1} \wedge \mathrm{d}\omega^{2n+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\omega^{2n+1}$ soit partout non-nulle (condition de contact). L'ensemble des co-repères locaux de M adaptés à la structure sous-riemannienne $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ forme un fibré principal sur M et la réduction du groupe structural de ce fibré définit une G-structure canoniquement associée à la structure sous-riemannienne. De plus, cette G-structure est elle-même munie d'un co-repère canonique ; un difféomorphisme de cette G-structure preservant ce co-repère canonique est dit automorphisme et la variété sous-riemannienne $(M, \mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ est dite isotrope si le groupe d'automorphismes de la G-structure canonique associée agit transitivement.

Adresse e-mail : mansouri@deas.harvard.edu (A.-R. Mansouri).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.04.009

La classification des variétés sous-riemanniennes de contact isotropes en dimension 3 a été complétée par Hughen [6] et il en ressort que ces dernières ne dépendent que d'une constante réelle K : si $K > 0$, la variété est localement équivalente à $\mathrm{SO}(3)$, si $K < 0$, la variété est localement équivalente à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, tandis que pour $K = 0$, la variété est localement équivalente au groupe d'Heisenberg.

En utilisant la méthode d'équivalence de Cartan [1,5,7], nous explicitons la G-structure canoniquement associée à une variété sous-riemannienne de contact de dimension impaire arbitraire, ainsi que le co-repère canonique défini sur cette structure (voir aussi [4,3]). Des équations de structure de ce co-repère canonique nous déduisons immédiatement la non-existence de variétés sous-riemanniennes de contact isotropes de dimension supérieure à 3.

2. Equivalence locale

Soit $(M, \mathcal{D}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}})$ une variété sous-riemannienne de dimension $2n + 1$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$. Un difféomorphisme $\phi : M \to M$ preserve la structure sous-riemannienne si et seulement si $\phi_\star(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et $\phi^\star(\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}) = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$. Il en résulte qu'un difféomorphisme $\phi : M \to M$ préserve la structure sous-riemannienne de M si et seulement si pour tout co-repère adapté local $\omega = (\omega_i)_{i=1}^{2n+1}$ de M, $\phi^\star\omega = (\phi^\star\omega_i)_{i=1}^{2n+1}$ constitue aussi un tel co-repère. L'ensemble des co-repères adaptés de M forme donc un fibré principal $\mathcal{B}_0 \to M$ de groupe structural G_0 défini par

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\Big|\; A \in O(2n),\ b \in \mathbb{R}^{2n},\ c \in \mathbb{R}^\star \right\}.$$

Le problème d'équivalence de deux variétés sous-riemanniennes se ramène donc à l'équivalence de deux G_0-structures, c'est-à-dire au système de Pfaff $\phi^\star\bar{\theta} = \theta$ sur $\mathcal{B}_0$, où $\theta = g\omega$ et $\bar{\theta} = \bar{g}\overline{\omega}$, avec $g, \bar{g} \in G_0$.

3. Équations de structure

Deux normalisations permettent de réduire le groupe structural G_0 au sous-groupe G_2 donné par

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \;\Big|\; A \in \mathrm{SO}(2n) \right\},$$

pour n pair, et

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} \;\Big|\; A \in O(2n) \right\},$$

pour n impair. Le sous-fibré correspondant $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{B}_0$ de groupe structural G_2 peut être muni canoniquement d'un co-repère $(\theta^1, \ldots, \theta^{2n+1}, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{2n}^{2n-1})$, les α_j^i, $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$, étant les formes de Maurer–Cartan sur G_2.

Proposition 3.1. *Les équations de structure du co-repère canonique* $(\theta^1, \ldots, \theta^{2n+1}, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{2n}^{2n-1})$ *sur* $\mathcal{B}_2$ *sont données par*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^i &= \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j^i \wedge \theta^j + \sum_{j=1}^{2n} T_j^i \theta^j \wedge \theta^{2n+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2n,\\
\mathrm{d}\theta^{2n+1} &= \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 2n} S_{kl}\theta^k \wedge \theta^l,\\
\mathrm{d}\alpha_j^i &= \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k^i \wedge \alpha_j^k + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 2n,\ k > i} K_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l
\end{aligned}$$

$$+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 2n,\ k<i}\big(K^k_{lij}+T^i_l S_{jk}-T^j_l S_{ik}-T^i_k S_{jl}+T^j_k S_{il}\big)\theta^k\wedge\theta^l$$
$$+\sum_{j<l\leqslant 2n}K^i_{jil}\theta^i\wedge\theta^l+\sum_{i<l<j}\big(K^i_{lij}+T^i_l S_{ji}-T^i_i S_{jl}+T^j_i S_{il}\big)\theta^i\wedge\theta^l+K^i_{jij}\theta^i\wedge\theta^j$$
$$+\sum_{1\leqslant k\leqslant 2n}\left(\frac{\partial T^j_k}{\partial\theta^i}-\frac{\partial T^i_k}{\partial\theta^j}\right)\theta^k\wedge\theta^{2n+1},\quad 1\leqslant i<j\leqslant 2n,$$

où $T^i_j=T^j_i,\ \forall 1\leqslant i,j\leqslant 2n,\ T^{2n}_{2n}=-\sum_{i=1}^{2n-1}T^i_i$ *et la condition de contact est donnée par la relation*

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n:1\leqslant k_i<l_i\leqslant 2n}\epsilon^{k_1l_1\cdots k_nl_n}S_{k_1l_1}\cdots S_{k_nl_n}=1, \tag{1}$$

$\epsilon^{k_1l_1\cdots k_nl_n}$ *étant la signature de la permutation* $(k_1l_1\ldots k_nl_n)$ *de* $(1\ldots 2n)$.

Les équations de structure détaillées dans la Proposition 3.1 sont obtenues en mettant à profit les conditions d'intégrabilité $\mathrm{d}^2\theta^i=0,\ i=1,\ldots,2n$. La condition d'intégrabilité $\mathrm{d}^2\theta^{2n+1}=0$, quant à elle, mène au résultat suivant :

Proposition 3.2. *En définissant* $S_{ji}=-S_{ij}$ *pour tout* $1\leqslant i<j\leqslant 2n$*, on a* :

$$\mathrm{d}S_{kl}=\sum_{j=1}^{2n}\big(S_{lj}\alpha^j_k+S_{jk}\alpha^j_l\big)+\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{\partial S_{kl}}{\partial\theta^j}\theta^j,\quad \forall 1\leqslant k<l\leqslant 2n.$$

4. Variétés sous-riemanniennes de contact isotropes

Le co-repère $(\theta^1,\ldots,\theta^{2n+1},\alpha^1_2,\ldots,\alpha^{2n-1}_{2n})$ étant déduit canoniquement du co-repère $(\theta^1,\ldots,\theta^{2n+1})$ sur M, tout automorphisme $\phi:\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_2$ du G_2-fibré $\mathcal{B}_2$ préserve le co-repère $(\theta^1,\ldots,\theta^{2n+1},\alpha^1_2,\ldots,\alpha^{2n-1}_{2n})$. En particulier ϕ préserve aussi les invariants K^i_{jkl}, T^i_j, S_{kl} des équations de structure.

Supposons maintenant que $(M,\mathcal{D},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}})$ soit une variété sous-riemannienne isotrope de dimension $2n+1$. L'action du groupe d'automorphismes du G_2-fibré $\mathcal{B}_2$ étant transitive, il en résulte que les fonctions de structure K^i_{jkl}, T^i_j, S_{kl} sont constantes. Il en découle en particulier que $\mathrm{d}S_{kl}=0$ pour tout $1\leqslant k<l\leqslant 2n$. Les équations de structure de la Proposition 3.2 impliquent $S_{jk}=S_{jl}=0,\ \forall 1\leqslant j\leqslant 2n,\ j\neq k,\ j\neq l,\ \forall 1\leqslant k<l\leqslant 2n$. Ces relations sont trivialement vérifiées lorsque M est de dimension 3 ($n=1$) ; en dimension supérieure à 3 ($n>1$), ces relations impliquent $S_{kl}=0,\ \forall 1\leqslant k<l\leqslant 2n$. Or ceci contredit la condition de contact donnée par l'Éq. (1). Par suite,

Théorème 4.1. *Pour n entier strictement supérieur à* 1*, il n'existe aucune variété sous-riemannienne de contact isotrope de dimension* $2n+1$.

Remarque 1. Une démonstration alternative du Théorème 4.1 ne faisant pas usage de la Proposition 3.2 a été proposée dans [2] et procède comme suit : la propriété d'isotropie contraint les fonctions S_{kl} à être constantes ; or, le long d'une fibre de la G-structure, la forme θ^j $(j=1,\ldots,2n)$ varie selon $a^i_j\theta^j$, où la matrice (a^i_j) est orthogonale. Par suite, il découle de la Proposition 3.1 que les S_{kl} varient selon $S_{ij}a^i_ka^j_l$. En dimension 3, il n'existe qu'une seule composante, S_{12}, et celle-ci est déjà constante. En dimension strictement supérieure à 3, par contre, pour que les fonctions S_{kl} soient constantes il est donc nécessaire qu'elles soient toutes nulles ; or ceci contredit la condition de contact de l'Éq. (1).

Remerciement

L'auteur tient à remercier les professeurs Richard Montgomery et Elisha Falbel de leurs remarques fort précieuses.

Références

[1] E. Cartan, Les problèmes d'équivalence, in : Oeuvres Complètes, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
[2] E. Falbel, personal communication, March 2004.
[3] E. Falbel, C. Gorodski, On contact sub-Riemannian symmetric spaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 28 (5) (1995) 571–589.
[4] E. Falbel, J.M. Veloso, J.A. Verderesi, Constant curvature models in sub-Riemannian geometry, VIII School on Differential Geometry, Campinas, 1992, Mat. Contemp. 4 (1993) 119–125.
[5] R.B. Gardner, The Method of Equivalence and its Applications, SIAM, Philadelphia, 1989.
[6] K. Hughen, The geometry of subriemannian three-manifolds, Ph.D. Thesis, Duke University, 1995.
[7] R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications, in: Math. Surveys Monographs, vol. 91, American Mathematical Society, 2002.