Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 457–462
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres/Analyse mathématique

Sommes elliptiques multiples d'Apostol–Dedekind–Zagier

Abdelmejid Bayad

Université d'Evry Val d'Essonne, département de mathématiques, boulevard F. Mitterrand, 91025 Evry, France

Reçu le 27 novembre 2003 ; accepté après révision le 12 juillet 2004

Disponible sur Internet le 18 septembre 2004

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous introduisons des analogues elliptiques aux sommes multiples de Dedekind–Zagier [Zagier, Math. Ann. 202 (1973) 149–172] et aux sommes d'Apostol classiques [Apostol, Duke Math. J. 17 (1950) 147–157]. Ces sommes elliptiques sont définies à partir de certaines formes de Jacobi de deux variables $D_\tau(z;\varphi)$, où τ est dans le demi-plan de Poincaré. Nous prouvons une loi de réciprocité pour ces sommes elliptiques. ***Pour citer cet article : A. Bayad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

Multiple elliptic Apostol–Dedekind–Zagier sums. Let $\tau \in \mathcal{H}$ (= upper half plane). We introduce an elliptic analogue of the classical Dedekind–Zagier multiple sums [Zagier, Math. Ann. 202 (1973) 149–172] and Apostol sums [Apostol, Duke Math. J. 17 (1950) 147–157]. These sums are defined by means of certain Jacobi modular forms of two variables $D_\tau(z;\varphi)$. We prove a reciprocity law for these elliptic sums, which gives new relations between some modular Jacobi forms of two variables. ***To cite this article: A. Bayad, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

Let $\mathcal{H}$ be the upper half plane, $\tau \in \mathcal{H}$, and let L be the complex lattice with basis $(\tau, 1)$. For $x, y \in \mathbb{C}$, let $e(x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$ and $E_L(x, y) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{\bar{x}y - \bar{y}x}{\mathrm{im}(\tau)}$. First we define our Jacobi form D_τ as follows:

$$D_\tau(z,\varphi) = e\big(E_L(z,\varphi)/2\big)\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)} \tag{1}$$

where $\mathcal{K}_L$ is the well known Klein function of L [2], satisfying:

$$\mathcal{K}_L(u+\rho) = \chi_L(\rho)e\big(E_L(\rho,u)/2\big)\mathcal{K}_L(u) \tag{2}$$

Adresse e-mail : abayad@maths.univ-evry.fr (A. Bayad).

1631-073X/$ – see front matter © 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2004.07.018

for each $\rho \in L$ with $\chi_L(\rho) = 1$ (resp. -1) if $\rho \in 2L$ (resp. $\rho \in L - 2L$). The function D_τ is no longer analytic in φ nor in τ, but we have:

(i) $\lim_{z\to 0} zD_\tau(z,\varphi) = 1$,
(ii) $D_\tau(z;\varphi+\rho) = D_\tau(z;\varphi)$, $D_\tau(z+\rho;\varphi) = e(E_L(\rho,\varphi))D_\tau(z;\varphi)$ any $\rho \in L$,
(iii) $D_\tau(z;-\varphi) = -D_\tau(-z;\varphi)$, $D_\tau(z,\varphi)D_\tau(z,-\varphi) = \wp_L(z) - \wp_L(\varphi)$, $\wp_L$ is the Weierstrass $\wp$-function associated to L,
(iv) functional equation $D_\tau(z;\varphi)e(-E_L(z,\varphi)) = D_\tau(\varphi;z)$.

The properties (i)–(iv) come from the above identity (2).

(v) Laurent expansion: $D_\tau(z;\varphi) = \sum_{i\geqslant 0} d_i(\varphi)z^{i-1}$ with $d_0(\varphi) = 1$, $d_2(\varphi) = \frac{1}{2}d_1(\varphi)^2 - \frac{1}{2}\wp_L(\varphi)$,

$$d_k(-\varphi) = (-1)^k d_k(\varphi), \quad \forall k \geqslant 0, \quad d_{2n}(\varphi) = \frac{(2n-1)}{2}G_{2n}(L) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^i d_i(\varphi)d_{2n-i}(\varphi), \quad \forall n \geqslant 2.$$

This comes from (iii).

Proposition 0.1. *We put $G_0 = -1$, $G_2 = -\wp_L(\varphi)$. Let $O_L = \{x \in L \mid xL \in L\}$ be the order associated to L. Then for any $n \in \mathbb{N}$ and $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in $O_L\backslash O_L^\times$ we have*

$$a_0a_1\cdots a_n \prod_{k=0}^{n} zD_\tau(a_kz;\varphi) = \sum_{k\geqslant 0} M_k(a_0,\ldots,a_n;\varphi,\tau)z^k,$$

where the coefficients $M_k(a_0,\ldots,a_n;\varphi,\tau)$ satisfy

$$M_k(a_0,\ldots,a_n;\varphi,\tau) = \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_n=k\\ 0\leqslant i_0,\ldots,i_n\leqslant k}} a_0^{i_0}\cdots a_n^{i_n} d_{i_0}(\varphi)\cdots d_{i_n}(\varphi);$$

$$M_k(a_0,\ldots,a_n;-\varphi,\tau) = (-1)^k M_k(a_0,\ldots,a_n;\varphi,\tau);$$

$$\begin{aligned} M_{2k}(a_0,\ldots,a_n;\varphi,\tau) = {} & \frac{1}{2}\sum_{\substack{i_0+\cdots+i_n=k\\ 0\leqslant i_0,\ldots,i_n\leqslant k}} (2i_0-1)\cdots(2i_n-1)G_{2i_0}\cdots G_{2i_n}a_0^{2i_0}\cdots a_n^{2i_n} \\ & - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k-1}(-1)^j M_j(a_0,\ldots,a_n;\varphi,\tau)M_{2k-j}(a_0,\ldots,a_n;\varphi,\tau). \end{aligned}$$

Now we state our main result.

Definition 0.2. Given $p, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ coprime elements of $O_L\backslash O_L^\times$, we define the multiple elliptic Apostol–Dedekind–Zagier sums (parametrized by φ) associated to $p; a_1, \ldots, a_n$ in $O_L\backslash O_L^\times$, by

$$S_k(p;a_1,\ldots,a_n;m,\varphi,\tau) = \frac{1}{p}\sum_{w\in L/pL\backslash\{0\}} e\big(E_L(w,\varphi)\big)\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left\{D_\tau\left(z+\frac{w}{p};\varphi\right)^m\right\}_{|z=0}\prod_{j=1}^{n}D_\tau\left(a_j\frac{w}{p};\varphi\right).$$

Theorem 0.3 (Reciprocity Law). *Let $d \in O_L\backslash O_L^\times$ and $m \in \mathbb{N}$ such that $a_0+\cdots+a_n+m \equiv 0 \pmod{dO_L}$. Then for any φ parameterizing d-division point different from zero in $\mathbb{C}/L$ and for all $k \in \mathbb{N}$, we have*

$$\textit{If } m=0\text{: } -\sum_{l=0}^{n} S_k(a_l; a_0,\dots,\check{a}_l,\dots,a_n; m,\varphi,\tau) = \begin{cases} 0 & \textit{if } k \geqslant 1, \\ \dfrac{M_n(a_0,\dots,a_n;\varphi,\tau)}{a_0a_1\cdots a_n} & \textit{if } k=0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\textit{If } m \geqslant 1\text{: } \sum_{l=0}^{n} S_k(a_l; a_0,\dots,\check{a}_l,\dots,a_n; m,\varphi,\tau) = \sum_{l=0}^{n} C_{k+l}^{l} \frac{M_{n-l}(a_0,\dots,a_n;\varphi,\tau)}{a_0a_1\cdots a_n} M_{m+k+l}(\overbrace{1,\dots,1}^{m \text{ times}};\varphi,\tau)$$
$$+ \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^k C_{k+l}^{l} M_{m-l-1}(\overbrace{1,\dots,1}^{m \text{ times}};\varphi,\tau) \frac{M_{n+k+l+1}(a_0,\dots,a_n;\varphi,\tau)}{a_0a_1\cdots a_n}. \tag{4}$$

Remark 1. The identity (3) is an elliptic analogue to Dedekind–Zagier result [4]; the identity (4) is an elliptic analogue to Apostol result [1].

1. Formes de Jacobi $D_\tau(z;\varphi)$

Soient $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur et $\tau \in \mathcal{H}$. On considère alors le réseau complexe $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. On définit alors la forme $\mathbb{R}$-linéaire alternée $E_L(u,v) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{\bar{u}v - \bar{v}u}{\mathrm{Im}(\tau)}$, $(u,v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Notons que les valeurs de E_L sur $L \times L$ sont entières, et que $E_L(\tau,1) = -1$. Dans toute la suite, on pose $e(x) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$, $x \in \mathbb{C}$.

La forme de Jacobi associée au réseau L, notée $D_\tau(z;\varphi)$, est définie par la fonction de Klein $\mathcal{K}_L(z)$

$$D_\tau(z;\varphi) = e\big(E_L(z,\varphi)/2\big) \frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}\,; \quad \mathcal{K}_L(z) = z\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}zz^*} \prod_{\ell \in L,\ \ell \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{\ell} + \frac{1}{2}(\frac{z}{\ell})^2},$$

où, écrivant $z = z_1\tau + z_2$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, on note $z^* = z_1\eta_1 + z_2\eta_2$ et $\eta_1 = \eta(\tau, L)$ et $\eta_2 = \eta(1, L)$ les périodes de « deuxième espèce » associées aux périodes de « première espèce » τ et 1.

La fonction D_τ est méromorphe par rapport à la première variable, mais elle perd son analyticité vis-à-vis de la seconde variable ; en contrepartie elle vérifie plusieurs propriétés intéressantes :

(a) $\lim_{z\to 0} z D_\tau(z,\varphi) = 1$;
(b) On a $D_\tau(z;\varphi+\rho) = D_\tau(z;\varphi)$, $D_\tau(z+\rho;\varphi) = e(E_L(\rho,\varphi)) D_\tau(z;\varphi)$, $\forall \rho \in L$;
(c) Elle vérifie $D_\tau(z;\varphi) e(-E_L(z,\varphi)) = D_\tau(\varphi; z)$, $D_\tau(z;-\varphi) = -D_\tau(-z;\varphi)$;

(d) Elle admet une écriture en produit infini

$$D_\tau(z,\varphi) = 2\pi\mathrm{i} q_z^{\frac{\mathrm{im}(\varphi)}{\mathrm{im}\,\tau}} \times \frac{(q_{z+\varphi}^{\frac{1}{2}} - q_{z+\varphi}^{-\frac{1}{2}})}{(q_z^{\frac{1}{2}} - q_z^{-\frac{1}{2}})(q_\varphi^{\frac{1}{2}} - q_\varphi^{-\frac{1}{2}})} \prod_{n \geqslant 1} \frac{(1-q_\tau^n)^2 (1-q_\tau^n q_{z+\varphi})(1-q_\tau^n q_{z+\varphi}^{-1})}{(1-q_\tau^n q_z)(1-q_\tau^n q_z^{-1})(1-q_\tau^n q_\varphi)(1-q_\tau^n q_\varphi^{-1})}\,;$$

(e) Elle est liée à la fonction $\wp_L(z)$ de Weierstrass : $D_\tau(z,\varphi) D_\tau(z,-\varphi) = \wp_L(z) - \wp_L(\varphi)$, où

$$\wp_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geqslant 1} (2n+1) G_{2n+2}(L) z^{2n} \quad \text{et} \quad G_{2n}(L) = \sum_{\gamma \in L \setminus \{o\}} \frac{1}{\gamma^{2n}}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Ces propriétés sont démontrées dans [2,3].

(f) Elle admet le développement de Laurent suivant : $D_\tau(z;\varphi) = \sum_{i \geqslant 0} d_i(\varphi) z^{i-1}$ avec $d_0(\varphi) = 1$, $d_2(\varphi) = \frac{1}{2} d_1(\varphi)^2 - \frac{1}{2}\wp_L(\varphi)$, $d_k(-\varphi) = (-1)^k d_k(\varphi)$, $\forall k \geqslant 0$, $d_{2n}(\varphi) = \frac{(2n-1)}{2} G_{2n}(L) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i d_i(\varphi) d_{2n-i}(\varphi)$, $\forall n \geqslant 2$. Ceci provient de (a) et (e).

On a de plus

Proposition 1.1. *On convient que* $G_0 = -1$, $G_2 = -\wp_L(\varphi)$. *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* :

$$a_0 a_1 \cdots a_n \prod_{k=0}^{n} z D_\tau(a_k z; \varphi) = \sum_{k \geqslant 0} M_k(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau) z^k,$$

où les coefficients vérifient les relations :

$$M_k(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau) = \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_n=k \\ 0 \leqslant i_0, \ldots, i_n \leqslant k}} a_0^{i_0} \cdots a_n^{i_n} d_{i_0}(\varphi) \cdots d_{i_n}(\varphi)\ ; \tag{5}$$

$$M_k(a_0, \ldots, a_n; -\varphi, \tau) = (-1)^k M_k(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)\ ;$$

$$M_{2k}(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_0+\cdots+i_n=k \\ 0 \leqslant i_0, \ldots, i_n \leqslant k}} (2i_0 - 1) \cdots (2i_n - 1) G_{2i_0} \cdots G_{2i_n} a_0^{2i_0} \cdots a_n^{2i_n} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2k-1} (-1)^j M_j(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau) M_{2k-j}(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau). \tag{6}$$

Démonstration. Pour prouver (5), on forme le produit des développements de Laurent des $D_\tau(a_i z, \varphi)$, $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$a_0 a_1 \cdots a_n \prod_{k=0}^{n} z D_\tau(a_k z; \varphi) = \prod_{k=0}^{n} (a_i z) D_\tau(a_k z; \varphi) = \left(\sum_{k_0 \geqslant 0} d_{k_0}(\varphi) a_0^{k_0} z^{k_0} \right) \cdots \left(\sum_{k_n \geqslant 0} d_{k_n}(\varphi) a_n^{k_n} z^{k_n} \right)$$

et de même pour $a_0 a_1 \cdots a_n \prod_{k=0}^{n} z D_\tau(a_k z; -\varphi)$. Pour conclure, on utilise le fait que $D_L(z; -\varphi) = -D_L(-z; \varphi)$.

L'Éq. (6) s'obtient en identifiant les coeffficients des séries de Laurent des deux fonctions suivantes :

$$\prod_{k=0}^{n} a_k z D_\tau(a_k z; \varphi) \times \prod_{k=0}^{n} a_k z D_\tau(a_k z; -\varphi), \prod_{k=0}^{n} (a_k z)^2 \big(\wp_L(a_k z) - \wp_L(\varphi)\big).$$

2. Sommes elliptiques multiples de Dedekind à paramètre

Dans les Sections 2 et 3, on se donne $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ éléments non nuls de $O_L \backslash O_L^\times$ et deux à deux premiers entre eux. Pour tout p élément non nul de $O_L \backslash O_L^\times$ et tout entier naturel m, on définit la somme elliptique de Dedekind $d(p; a_1, \ldots, a_n; m, \varphi, z, \tau)$ paramétrée par les complexes φ, z :

$$d(p; a_1, \ldots, a_n; m, \varphi, z, \tau) = \frac{1}{p} \sum_{w \in L/pL \backslash \{0\}} e\big(E_L(w, \varphi)\big) D_\tau\left(z + \frac{w}{p}; \varphi\right)^m \prod_{k=1}^{n} D_\tau\left(a_k \frac{w}{p}; \varphi\right).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1 (Loi de réciprocité). *Soit* $d \in O_L \backslash O_L^\times$ *non nul tels que* $a_0 + \cdots + a_n + m \equiv 0 \pmod{d O_L}$. *Alors, pour tout* φ *paramètre d'un point de* d*-division non nul de* $\mathbb{C}/L$,

$$\text{Si } m = 0, \text{ on a : } \quad \sum_{k=0}^{n} d(a_k; a_0, \ldots, \check{a}_k, \ldots, a_n; 0, \varphi, z, \tau) = -\frac{M_n(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n}. \tag{7}$$

Si $1 \leqslant m \leqslant d$ *et* z *est tel que* $a_0 \cdots a_n z \notin L$, *on a* :

$$-\sum_{k=0}^{n} d(a_k; a_0, \ldots, \check{a}_k, \ldots, a_n; m, \varphi, z, \tau) = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left\{ \prod_{i=0}^{n} D_\tau(a_i x, \varphi) \right\}_{|x=-z} M_{m-l-1}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{m \text{ fois}}; \varphi, \tau)$$
$$+ \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left\{ D_\tau(x; \varphi)^m \right\}_{|x=z} \frac{M_{n-l}(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n}. \tag{8}$$

Démonstration. Prouvons (7) de ce théorème. On considère la fonction auxiliaire suivante : $x \to F(x, \varphi) = \prod_{k=0}^{n} D_\tau(a_k x; \varphi)$. Comme $a_0 + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod{d O_L}$, la fonction F est elliptique pour L et admet, modulo L, les pôles suivants : $\frac{\omega}{a_k}$, $0 \leqslant k \leqslant$ et $\omega \in L$. Ils sont tous simples sauf $x = 0$ qui est d'ordre $n+1$. En appliquant le théorème des résidus à la fonction $x \to\ F(x, \varphi)$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_k} \sum_{w \in L/a_k L \setminus \{0\}} e\big(E_L(w, \varphi)\big) \prod_{0 \leqslant j \neq k \leqslant n} D_\tau\left(a_j \frac{w}{a_k}; \varphi\right) + \operatorname{Res}\big(F(x; \varphi)\big)_{|x=0} = 0.$$

Reste à calculer $\operatorname{Res}(F(x, \varphi))_{|x=0}$. De la Proposition 1.1, on a $F(x, \varphi) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{M_j(a_0, \cdots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 \cdots a_n} x^{j-n-1}$. Donc, $\operatorname{Res}(F(x; \varphi))_{|x=0} = \frac{1}{a_0 \cdots a_n} M_n(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)$ et (7) est ainsi prouvé. La démonstration de (8) se fait de la même manière. En effet, pour $m \geqslant 1$, on considère la fonction :

$$x \to F_m(x, \varphi, z) = D_\tau(x+z; \varphi)^m \prod_{k=0}^{n} D_\tau(a_k x; \varphi).$$

Comme $a_0 + \cdots + a_n + m \equiv 0 \pmod{d O_L}$, on déduit que cette fonction est elliptique pour L. Ses pôles, modulo L, sont : $\frac{\omega}{a_k}, 0 \leqslant k \leqslant$ avec $\omega \in L$ et $-z$. Ils sont tous simples sauf $x = 0$ qui est d'ordre $n+1$ et $x = -z$ est d'ordre m. On applique à nouveau le théorème des résidus à la fonction $x \to F_m(x, \varphi, z)$, et l'on obtient $\sum_{k=0}^{n} d(a_k; a_0, \ldots, \check{a}_k, \ldots, a_n; m, \varphi, z, \tau) + \operatorname{Res}(F_m(x; \varphi, z))_{|x=0} + \operatorname{Res}(F_m(x; \varphi, z))_{|x=-z} = 0$. Il reste à calculer $\operatorname{Res}(F_m(x, \varphi, z))_{|x=0}$ et $\operatorname{Res}(F_m(x, \varphi, z))_{|x=-z}$. En développant la fonction : $x \to D_\tau(z+x; \varphi)^m$ au voisinage de $x = 0$ (resp. les fonctions $x \to D_\tau(z+x; \varphi)^m$ et $x \to \prod_{k=0}^{n} D_\tau(a_k x; \varphi)$ au voisinage de $x = -z$), on obtient : $D_\tau(z+x; \varphi)^m = \sum_{l \geqslant 0} \frac{1}{l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \{D_\tau(z+x; \varphi)^m\}_{|x=0} x^l = \sum_{l \geqslant 0} \frac{1}{l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \{D_\tau(x; \varphi)^m\}_{|x=z} x^l$. Donc, $\operatorname{Res}(F_m(x; \varphi, z))_{|x=0} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \{D_\tau(x; \varphi)^m\}_{|x=z} \frac{M_{n-l}(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n}$. De même on a : $D_\tau(z+x; \varphi)^m = \sum_{j \geqslant 0} M_j(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)(x+z)^{j-m}$ et $\prod_{k=0}^{n} D_\tau(a_k x; \varphi) = \sum_{l \geqslant 0} \frac{1}{l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \{\prod_{i=0}^{n} D_\tau(a_i x, \varphi)\}_{|x=-z} (x+z)^l$. On conclut que : $\operatorname{Res}(F_m(x, \varphi, z))_{|x=-z} = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \{\prod_{i=0}^{n} D_\tau(a_i x; \varphi)\}_{|x=-z} M_{m-l-1}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{m \text{ fois}}; \varphi, \tau)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. Sommes elliptiques d'Apostol–Dedekind–Zagier

Dans cette section nous définissons les sommes elliptiques multiples d'Apostol–Dedekind–Zagier, puis nous prouvons qu'elles satisfont une loi de réciprocité à la Dedekind.

Définition 3.1. Soit $p \in O_L \setminus O_L^\times$ et non nul. On définit la somme elliptique multiple d'Apostol–Dedekind–Zagier (paramétrée par φ) associée aux entiers $p; a_1, \ldots, a_n$ non nuls de $O_L \setminus O_L^\times$, par

$$S_k(p; a_1, \ldots, a_n; m, \varphi, \tau) = \frac{1}{p} \sum_{w \in L/pL \setminus \{0\}} e\big(E_L(w, \varphi)\big) \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \left\{ D_\tau\left(z + \frac{w}{p}; \varphi\right)^m \right\}_{|z=0} \prod_{j=1}^{n} D_\tau\left(a_j \frac{w}{p}; \varphi\right).$$

Théorème 3.2 (Loi de réciprocité). *Soient $d \in O_L \backslash O_L^{\times}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $a_0 + \cdots + a_n + m \equiv 0 \pmod{d O_L}$. Alors, pour tout φ paramètre de point de d-division non nul de $\mathbb{C}/L$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\textit{Si } m = 0 : \quad -\sum_{l=0}^{n} S_k(a_l; a_0, \ldots, \check{a}_l, \ldots, a_n; m, \varphi, \tau) = \begin{cases} 0 & \textit{si } k \geqslant 1, \\ \dfrac{M_n(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n} & \textit{si } k = 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\textit{Si } m \geqslant 1 : \quad -\sum_{l=0}^{n} S_k(a_l; a_0, \ldots, \check{a}_l, \ldots, a_n; m, \varphi, \tau) \tag{10}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_{k+l}^{l} \frac{M_{n-l}(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n} M_{m+k+l}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{m \text{ fois}}; \varphi, \tau)$$

$$+ \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^k C_{k+l}^{l} M_{m-l-1}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{m \text{ fois}}; \varphi, \tau) \frac{M_{n+k+l+1}(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n}. \tag{11}$$

Démonstration. La formule (9) résulte de la formule (7) du Théorème 2.1. Prouvons la formule (10) : il s'agit d'évaluer le résidu en $x = 0$ de la fonction produit : $G(x, \varphi) F(x, \varphi)$, avec $G(x, \varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \{D_\tau(x; \varphi)^m\}$ et $F(x, \varphi) = \prod_{k=0}^{n} D_\tau(a_k x; \varphi)$, sachant que l'une admet en $x = 0$ un pôle d'ordre $-(m + k)$ et l'autre un pôle d'ordre $-(n + 1)$. Mais le développement en série de x de chacune de ces deux fonctions résulte des notations introduites dans la Proposition 1.1 : pour $G(x, \varphi)$ on a

$$G(x, \varphi) = (-1)^k \sum_{l=0}^{m-1} C_{k+l}^{l} g_{m-l-1} x^{-(k+l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l}^{l} g_{m+k+l} x^l \text{ avec } g_r := M_r(\overbrace{1, \ldots, 1}^{m \text{ fois}}; \varphi, \tau),$$

tout entier $r \in \mathbb{N}$; tandis que pour $F(x, \varphi)$, on a $F(x, \varphi) = \sum_{l=0}^{n} f_{n-l} x^{-(l+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} f_{n+l+1} x^l$ avec $f_s := \frac{M_s(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n}$, tout entier $s \in \mathbb{N}$. Le coefficient de x^{-1} dans le produit de ces deux séries de Taylor en x est donc (lorsque $m \geqslant 1$) :

$$(-1)^k \sum_{l=0}^{m-1} C_{k+l}^{l} g_{m-l-1} f_{n+k+l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l}^{l} f_{n-l} g_{m+k+l},$$

comme annoncé par la formule (10).

Références

[1] T.M. Apostol, Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, Duke Math. J. 17 (1950) 147–157.
[2] A. Bayad, G. Robert, Note sur une forme de Jacobi méromorphe, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 325 (1997) 455–460.
[3] A. Bayad, Sommes de Dedekind elliptiques et formes de Jacobi, Ann. Inst. Fourier 51 (1) (2001) 29–42.
[4] D. Zagier, Higher order Dedekind sums, Math. Ann. 202 (1973) 149–172.