Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 467–472
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Note sur les formules de saut de Guillemin–Kalkman

Paul-Émile Paradan

UMR 5582, institut Fourier, B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex, France

Reçu le 28 juin 2004 ; accepté le 12 juillet 2004

Disponible sur Internet le 25 septembre 2004

Présenté par Michèle Vergne

Résumé

Le but de cette Note est de donner une formule de saut en cohomologie équivariante qui entraîne les formules de saut de Guillemin–Kalkman (J. Reine Agnew. Math. 470 (1996) 123–142). ***Pour citer cet article : P.-É. Paradan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abstract

A Note on the formulas of Guillemin–Kalkman. The purpose of this Note is to give a jump formula in equivariant cohomology implying the jump formulas of Guillemin–Kalkman. ***To cite this article: P.-É. Paradan, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004).***

Abridged English version

Let (M, Ω) be a symplectic manifold equipped with a Hamiltonian action of a torus T, with Lie algebra $\mathfrak{t}$. We denote by $\Phi : M \to \mathfrak{t}^*$ the moment map of this action. Let us assume that Φ is *proper*, and that the T-action on M is *effective*. For every regular value ξ of Φ, we consider the reduction $\mathcal{M}_\xi := \Phi^{-1}(\xi)/T$ which is a compact symplectic orbifold. Let $\mathcal{H}_T^*(M)$ be the T-equivariant cohomology of M. Associated to the data (M, T, Φ) we have, for every regular value ξ of Φ, the Kirwan morphism $\mathbf{Kir}_{M,\xi} : \mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$ [4]. We are interested here in $\mathrm{I}(M, \eta, \xi) := \frac{1}{|S_\xi|} \int_{\mathcal{M}_\xi} \mathbf{Kir}_{M,\xi}(\eta)$, $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$, where $|S_\xi|$ is the cardinal of the generic stabilizer of T on $\Phi^{-1}(\xi)$.

We introduce for every $\xi \in \mathfrak{t}^*$ an equivariant cohomology class with compact support $\mathrm{P}_\xi \in \mathcal{H}_{T,c}^{-\infty}(M)$, and show that $\mathrm{I}(M, \eta, \xi)$ is computed by means of P_ξ. If ξ is a regular value of Φ, the integral $\int_M \mathrm{P}_\xi \eta$ is a generalized function

Adresse e-mail : Paul-Emile.Paradan@ujf-grenoble.fr (P.-É. Paradan).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.07.020

on $\mathfrak{t}$ supported at 0. The quantity $\mathrm{I}(M,\eta,\xi)$ is equal to the value of $\int_M \mathrm{P}_\xi \eta$ against $(-2i\pi)^{-\dim T}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{vol}(T,\mathrm{d}X)}$. The study of the map $\xi \mapsto \mathrm{P}_\xi$ gives a new way to recover two properties of the map $\xi \to \mathrm{I}(M,\eta,\xi)$. First we show that $\xi \mapsto \mathrm{P}_\xi$ is locally constant on the open subset of regular values of Φ, so $\xi \to \mathrm{I}(M,\eta,\xi)$ is also locally constant. After we obtain a formula for $\mathrm{P}_{\xi^+} - \mathrm{P}_{\xi^-}$ when $\xi^\pm$ belong respectively to two connected components of regular values of Φ separated by an hyperplane of $\mathfrak{t}^*$. By this way we recover the formulas of Guillemin–Kalkman [2]. Let us write down these formulas.

Let Δ be an hyperplane of $\mathfrak{t}^*$, equipped with an orientation o, and which separates two connected components of regular values of Φ. Let $T_\Delta \subset T$ be the subtorus of dimension 1, with Lie algebra $\mathfrak{t}_\Delta := \{X \in \mathfrak{t} \mid \langle \xi - \xi', X\rangle = 0,\ \forall \xi, \xi' \in \Delta\}$. We make the choice of a decomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$, where T/T_Δ denotes a subtorus of T. Let M^{T_Δ} be the submanifold of points fixed by T_Δ, and let M_Δ be the open subset of $M^{T_\Delta} \cap \Phi^{-1}(\Delta)$ on which T/T_Δ acts locally freely. The symplectic manifold M_Δ carries a Hamiltonian action of T/T_Δ with moment map $\Phi_\Delta : M_\Delta \to \Delta$ equal to the restriction of Φ on M_Δ.

Let $\xi \in \Delta$ be a regular value of Φ_Δ and let $\mathrm{P}^\Delta_\xi \in \mathcal{H}^{-\infty}_{T/T_\Delta,c}(M_\Delta)$ be the associated cohomology class. Let $\xi^\pm \in \mathfrak{t}^*$ be two regular values of Φ belonging respectively to two connected components of regular values of Φ separated by Δ, with the condition that the line (ξ^+,ξ^-) intersects Δ at ξ and $\xi^- - \xi^+$ is compatible with the orientation o. We prove in this Note that

$$\mathrm{P}_{\xi^+} - \mathrm{P}_{\xi^-} = (i_\Delta)_*\big(\mathrm{P}^\Delta_\xi \delta^o_\Delta\big) \quad \text{in } \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M). \tag{1}$$

Here $(i_\Delta)_* : \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M_\Delta) \to \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$ is the direct image map, and $\delta^o_\Delta \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}})$ where $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$ is the sub-algebra of $\mathcal{H}^*(M_\Delta)$ formed by the T-basic elements. With the help of δ^o_Δ one defines a *residue map* $\mathrm{Res}^o_\Delta : \mathcal{H}^*_T(M) \to \mathcal{H}^*_{T/T_\Delta}(M_\Delta)$, and from (1) we get the formulas of Guillemin–Kalkman

$$\mathrm{I}(M,\eta,\xi^+) - \mathrm{I}(M,\eta,\xi^-) = \mathrm{I}\big(M_\Delta, \mathrm{Res}^o_\Delta(\eta), \xi\big), \tag{2}$$

for every $\eta \in \mathcal{H}^*_T(M)$. The class δ^o_Δ and the map Res^o_Δ are defined in Section 2.

1. Introduction

Soit (M,Ω) une variété symplectique munie de l'action hamiltonienne d'un tore T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. L'application moment $\Phi : M \to \mathfrak{t}^*$ satisfait les relations $d\langle \Phi, X\rangle + \Omega(X_M, -) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{t}$. On suppose dans cette note que Φ est *propre*, et que l'action de T sur M est *effective*. Pour toute valeur régulière ξ de Φ, on considère la réduction symplectique $\mathcal{M}_\xi := \Phi^{-1}(\xi)/T$ qui est une V-variété différentiable compacte. Soit $\mathcal{H}^*_T(M)$ la cohomologie T-équivariante de M. Sur la variété hamiltonienne (M,T,Φ) nous avons le morphisme de Kirwan $\mathbf{Kir}_{M,\xi} : \mathcal{H}^*_T(M) \to \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$, défini pour toute valeur régulière ξ de Φ, comme le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}^*_T(M) \to \mathcal{H}^*_T(\Phi^{-1}(\xi))$ avec l'isomorphisme de Chern–Weil $\mathcal{H}^*_T(\Phi^{-1}(\xi)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$. Nous nous intéressons ici à $\mathrm{I}(M,\eta,\xi) := \frac{1}{|S_\xi|}\int_{\mathcal{M}_\xi} \mathbf{Kir}_{M,\xi}(\eta)$, $\eta \in \mathcal{H}^*_T(M)$, où $|S_\xi|$ est le cardinal du stabilisateur générique de T sur $\Phi^{-1}(\xi)$.

On introduit à la Section 2 une classe $\mathrm{P}_\xi \in \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$ pour tout $\xi \in \mathfrak{t}^*$, et on montre que $\mathrm{I}(M,\eta,\xi)$ se calcule au moyen de P_ξ. L'étude de l'application $\xi \mapsto \mathrm{P}_\xi$ entreprise à la Section 3 permet de redémontrer deux propriétés de $\xi \mapsto \mathrm{I}(M,\eta,\xi)$. On montre tout d'abord que $\xi \mapsto \mathrm{P}_\xi$ est localement constante sur l'ouvert des valeurs régulières de Φ. On obtient ensuite des *formules de saut* pour les classes P_ξ qui induisent celles pour $\mathrm{I}(M,\eta,\xi)$ obtenues par Guillemin–Kalkman [2]. Ces formules s'énoncent ainsi.

Soit Δ un hyperplan de $\mathfrak{t}^*$, muni d'une orientation o, séparant deux composantes connexes de l'ouvert des points réguliers de Φ. Soit $T_\Delta \subset T$ le sous-tore de dimension 1, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_\Delta := \{X \in \mathfrak{t} \mid \langle \xi - \xi', X\rangle = 0$, $\forall \xi, \xi' \in \Delta\}$. Nous faisons le choix d'une décomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$, où T/T_Δ désigne un sous-tore de T. Considérons la sous-variété M^{T_Δ} des points fixés par T_Δ, et l'ouvert T-invariant M_Δ de $\Phi^{-1}(\Delta) \cap M^{T_\Delta}$ sur lequel

T/T_Δ agit localement librement. La variété symplectique M_Δ est munie de l'action hamiltonienne de T/T_Δ et a pour application moment la restriction de Φ à M_Δ, que l'on note $\Phi_\Delta : M_\Delta \to \Delta$.

Considérons une valeur régulière $\xi \in \Delta$ de Φ_Δ et la classe de cohomologie équivariante associée $\mathrm{P}_\xi^\Delta \in \mathcal{H}^{-\infty}_{T/T_\Delta,c}(M_\Delta)$. Soient $\xi^\pm \in \mathfrak{t}^*$ deux valeurs régulières de Φ appartenant à deux composantes connexes de valeurs régulières de Φ séparées par Δ : on suppose que le segment (ξ^+,ξ^-) intersecte Δ en ξ et que $\xi^- - \xi^+$ est compatible avec l'orientation o. On montre à la Proposition 3.3 que

$$\mathrm{P}_{\xi^+} - \mathrm{P}_{\xi^-} = (i_\Delta)_*\big(\mathrm{P}_\xi^\Delta \delta_\Delta^o\big) \quad \text{dans } \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M). \tag{3}$$

Ici $(i_\Delta)_* : \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M_\Delta) \to \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$ est le morphisme image directe associé à l'inclusion $i_\Delta : M_\Delta \hookrightarrow M$, et δ_Δ^o est une fonction généralisée sur $\mathfrak{t}_\Delta$ à valeurs dans la sous-algèbre $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$ de $\mathcal{H}^*(M_\Delta)$ formée des éléments T-basiques. On définit au moyen de δ_Δ^o on définit une *application résidu* $\mathrm{Res}_\Delta^o : \mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{H}^*_{T/T_\Delta}(M_\Delta)$, et on déduit de (3) les formules de sauts de Guillemin–Kalkman

$$\mathrm{I}(M,\eta,\xi^+) - \mathrm{I}(M,\eta,\xi^-) = \mathrm{I}\big(M_\Delta, \mathrm{Res}_\Delta^o(\eta), \xi\big), \tag{4}$$

pour tout $\eta \in \mathcal{H}_T^*(M)$. La fonction δ_Δ^o et l'application Res_Δ^o sont définis à la prochaine section.

2. Cohomologie équivariante : localisation et définition de l'application Res_Δ^o

Rappelons le modèle de Cartan de la cohomologie équivariante à coefficients polynomiaux, et l'extension aux coefficients généralisés définie par Kumar–Vergne [5]. Nous donnons ensuite un bref aperçu de la méthode de localisation développée dans [6,7], et donnons la définition de l'application Res_Δ^o.

Soit K un groupe de Lie compact connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, agissant de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété différentiable M. On note $\mathcal{A}(M)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ et d la dérivation de de Rham. On note $c(V) : \mathcal{A}(M) \to \mathcal{A}(M)$ la contraction par un champ de vecteurs V. L'action de K sur M détermine un morphisme $X \to X_M$ de $\mathfrak{k}$ dans l'algèbre des champs de vecteurs de M.

On considère l'espace des applications K-équivariantes $\mathfrak{k} \to \mathcal{A}(M)$, $X \mapsto \eta(X)$, muni de la dérivation $(D\eta)(X) := (d - c(X_M))(\eta(X))$, $X \in \mathfrak{k}$. Comme $D^2 = 0$, on peut considérer l'espace de cohomologie $\mathrm{Ker} D/\mathrm{Im} D$. Le modèle de Cartan [1,3] considère des applications *polynomiales*, et l'espace de cohomologie associé est noté $\mathcal{H}_K^*(M)$. Kumar et Vergne [5] ont étudié les espaces de cohomologie $\mathcal{H}_K^{\pm\infty}(M)$ obtenus en considérant des applications $X \mapsto \eta(X)$ qui sont $\mathcal{C}^{\pm\infty}$. Rappelons la construction de $\mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$.

Soit $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{k}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$. C'est, par définition, l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues de l'espace des densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact de $\mathfrak{k}$ dans $\mathcal{A}(M)$. L'image de la densité $\phi(X)\,\mathrm{d}X$ par $\eta \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ est une forme différentielle sur M notée $\int_{\mathfrak{k}} \eta(X)\phi(X)\,\mathrm{d}X$. La différentielle D définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$ se prolonge à $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))$, et on montre que $D^2 = 0$ sur le sous-espace $\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(M))^K$ des éléments K-invariants [5]. L'espace de cohomologie associé est la cohomologie K-équivariante à coefficients généralisés de M, que l'on note $\mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$. Si nous considérons des formes équivariantes à valeurs dans l'espace $\mathcal{A}_c(M)$ des formes différentielles à support compact on obtient l'espace de cohomologie $\mathcal{H}^{-\infty}_{K,c}(M)$. Dans cette note, on note $\mathrm{vol}(K, \mathrm{d}X)$ le volume du groupe K pour la mesure de Haar compatible avec $\mathrm{d}X$.

Procédé de localisation. On suppose désormais que M est munie d'une 1-forme λ K-invariante. On note $\Phi_\lambda : M \to \mathfrak{k}^*$ l'application équivariante définie par $\langle \Phi_\lambda(m), X\rangle = \lambda(X_M)_m$: on a donc $D\lambda(X) = d\lambda - \langle \Phi_\lambda, X\rangle$. Le procédé de localisation développé en [6,7] repose sur l'existence d'un inverse $[D\lambda]^{-1}$ de la forme K-équivariante $D\lambda$: c'est une forme K-équivariante fermée à coefficients généralisés définie sur l'ouvert $M - \Phi_\lambda^{-1}(0)$. Un ouvert K-invariant $\mathcal{U}$ est dit *adapté à* λ si $(\partial\mathcal{U}) \cap \Phi_\lambda^{-1}(0) = \emptyset$. Dans [7], on associe à tout ouvert $\mathcal{U}$ adapté à λ, la forme K-équivariante fermée à coefficients généralisés

$$\mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}} = \chi^{\mathcal{U}} + d\chi^{\mathcal{U}}[D\lambda]^{-1}\lambda. \tag{5}$$

Ici $\chi^{\mathcal{U}} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ désigne une fonction K-invariante supportée par $\mathcal{U}$ qui est égale à 1 au voisinage de $\mathcal{U} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0)$. La classe définie par $\mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}}$ dans $\mathcal{H}_K^{-\infty}(M)$ ne dépend pas du choix de $\chi^{\mathcal{U}}$. Si $\mathcal{U} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0)$ est compact, on considère une fonction $\chi^{\mathcal{U}}$ à support compact : ainsi $\mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}}$ définit une classe dans $\mathcal{H}_{K,c}^{-\infty}(M)$. La correspondance $\mathcal{U} \to \mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}}$ est *additive* dans le sens suivant. Si $\mathcal{U}$ contient deux ouverts $\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2$ K-invariants tels que $\overline{\mathcal{U}^1} \cap \overline{\mathcal{U}^2} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0) = \emptyset$ et $(\mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2) \cap \Phi_\lambda^{-1}(0) = \mathcal{U} \cap \Phi_\lambda^{-1}(0)$, alors les $\mathcal{U}^i$ sont adaptés à λ et $\mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}} = \mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}^1} + \mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}^2}$ dans $\mathcal{H}_T^{-\infty}(M)$. Pour l'étude des classes de cohomologies définies par les $\mathrm{P}_\lambda^{\mathcal{U}}$ on a le

Lemme 2.1 [7]. *Soient λ_0, λ_1 deux 1-formes K-invariantes sur M, et $\mathcal{U}$ un ouvert K-invariant relativement compact de M. S'il existe une application continue $f : M \to \mathfrak{k}$ telle que les fonctions $\langle \Phi_{\lambda_0}, f\rangle$ et $\langle \Phi_{\lambda_1}, f\rangle$ ne s'annulent pas sur $\partial\mathcal{U}$, alors $\mathcal{U}$ est adapté à λ_0 et à λ_1, et $\mathrm{P}_{\lambda_1}^{\mathcal{U}} = \mathrm{P}_{\lambda_0}^{\mathcal{U}}$ dans $\mathcal{H}_{K,c}^{-\infty}(M)$.*

Définitions de δ_Δ^o et de l'application $\mathrm{Res}_\Delta^o : \mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$. On revient au cadre de l'introduction. La décomposition $T = T_\Delta \times T/T_\Delta$, l'action triviale de T_Δ sur M_Δ et l'action localement libre de T/T_Δ sur M_Δ induisent les isomorphismes $j_\Delta : \mathcal{H}_T^*(M_\Delta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$ et $\mathbf{cv}_\Delta : \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$. Ici $\mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta)$ désigne l'algèbre des applications polynomiales sur $\mathfrak{t}_\Delta$ et $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}^*(M_\Delta)$ formée des éléments T-basiques. On note $\mathbf{Kir}^\Delta : \mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$ le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{H}_T^*(M_\Delta)$ avec l'isomorphisme $\mathbf{cv}_\Delta \circ j_\Delta$.

Soient N_Δ le fibré normal T-équivariant de M_Δ dans M, et $\mathrm{Eul}(N_\Delta) \in \mathcal{H}_T^*(M_\Delta)$ la classe d'Euler T-equivariante de N_Δ. À travers l'isomorphisme $\mathbf{cv}_\Delta \circ j_\Delta$ on peut considérer $\mathrm{Eul}(N_\Delta)$ comme un élément de $\mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$. Suivant [6], on définit des inverses $\mathrm{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta) \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}})$ en posant $\mathrm{Eul}_\pm^{-1}(N_\Delta)(X) = \lim_{s\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{Eul}(N_\Delta)(X \pm \mathrm{i}s\beta)}$, où $\beta \in \mathfrak{t}_\Delta - \{0\}$ est compatible avec l'orientation o de Δ. Comme le polynôme $\mathrm{Eul}(N_\Delta)$ est inversible de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathfrak{t}_\Delta - \{0\}$, la différence

$$\delta_\Delta^o := \mathrm{Eul}_-^{-1}(N_\Delta) - \mathrm{Eul}_+^{-1}(N_\Delta) \tag{6}$$

est une fonction généralisée sur $\mathfrak{t}_\Delta$ qui est supportée en 0 (à valeurs dans $\mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$). Soit $r_\Delta^o : \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}} \to \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}}$ définie par $r_\Delta^o(P) = \frac{1}{-2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathfrak{t}_\Delta} \delta_\Delta^o(X) P(X) \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{vol}(T_\Delta, \mathrm{d}X)}$. L'application $\mathrm{Res}_\Delta^o : \mathcal{H}_T^*(M) \to \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta)$ est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_T^*(M) \arrow[r, "\mathbf{Kir}^\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_\Delta^o"'] & \mathcal{S}^*(\mathfrak{t}_\Delta) \otimes \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}} \arrow[d, "r_\Delta^o"] \\ \mathcal{H}_{T/T_\Delta}^*(M_\Delta) \arrow[r, "\mathbf{cv}_\Delta"'] & \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}} . \end{tikzcd} \tag{7}$$

3. Quelques propriétés de l'application $\xi \mapsto \mathrm{I}(M, \eta, \xi)$

Nous revenons au contexte d'une action hamiltonienne d'un tore T sur une variété symplectique (M, Ω). On garde les mêmes notations et hypothèses que dans l'introduction. On fixe un produit scalaire sur $\mathfrak{t}^*$ qui induit une identification $\mathfrak{t}^* \simeq \mathfrak{t}$. On fixe sur M une structure riemannienne T-invariante, notée $(-,-)_M$.

3.1. *Caractérisation de* $\mathrm{I}(M, \eta, \xi)$

Soit $\mathcal{H}$ le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction $\frac{-1}{2}\|\Phi\|^2$. Alors, pour tout $\xi \in \mathfrak{t}^*$, le champ de vecteurs hamiltonien de la fonction $\frac{-1}{2}\|\Phi - \xi\|^2$ est $\mathcal{H} - \xi_M$. Considérons la 1-forme T-invariante $\lambda_\xi = (\mathcal{H} - \xi_M, -)_M$ et l'application $\Phi_{\lambda_\xi} : M \to \mathfrak{t}^*$ associée (voir Section 2). Ici $\Phi_{\lambda_\xi}^{-1}(0)$ coïncide avec le sous-ensemble $\mathrm{Cr}(\|\Phi - \xi\|^2) \subset$

M des points critiques de la fonction $\|\Phi-\xi\|^2$, et d'autre part $m\in\mathrm{Cr}(\|\Phi-\xi\|^2)$ si et seulement si $(\Phi(m)-\xi)_M$ s'annule en m. Considérons la classe de cohomologie

$$\mathrm{P}_\xi\in\mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M) \tag{8}$$

définie par $\mathrm{P}^{\mathcal{U}}_{\lambda_\xi}$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage ouvert T-invariant relativement compact de $\Phi^{-1}(\xi)$ tel que $\overline{\mathcal{U}}\cap\mathrm{Cr}(\|\Phi-\xi\|^2)=\Phi^{-1}(\xi)$.

On rappelle maintenant le calcul de P_ξ lorsque ξ est une valeur régulière de Φ [6,7]. Soit $\omega_\xi\in\mathcal{H}^2(\mathcal{M}_\xi)\otimes\mathfrak{t}$ la courbure du T-fibré principal $\Phi^{-1}(\xi)\to\mathcal{M}_\xi$. Pour toute fonction $\psi\in\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{t})$, on désigne par $\psi(\omega_\xi)\in\mathcal{H}^*(\mathcal{M}_\xi)$ la valeur de l'opérateur différentiel $\mathrm{e}^{\omega_\xi(\frac{\partial}{\partial X}|_0)}$ contre la fonction ψ. C'est la classe caractéristique associée à ψ. D'après [7, Proposition 3.11], la fonction généralisée $\int_M\mathrm{P}_\xi\,\eta$ est supportée en 0 pour tout $\eta\in\mathcal{H}^*_T(M)$ et

$$\int_{\mathfrak{t}}\int_M \mathrm{P}_\xi(X)\eta(X)\psi(X)\,\mathrm{d}X=\frac{(-2\mathrm{i}\pi)^{\dim T}\mathrm{vol}(T,\mathrm{d}X)}{|S_\xi|}\int_{\mathcal{M}_\xi}\mathbf{Kir}_{M,\xi}(\eta)\psi(\omega_\xi). \tag{9}$$

Pour une fonction généralisée $g\in\mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t})$ supportée en 0, on définit *sa multiplicité par rapport à la masse de Dirac en* 0 comme la quantité $\int_{\mathfrak{t}}g(X)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{vol}(T,\mathrm{d}X)}\in\mathbb{C}$. Comme $\psi(\omega_\xi)=1$ si $\psi=1$, on obtient

Lemme 3.1. *Pour toute valeur régulière ξ de Φ, l'intégrale $\mathrm{I}(M,\eta,\xi)$ est égale à la multiplicité par rapport à la masse de Dirac en* 0 *de la fonction généralisée $(-2\mathrm{i}\pi)^{-\dim T}\int_M\mathrm{P}_\xi\eta$.*

On ramène ainsi l'étude de l'application $\xi\mapsto\mathrm{I}(M,\eta,\xi)$ à celle de l'application $\xi\mapsto\mathrm{P}_\xi$.

3.2. *Deux propriétés de l'application $\xi\mapsto\mathrm{P}_\xi$*

Fixons $\xi\in\mathfrak{t}^*$ et considérons l'application $f=\Phi-\xi$. Pour $\xi'\in\mathfrak{t}^*$ on a $\langle\Phi_{\lambda_{\xi'}},f\rangle=(\mathcal{H}-\xi'_M,\mathcal{H}-\xi_M)_M=\|\mathcal{H}-\xi_M\|^2+((\xi-\xi')_M,\mathcal{H}-\xi_M)_M$ ce qui donne $\langle\Phi_{\lambda_{\xi'}},f\rangle\geqslant\|\mathcal{H}-\xi_M\|(\|\mathcal{H}-\xi_M\|-\|(\xi-\xi')_M\|)$ $(*)$. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert, relativement compact et T-invariant de $\Phi^{-1}(\xi)$ tel que $\overline{\mathcal{U}}\cap\mathrm{Cr}(\|\Phi-\xi\|^2)=\Phi^{-1}(\xi)$: alors $\mathrm{P}_\xi=\mathrm{P}^{\mathcal{U}}_{\lambda_\xi}$ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$. Sur $\partial\mathcal{U}$ (une partie compacte de M), le champ de vecteurs $\mathcal{H}-\xi_M$ ne s'annulant pas, on a des encadrements de la forme $\|\mathcal{H}-\xi_M\|\geqslant c_1>0$ et $\|a_M\|\leqslant c_2\|a\|$, $\forall a\in\mathfrak{t}$. Finalement, avec $(*)$ on obtient sur $\partial\mathcal{U}$ la minoration $\langle\Phi_{\lambda_{\xi'}},f\rangle\geqslant c_1(c_1-c_2\|\xi-\xi'\|)$, et donc $\langle\Phi_{\lambda_{\xi'}},f\rangle\geqslant c_3>0$, pour ξ' suffisamment proche de ξ. Le Lemme 2.1 montre alors que $\mathcal{U}$ est adapté à $\lambda_{\xi'}$ et que

$$\mathrm{P}^{\mathcal{U}}_{\lambda_{\xi'}}=\mathrm{P}^{\mathcal{U}}_{\lambda_\xi}=\mathrm{P}_\xi\quad\text{dans } \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M) \text{ pour } \xi' \text{ suffisamment proche de } \xi. \tag{10}$$

Considérons tout d'abord le cas où ξ est une valeur régulière de Φ. Alors $\overline{\mathcal{U}}\subset M$ peut être pris dans l'ouvert des points réguliers de Φ. Ainsi pour ξ' suffisamment proche de ξ, $\mathcal{U}\cap\mathrm{Cr}(\|\Phi-\xi'\|^2)=\Phi^{-1}(\xi')$ et $\partial\mathcal{U}\cap\mathrm{Cr}(\|\Phi-\xi'\|^2)=\emptyset$, ce qui entraine $\mathrm{P}_{\xi'}=\mathrm{P}^{\mathcal{U}}_{\lambda_{\xi'}}$ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$. On a démontré le

Lemme 3.2. *Soit ξ une valeur régulière de Φ. Pour ξ' suffisamment proche de ξ on a $\mathrm{P}_{\xi'}=\mathrm{P}_\xi$ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$.*

En utilisant les Lemmes 3.1 et 3.2, on constate que $\mathrm{I}(M,\eta,\xi')=\mathrm{I}(M,\eta,\xi)$ si ξ' et ξ appartiennent à la même composante connexe de valeurs régulières de Φ.

Considérons maintenant le cas où $\xi\in\Delta$ est une valeur régulière de Φ_Δ. Ici Δ est un hyperplan séparant deux ouverts connexes de valeurs régulières de Φ, et $(M_\Delta,T/T_\Delta,\Phi_\Delta)$ est la sous-variété hamiltonienne définie dans l'introduction. On choisit le voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $\Phi^{-1}(\xi)$ de telle manière que tout $m\in\mathcal{U}$ a un stabilisateur $\mathfrak{t}_m$ soit égal à $\mathfrak{t}_\Delta$, soit réduit à $\{0\}$. On a alors $\mathcal{U}\cap\mathrm{Cr}(\|\Phi-\xi'\|^2)=\Phi^{-1}(\xi')\cup\Phi_\Delta^{-1}(\xi'_\Delta)$ pour ξ' suffisamment proche de ξ, où ξ'_Δ désigne le projeté orthogonal de ξ' sur Δ (voir la décomposition de $\mathrm{Cr}(\|\Phi-\xi'\|^2)$ obtenue dans [6, Proposition 6.8]). Soient $\xi^{\pm}$ deux valeurs régulières de Φ qui sont séparées par Δ, choisies suffisamment proches de ξ , et telles que leurs projetés orthogonaux sur Δ sont tous deux égaux à $\xi \in \Delta$. Comme $\mathcal{U} \cap \mathrm{Cr}(\|\Phi - \xi^{\pm}\|^2) = \Phi^{-1}(\xi^{\pm}) \cup \Phi_{\Delta}^{-1}(\xi)$, la *propriété d'additivité* vue à la Section 2 donne $\mathrm{P}^{\mathcal{U}}_{\lambda_{\xi^{\pm}}} = \mathrm{P}_{\xi^{\pm}} + \mathrm{P}^{\mathcal{V}}_{\lambda_{\xi^{\pm}}}$ où $\mathcal{V}$ est un ouvert adapté à $\lambda_{\xi^{\pm}}$ tel que $\mathcal{V} \cap \mathrm{Cr}(\|\Phi - \xi^{\pm}\|^2) = \Phi_{\Delta}^{-1}(\xi)$. Comme les formes $\mathrm{P}^{\mathcal{U}}_{\lambda_{\xi^{\pm}}}$ sont égales à P_{ξ} (voir (10)), on obtient $\mathrm{P}_{\xi^+} - \mathrm{P}_{\xi^-} = \mathrm{P}^{\mathcal{V}}_{\lambda_{\xi^-}} - \mathrm{P}^{\mathcal{V}}_{\lambda_{\xi^+}}$ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$.

Rappelons l'expression de $\mathrm{P}^{\mathcal{V}}_{\lambda_{\xi^{\pm}}}$ obtenue en [6]. Sur la T/T_Δ-variété hamiltonienne (M_Δ, Φ_Δ), l'élément $\xi \in \Delta$ permet de définir la classe $\mathrm{P}^{\Delta}_{\xi} \in \mathcal{H}^{-\infty}_{T/T_\Delta,c}(M_\Delta)$. D'après [6, Section 6.4], on a $\mathrm{P}^{\mathcal{V}}_{\lambda_{\xi^{\pm}}} = (i_\Delta)_*(\mathrm{P}^{\Delta}_{\xi}\mathrm{Eul}^{-1}_{\pm}(N_\Delta))$, où les inverses $\mathrm{Eul}^{-1}_{\pm}(N_\Delta) \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}})$ sont définis à la Section 2 : le produit de $\mathrm{P}^{\Delta}_{\xi} \in \mathcal{H}^{-\infty}_{T/T_\Delta,c}(M_\Delta)$ avec $\mathrm{Eul}^{-1}_{\pm}(N_\Delta)$ détermine une classe $\mathrm{P}^{\Delta}_{\xi}\mathrm{Eul}^{-1}_{\pm}(N_\Delta) \in \mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M_\Delta)$. En utilisant la classe $\delta^{o}_{\Delta} = \mathrm{Eul}^{-1}_{-}(N_\Delta) - \mathrm{Eul}^{-1}_{+}(N_\Delta)$ définie en (6) on obtient la formule de saut suivante

Proposition 3.3. $\mathrm{P}_{\xi^+} - \mathrm{P}_{\xi^-} = (i_\Delta)_*(\mathrm{P}^{\Delta}_{\xi}\delta^{o}_{\Delta})$ *dans* $\mathcal{H}^{-\infty}_{T,c}(M)$.

Considérons le T/T_Δ-fibré principal $\pi : \Phi_{\Delta}^{-1}(\xi) \to \mathcal{M}^{\Delta}_{\xi}$ et la restriction $\delta^{o}_{\Delta}|_{\Phi_{\Delta}^{-1}(\xi)}$ de la classe $\delta^{o}_{\Delta} \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(M_\Delta)^{\mathrm{bas}})$: on a $\delta^{o}_{\Delta}|_{\Phi_{\Delta}^{-1}(\xi)} = \pi^*(\delta^{o}_{\xi})$ où $\delta^{o}_{\xi} \in \mathcal{C}^{-\infty}(\mathfrak{t}_\Delta, \mathcal{H}^*(\mathcal{M}^{\Delta}_{\xi}))$ est supportée en 0. Pour tout $\eta \in \mathcal{H}^*_T(M)$, la Proposition 3.3 donne après intégration

$$\int_{\mathfrak{t}}\int_{M} (\mathrm{P}_{\xi^+} - \mathrm{P}_{\xi^-})(X)\eta(X)\psi(X)\,\mathrm{d}X = \frac{c_\Delta}{|S^{\Delta}_{\xi}|}\int_{\mathfrak{t}_\Delta}\int_{\mathcal{M}^{\Delta}_{\xi}} \mathbf{Kir}^{\Delta}_{\xi}(\eta\,\psi)(X_1)\delta^{o}_{\xi}(X_1)\,\mathrm{d}X_1, \tag{11}$$

avec $c_\Delta = (-2\mathrm{i}\pi)^{\dim T - 1}\mathrm{vol}(T/T_\Delta, \mathrm{d}X_2)$ et $\mathrm{d}X = \mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2$. Ici $\mathbf{Kir}^{\Delta}_{\xi} : \mathcal{H}^{\infty}_T(M) \to \mathcal{H}^{\infty}_{T_\Delta}(\mathcal{M}^{\Delta}_{\xi})$ est le composé du morphisme de restriction $\mathcal{H}^{\infty}_T(M) \to \mathcal{H}^{\infty}_T(\Phi_{\Delta}^{-1}(\xi))$ avec l'isomorphisme de Chern–Weil $\mathcal{H}^{\infty}_T(\Phi_{\Delta}^{-1}(\xi)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{\infty}_{T_\Delta}(\mathcal{M}^{\Delta}_{\xi})$. L'élément δ^{o}_{ξ} détermine l'application $\mathrm{Res}^{o}_{\xi} : \mathcal{H}^*_{T_\Delta}(\mathcal{M}^{\Delta}_{\xi}) \to \mathcal{H}^*(\mathcal{M}^{\Delta}_{\xi})$ en posant $\mathrm{Res}^{o}_{\xi}(\eta) = \frac{1}{-2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathfrak{t}_\Delta}\delta^{o}_{\xi}(X_1)\eta(X_1)\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{vol}(T_\Delta, \mathrm{d}X_1)}$. En prenant $\psi = 1$ dans (11) on obtient $\mathrm{I}(M, \eta, \xi^+) - \mathrm{I}(M, \eta, \xi^-) = \frac{1}{|S^{\Delta}_{\xi}|} \times \int_{\mathcal{M}^{\Delta}_{\xi}} \mathrm{Res}^{o}_{\xi} \circ \mathbf{Kir}^{\Delta}_{\xi}(\eta)$. Pour s'assurer que cette formule de saut correspond à (4) il suffit de vérifier que $\mathrm{Res}^{o}_{\xi} \circ \mathbf{Kir}^{\Delta}_{\xi} = \mathbf{Kir}_{M_\Delta,\xi} \circ \mathrm{Res}^{o}_{\Delta}$ où $\mathbf{Kir}_{M_\Delta,\xi}$ est le morphisme de Kirwan sur $(M_\Delta, T/T_\Delta, \Phi_\Delta)$ et $\mathrm{Res}^{o}_{\Delta}$ est l'application résidu définie par (7).

Références

[1] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, Heat Kernels and Dirac Operators, Grundlehren Math. Wiss., vol. 298, Springer, Berlin, 1991.

[2] V. Guillemin, J. Kalkman, The Jeffrey–Kirwan localization theorem and residue operations in equivariant cohomology, J. Reine Angew. Math. 470 (1996) 123–142.

[3] V. Guillemin, S. Sternberg, Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1999. With an appendix containing two reprints by Henri Cartan, Mathematics Past and Present.

[4] F. Kirwan, Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry, Princeton University Press, Princeton, 1984.

[5] S. Kumar, M. Vergne, Equivariant cohomology with generalized coefficients, Astérisque 215 (1993) 109–204.

[6] P.-E. Paradan, Formules de localisation en cohomologie équivariante, Compositio Math. 117 (1999) 243–293.

[7] P.-E. Paradan, The moment map and equivariant cohomology with generalized coefficients, Topology 163 (2000) 401–444.