Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 345–350
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Paradoxe de Klein pour l'équation de Klein–Gordon chargée : superradiance et opérateur de diffusion

Alain Bachelot

Université Bordeaux-1, institut de mathématiques, UMR CNRS 5466, 33405 Talence cedex, France

Reçu le 25 juin 2004 ; accepté le 29 juin 2004

Disponible sur Internet le 10 août 2004

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous développons la théorie de la diffusion pour l'équation de Klein–Gordon chargée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ en présence d'un potentiel électrostatique $A(x)$ admettant des limites distinctes $a^\pm$ quand $x \to \pm\infty$. Dans ce cas, l'énergie conservée n'est pas définie positive (paradoxe de Klein). Nous faisons l'analyse spectrale de l'équation harmonique, et établissons l'existence d'un opérateur de diffusion dont la norme du symbole est strictement supérieur à 1 pour les fréquences dans (a^-, a^+). Ces résultats s'appliquent à la métrique de DeSitter–Reissner–Nordstrøm, pour justifier la notion de superradiance des trous noirs chargés. ***Pour citer cet article : A. Bachelot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Klein paradox for the charged Klein–Gordon equation: superradiance and scattering. We develop the scattering theory for the charged Klein–Gordon equation on $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, when the electrostatic potential $A(x)$ has different asymptotics $a^\pm$ as $x \to \pm\infty$. In this case, the conserved energy is not positive definite (Klein Paradox). We construct the spectral representation for the harmonic equation, and we establish the existence of a Scattering Operator the symbol of which has a norm strictly larger than 1, for the frequencies in (a^-, a^+). These results can be applied to the DeSitter–Reissner–Nordstrøm metric, to justify the notion of superradiance of the charged black-holes. ***To cite this article: A. Bachelot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

We consider the charged Klein–Gordon equation

$$\left(\partial_t - \mathrm{i}A(x)\right)^2 u - \partial_x^2 u + V(x)u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where $A, V \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfy the main hypotheses

Adresse e-mail : bachelot@math.u-bordeaux.fr (A. Bachelot).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.06.016

$$A(x) \longrightarrow a_\pm, \quad x \longrightarrow \pm\infty,\ a_- \neq a_+, \tag{2}$$

$$V(x) \longrightarrow 0, \quad |x| \to \infty. \tag{3}$$

Fundamental examples of such an equation arise in General Relativity for the propagation of waves on space–times of Black-Hole type with an electrostatic charge. Other one-dimensional field equations with step-like perturbations have been studied: the existence of a Scattering Operator that is unitary, was established for the Dirac system in [8], and for the Schrödinger equation in [3]. The key point for both these equations is the conservation of the L^2 norm. The situation drastically differs for the Klein–Gordon equation (1) since the conserved energy

$$E(u,t) := \int \left|\partial_t u(t,x)\right|^2 + \left|\partial_x u(t,x)\right|^2 + \left[V(x) - A^2(x)\right]\left|u(t,x)\right|^2 \mathrm{d}x \tag{4}$$

is not always positive. In particular, when A satisfies the steplike hypothesis (2), the set of modes is finite dimensional, but there exists no finite codimensional subspace of Cauchy data, on which this energy is positive. This is the root of the so called *Klein paradox*. Then there can exist exponentially increasing solutions (the usual modes). Furthermore, in some situations, there exist solutions *polynomially* increasing in time. To overcome these difficulties, we develop the spectral analysis of the time-harmonic Klein–Gordon equation

$$u'' + \left[k - A(x)\right]^2 u - V(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

where $k \in \mathbb{C}$ is the spectral parameter. We use the Jost functions which are the solutions $f^\pm_{\mathrm{in(out)}}(k;x)$ of (5), satisfying $\lim_{x\to\pm\infty} f^\pm_{\mathrm{in(out)}}(k;x) - \mathrm{e}^{\pm(\mp)\mathrm{i}(k-a_\pm)x} = 0$. The Wronskian $W_{\mathrm{in(out)}}(k) := [f^+_{\mathrm{in(out)}}, f^-_{\mathrm{in(out)}}](k)$, $T^\pm(k) := -2\mathrm{i}(k-a_\pm)/W_{\mathrm{out}}(k)$, $R^\pm(k) := [f^\mp_{\mathrm{out}}, f^\pm_{\mathrm{in}}]/W_{\mathrm{out}}(k)$, where $[f,g] := f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$, plays an important role. The roots of $W_{\mathrm{in}}(k) = 0$ satisfying $\Im k > 0$, are the usual modes, but due to the different asymptotics of $A(x)$ as $x \to \pm\infty$, it can exist a finite set σ_{ss}, of real roots, the *hyperradiant* modes, that lead to the solutions of finite energy, polynomially increasing in time. Moreover, the phenomenon of *superradiance* appears:

$$k \in (a_-, a_+) \setminus \sigma_{ss} \Longrightarrow \left|R^\pm(k)\right| > 1.$$

We construct the distorted Fourier transforms that are defined on the weighted space $L^2(\mathbb{R}_k, (1+k^2)^s\,\mathrm{d}k)$, and because of the critical frequencies $a^\pm$, it is necessary to take $s > \frac{1}{2}$. The main result of this harmonic analysis is the resolution of the identity for (5), but because of the hyperradiant modes, the usual spectral measure on $\mathbb{R}_k$ is replaced by a distribution, that is singular at these frequencies. Taking advantage of this spectral representation, we establish the existence of the wave operators, without using the conservation of the non positive energy (4), where the asymptotic dynamics are

$$(\partial_t - \mathrm{i}a_\pm)^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad x \to \pm\infty,\ |t| \to \infty.$$

When there exists neither usual mode, nor hyperradiant mode, we develop a complete scattering theory. We establish the existence of the scattering operator, of which the symbol is the scattering matrix

$$\widehat{S}(k) := \begin{pmatrix} R^+(k) & T^+(k) \\ T^-(k) & R^-(k) \end{pmatrix},$$

which is superradiant for the frequencies $k \in (a_-, a_+)$. These results can be applied to the scalar field theory in the De Sitter–Reissner–Nordstrøm universe, hence our analysis explains the phenomenon of superradiance of charged black-holes [8], of which the corresponding effect for the classical particles is the Penrose process.

1. Introduction

La théorie de la diffusion pour l'équation de Klein–Gordon chargée a été développée pour des potentiels électrostatiques de courte portée [5,9]. Dans ce cas, le paradoxe de Klein est exclus : l'énergie conservée est définie positive sur un sous-espace de données initiales dans $H^1 \times L^2$, de codimension finie. L'existence de l'opérateur de diffusion en présence de ce paradoxe est un problème ouvert que nous résolvons pour l'équation :

$$\big(\partial_t - \mathrm{i}A(x)\big)^2 u - \partial_x^2 u + V(x)u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

A et V appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}_x;\mathbb{R})$, et on suppose qu'il existe $\alpha > 0$, $a_\pm \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(\big|A(x) - a_- \mathbf{1}_{]-\infty,0]}(x) - a_+ \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)\big| + \big|V(x)\big|\big)\, \mathrm{e}^{\alpha|x|}\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{7}$$

$$\sup_{0<|h|<1} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{A(x+h) - A(x)}{h}\right| \mathrm{e}^{\alpha|x|}\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{8}$$

Sous l'hypothèse fondamentale

$$a_+ \neq a_-, \tag{9}$$

l'énergie conservée des solutions $u \in C^0(\mathbb{R}_t; H^1(\mathbb{R}_x)) \cap C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}_x))$,

$$E(u,t) := \int \big|\partial_t u(t,x)\big|^2 + \big|\partial_x u(t,x)\big|^2 + \big[V(x) - A^2(x)\big]\big|u(t,x)\big|^2\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

n'est pas définie positive, et on n'a pas toujours

$$\sup_t \big\|\partial_t u(t)\big\|_{L^2(\mathbb{R}_x)} + \big\|\partial_x u(t)\big\|_{L^2(\mathbb{R}_x)} < \infty. \tag{11}$$

Toutefois nous montrons que (11) est vraie sur un sous-espace de codimension finie dans $H_s^1 \times L_s^2$, où

$$L_s^2(\mathbb{R}_x) := L^2\big(\mathbb{R}_x, (1+x^2)^s\,\mathrm{d}x\big), \quad H_s^1(\mathbb{R}_x) := \big\{u \in L_s^2;\ u' \in L_s^2\big\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

La valeur de $s \geqslant 1$ est liée à l'éventuelle présence de solutions d'énergie finie de (6), à croissance polynomiale en temps : $|u(t,x)| \sim t^{s-1}$, $t \to +\infty$. Cela nous permet d'établir l'existence de l'opérateur de diffusion qui est *super-radiant* : le coefficient de réflection est strictement supérieur à 1 pour les fréquences de (a_-, a_+). Les hypothèses sur A et V étant satisfaites pour l'équation de Klein–Gordon en métrique de De Sitter–Reissner–Nordstrøm, notre analyse justifie l'explication des sursauts γ par la superradiance des trous noirs chargés [7], qui est l'analogue pour les champs de spin entier, du processus de Penrose pour une particule ponctuelle. L'énergie indéfinie (10) n'interviendra pas dans les démonstrations qui s'appuient sur un étude assez détaillée de l'équation harmonique.

2. Analyse spectrale

Pour tout $k \in \mathbb{C}$, $+(-)\Im k > -\frac{\alpha}{2}$, il existe d'uniques fonctions $f^\pm_{\mathrm{in(out)}}(k;x)$, C^1 en x, analytiques en k, solutions de l'équation harmonique

$$y'' + \big[k - A(x)\big]^2 y - V(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

satisfaisant : $\lim_{x\to\pm\infty} f^\pm_{\mathrm{in(out)}}(k;x) - \mathrm{e}^{\pm(\mp)\mathrm{i}(k-a_\pm)x} = 0$. On introduit les Wronskiens $W_{\mathrm{in(out)}}(k) := [f^+_{\mathrm{in(out)}}, f^-_{\mathrm{in(out)}}](k)$, $[f,g] := f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$. Les solutions de l'équation $W_{\mathrm{in}}(k) = 0$ sont appelées respectivement, valeurs propres, résonances, modes hyperradiants, si $\Im k > 0$, $\Im k < 0$, $\Im k = 0$, et leurs ensembles sont notés σ_p, $\mathcal{R}$, σ_{ss}. On montre que σ_p et σ_{ss} sont finis et $\sigma_{ss} \subset (a_-, a_+)$. Contrairement au cas de l'équation de Schrödinger ($A = 0$), leur multiplicité $m(k) \in \mathbb{N}^*$ donnée par $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}k^l} W_{\mathrm{in}}(k) = 0$, $l < m(k)$, $\frac{\mathrm{d}^{m(k)}}{\mathrm{d}k^{m(k)}} W_{\mathrm{in}}(k) \neq 0$, peut être supérieure à 1. Par exemple pour $A(x) = \mathbf{1}_{]-\infty,0]\cup[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]}(x)$, $V(x) = 0$, on a $\sigma_{ss} = \{\frac{1}{2}\}$, $m(\frac{1}{2}) = 2$. On pose :

$$\sigma_{ss} \neq \emptyset \Rightarrow \nu := \max_{k\in\sigma_{ss}} m(k), \qquad \sigma_{ss} = \emptyset \Rightarrow \nu := 0. \tag{13}$$

Pour $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ss}$, on introduit les coefficients de transmission $T^\pm(\kappa) := -2\mathrm{i}(\kappa - a_\pm)/W_{\mathrm{out}}(\kappa)$ et de réflection $R^\pm(\kappa) := [f^\mp_{\mathrm{out}}, f^\pm_{\mathrm{in}}]/W_{\mathrm{out}}(\kappa)$. Ces fonctions analytiques sur $\mathbb{R}_\kappa \setminus \sigma_{ss}$ satisfont

$$\frac{\kappa - a_\pm}{\kappa - a_\mp}\left|T^\pm(\kappa)\right|^2 + \left|R^\pm(\kappa)\right|^2 = \left|T^+(\kappa)T^-(\kappa) - R^+(\kappa)R^-(\kappa)\right| = 1,$$

ce qui entraîne la superradiance :

$$\kappa \in (a_-, a_+) \setminus \sigma_{ss} \Longrightarrow \left|R^\pm(\kappa)\right| > 1. \tag{14}$$

La transformée de Fourier distordue est définie pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$, en posant :

$$F^\pm_{\text{in(out)}}(f)(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f^\pm_{\text{in(out)}}(k;x) f(x)\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{C},\ +(-)\Im k \geqslant 0.$$

Proposition 2.1. *$F^\pm_{\text{in(out)}}$ qui est défini de $C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ dans $\bigcap_n [H^n \cap L^2_n](\mathbb{R}_\kappa)$, admet une extension continue* :

(i) *de $L^2_{1/2+\delta}(\mathbb{R}_x)$ dans $H^{-1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}_\kappa) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}_\kappa) + H^{1/2+\delta}(\mathbb{R}_\kappa)$, pour tout $\delta, \varepsilon > 0$;*
(ii) *de $L^2_1(\mathbb{R}_x)$ dans $L^2(\mathbb{R}_\kappa)$;*
(iii) *de $H^1 \cap L^2_1(\mathbb{R}_x)$ dans $L^2_1(\mathbb{R}_\kappa)$.*

$F^\pm_{\text{in(out)}}$ n'admet aucune extension continue de $L^2_{1/2}(\mathbb{R}_x)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_\kappa)$, ni de $L^2_{1-\delta}(\mathbb{R}_x)$, $\delta > 0$, dans $L^2(\mathbb{R}_\kappa)$.

La transformée réciproque définie pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_\kappa)$ par

$$\Phi^\pm_{\text{in(out)}}(\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^\pm_{\text{in(out)}}(\kappa;x)\varphi(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa, \quad x \in \mathbb{R},$$

est un opérateur borné de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}_\kappa)$ dans $H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_x)$, et de $H^s(\mathbb{R}_\kappa)$ dans $L^2_s(\mathbb{R}^\pm_x)$.

Le résultat principal de cette analyse est la résolution de l'identité pour (12).

Théorème 2.2. *Il existe une famille de nombres complexes $(c_{\lambda,l})_{\lambda\in\sigma_p,\ 0\leqslant l<m(\lambda)}$, tels que pour tout $f \in L^2_s(\mathbb{R}_x)$, $s > \max(\frac{1}{2}, \nu - \frac{1}{2})$, $p = 0, 1$, on a* :

$$pf = \Phi^\pm_{\text{in}}\left(\frac{\mathrm{i}\kappa^p}{W_{\text{in}}(\kappa + \mathrm{i}0)} F^\mp_{\text{in}}(f)\right) - \Phi^\pm_{\text{out}}\left(\frac{\mathrm{i}\kappa^p}{W_{\text{out}}(\kappa - \mathrm{i}0)} F^\mp_{\text{out}}(f)\right)$$
$$+ \sum_{\lambda\in\sigma_p}\sum_{l=0}^{m(\lambda)-1} c_{\lambda,l}\partial_k^l\big(k^p f^\pm_{\text{in}}(k;x)F^\mp_{\text{in}}(f)\big)(k=\lambda) + \overline{c_{\lambda,l}}\partial_k^l\big(k^p f^\pm_{\text{out}}(k;x)F^\mp_{\text{out}}(f)\big)(k=\bar\lambda).$$

Cette formule était établie dans [2] quand A est de courte portée. Sous notre hypothèse (9), la présence éventuelle des modes hyperradiants qui sont des singularités de $[W_{\text{in(out)}}(\kappa + (-)\mathrm{i}0)]^{-1}$, transforme les usuelles intégrales spectrales sur $\mathbb{R}_\kappa$ en parties finies d'Hadamard.

3. Comportements asymptotiques en temps

Pour tout $u_0 \in H^1_s(\mathbb{R}_x)$, $u_1 \in L^2_s(\mathbb{R}_x)$, $s \in \mathbb{R}$, l'Éq. (6) admet une unique solution $u \in C^0(\mathbb{R}_t; H^1_s(\mathbb{R}_x)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; L^2_s(\mathbb{R}_x))$, satisfaisant $u(0,x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$. Si les données de Cauchy appartiennent à l'espace

$$X := H^1_{\max(\nu,1)}(\mathbb{R}_x) \times L^2_{\max(\nu,1)}(\mathbb{R}_x), \tag{15}$$

la résolution de l'identité permet d'obtenir une représentation de u par des transformées de Fourier distordues, et d'en déduire des estimations d'énergie.

Théorème 3.1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $(u_0, u_1) \in X$, $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\big\|\big(u(t), \partial_t u(t)\big)\big\|_{H^1\times L^2} \leqslant C\big\|(u_0,u_1)\big\|_X\big(1+\nu|t|^{\nu+1/2}+|t|^{\mu-1}\,\mathrm{e}^{\gamma|t|}\big), \quad \mu := \max_{\lambda\in\sigma_p} m(\lambda),\ \gamma := \max_{\lambda\in\sigma_p} \Im(\lambda).$$

On note que si $\sigma_p = \sigma_{ss} = \emptyset$, la norme $L^2(\mathbb{R}_x)$ de $u(t)$ est uniformément bornée, en contraste avec le cas de l'équation des ondes $\partial_t^2 - \partial_x^2$. Une autre conséquence de l'hypothèse (9) est l'apparition éventuelle de solutions à croissance polynomiale, construites en microlocalisant la donnée de Cauchy près des modes hyperradiants.

Théorème 3.2. *Pour tout $\kappa \in \sigma_{ss}$, $l < m(\kappa)$, il existe $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ tels que pour tout x :*

$$u(t,x) = t^{m(\kappa)-l-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa t} f^+_{\mathrm{out}}(\kappa;x) + \mathrm{o}\big(t^{m(\kappa)-l-1}\big), \quad t\to+\infty,$$
$$u(t,x) = \mathrm{o}\big(t^{m(\kappa)-l-1}\big), \quad t\to-\infty.$$

En écartant l'espace de dimension finie des solutions croissantes associées aux valeurs propres et aux modes hyperradiants, on définit les opérateurs d'onde.

Théorème 3.3. *Il existe un sous-espace X_{scatt} de X, de codimension finie, tel que pour tout $(u_0,u_1)\in X_{\mathrm{scatt}}$ il existe, de manière unique, $u^\pm_{\mathrm{in(out)}} \in H^1(\mathbb{R})$ tels que :*

$$\lim_{t\to-(+)\infty} \big\|u(t,x) - \big(\mathrm{e}^{+(-)\mathrm{i}a_- x}u^-_{\mathrm{in(out)}}\big(t-(+)x\big) + \mathrm{e}^{-(+)\mathrm{i}a_+ x}u^+_{\mathrm{in(out)}}\big(t+(-)x\big)\big)\big\|_{H^1(\mathbb{R}_x)}$$
$$+\big\|\partial_t u(t,x) - \big(\mathrm{e}^{+(-)\mathrm{i}a_- x}(u^-_{\mathrm{in(out)}})'(t-(+)x) + \mathrm{e}^{-(+)\mathrm{i}a_+ x}(u^+_{\mathrm{in(out)}})'\big(t+(-)x\big)\big)\big\|_{L^2(\mathbb{R}_x)} = 0.$$

Les opérateurs d'onde $\mathbb{W}_{\mathrm{in(out)}} : (u_0,u_1) \mapsto (u^+_{\mathrm{in(out)}}, u^-_{\mathrm{in(out)}})$, sont des injections continues de X_{scatt} sur des sous-espaces $Y_{\mathrm{in(out)}}$ de $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$.

La caractérisation de $Y_{\mathrm{in(out)}}$ et la continuité de $\mathbb{W}^{-1}_{\mathrm{in(out)}}$ sont questions délicates. Pour inverser les opérateurs d'ondes, il est naturel de supposer qu'il n'y a pas de solution évanescente.

Proposition 3.4. *Si $\sigma_p = \emptyset$, il existe un entier $N \geqslant 1$, dépendant de σ_{ss}, tel que*

$$\big[H^1_{\max(\nu,1)}(\mathbb{R}) \cap H^1_N\big(\mathbb{R}^{-(+)}\big)\big]^2 \subset Y_{\mathrm{in(out)}}.$$

Quand σ_{ss} est aussi vide, on peut prendre $N = 1$, et obtenir une description de l'opérateur de diffusion $\mathbb{S} := \mathbb{W}_{\mathrm{out}}(\mathbb{W}_{\mathrm{in}})^{-1}$. On introduit des espaces de Hilbert $K^\pm$, compris entre H^1_1 et H^1 :

$$K^\pm := \big\{u\in H^1(\mathbb{R}_x);\ \mathrm{i}u' + a_\pm u \in L^2_1(\mathbb{R}_x)\big\}, \qquad \|u\|^2_{K^\pm} := \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}_x)} + \|\mathrm{i}u' + a_\pm u\|^2_{L^2_1(\mathbb{R}_x)}.$$

Théorème 3.5. *Si $\sigma_{ss} = \sigma_p = \emptyset$, on a :*

$$H^1_1(\mathbb{R}) \times H^1_1(\mathbb{R}) \subset Y_{\mathrm{in(out)}} \subset K^+ \times K^-, \tag{16}$$

et $\mathbb{W}_{\mathrm{in(out)}}$ sont des isomorphismes définis de X sur $Y_{\mathrm{in(out)}}$ munis de la norme de $K^+\times K^-$. L'opérateur de diffusion $\mathbb{S}$ est un isomorphisme de Y_{in} sur Y_{out}. En notant $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$, on a la représentation :

$$\mathbb{S} = \mathcal{F}^{-1}\widehat{S}(\kappa)\mathcal{F}, \quad \widehat{S}(\kappa) := \begin{pmatrix} R^+(\kappa) & T^+(\kappa) \\ T^-(\kappa) & R^-(\kappa)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

La matrice de diffusion $\widehat{S}(k)$ est méromorphe sur $\omega := \{k\in\mathbb{C};\ |\Im k| < \frac{\alpha}{2}\}$ et $k\in\omega$ est un pôle de $\widehat{S}$ si et seulement si $\bar{k}$ est une résonance. La diffusion est superradiante pour les fréquences de (a_-, a_+) :

$$\kappa\in(a_-,a_+) \Longrightarrow 1 < \big|R^\pm(\kappa)\big|, \quad \big\|\widehat{S}(\kappa)\big\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)},\ \big\|\big(\widehat{S}(\kappa)\big)^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)}. \tag{18}$$

Le détail des démonstrations est à paraître dans [1], où l'on applique ces résultats à la diffusion par les trous noirs sphériques chargés dans un univers en expansion ; cela est un premier pas vers la compréhension de la superradiance des trous noirs en rotation [4,6]. Enfin nous évoquons quelques questions non résolues, concernant l'Éq. (6), pourtant bien élémentaire. (i) On montre que les inclusions (16) sont strictes quand $A(x) - a_+ = V(x) = 0$ pour $x > x_0$, ou $A(x) - a_- = V(x) = 0$ pour $x < x_0$. Une caractérisation simple de $Y_{\mathrm{in(out)}}$ en terme d'espaces de Sobolev à poids paraît difficile. (ii) Puisque les dynamiques asymptotiques sont $(\partial_t - \mathrm{i}a_\pm)^2 - \partial_x^2$ quand $x \to \pm\infty$, il est tentant d'étudier la théorie de la diffusion dans les espaces de Hilbert associés à l'énergie des solutions de ces équations. On introduit donc les espaces de Beppo Levi $BL^1_\pm(\mathbb{R})$ définis comme la fermeture de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme $\|f\|_\pm := \|\mathrm{i}f' + a_\pm f\|_{L^2}$. On montre que $\mathbb{W}_{\mathrm{in(out)}}$ admet un prolongement continu $\widetilde{\mathbb{W}}_{\mathrm{in(out)}}$ de $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{E} := BL^1_+(\mathbb{R}) \times BL^1_-(\mathbb{R})$ et que $\mathbb{S}$ se prolonge en un automorphisme $\widetilde{\mathbb{S}}$ de $\mathcal{E}$ qui vérifie

$$1 < \|\widetilde{\mathbb{S}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}, \left\|(\widetilde{\mathbb{S}})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}.$$

Toutefois, il n'est pas clair que l'image de $\widetilde{\mathbb{W}}_{\mathrm{in(out)}}$ soit $\mathcal{E}$, ni que $(\mathbb{W}_{\mathrm{in(out)}})^{-1}$ qui est défini de $Y_{\mathrm{in(out)}}$ dans X, admette un prolongement continu de $\mathcal{E}$ dans $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. (iii) Un autre problème ouvert est l'étude de la répartition des résonances, et l'établissement d'une représentation de type Lax–Phillips de la solution. (iv) Les seuls exemples connus de modes hyperradiants sont associés à des potentiels discontinus. En revanche, c'est en ayant recours à MAPLE pour maîtriser de colossales combinaisons de fonctions hypergéométriques, que l'on « montre » que σ_{ss} est vide dans le cas simple, $A(x) = \tanh(x)$, $V(x) = 0$. Il serait souhaitable pour les applications, de disposer d'un critère sur A et V, assurant l'absence de mode hyperradiant.

Références

[1] A. Bachelot, Superradiance and scattering of the charged Klein–Gordon field by a steplike electrostatic potential, J. Math. Pures Appl., à paraître.

[2] E. Bairamov, Ö. Çakar, A.M. Krall, An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities, J. Differential Equations 151 (1999) 268–289.

[3] E.B. Davies, B. Simon, Scattering theory for systems with different spatial asymptotics on the left and right, Commun. Math. Phys. 63 (1978) 277–301.

[4] D. Häfner, Sur la théorie de la diffusion pour l'équation de Klein–Gordon dans la métrique de Kerr, Dissertationes Math. 421 (2003) 102.

[5] T. Kako, Spectral and scattering theory for the J-selfadjoint operators associated with the perturbed Klein–Gordon type equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA 23 (1976) 199–221.

[6] J.-P. Nicolas, A non linear Klein–Gordon equation on Kerr metrics, J. Math. Pures Appl. 81 (9) (2002) 885–1203.

[7] R. Ruffini, The Dyadosphere of black holes and gamma-ray bursts, Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 138 (3) (1999) 513–514.

[8] S.N.M. Ruijsenaars, P.J.M. Bongaarts, Scattering theory for one-dimensional step potentials, Ann. Inst. H. Poincaré Sec. A 26 (1) (1977) 1–17.

[9] R.A. Weder, Scattering theory for the Klein–Gordon equation, Ann. Phys. 27 (1978) 100–117.