Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 251–254

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Calculus of Variations/Partial Differential Equations

Interior error estimate for periodic homogenization

Georges Griso

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), laboratoire Jacques-Louis Lions (analyse numérique) 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Received 13 October 2004; accepted 20 October 2004

Available online 4 January 2005

Presented by Philippe G. Ciarlet

Abstract

The aim of this Note is to give interior error estimates for problems in periodic homogenization, by using the periodic unfolding method. The interior error estimates are obtained by transposition without any supplementary hypothesis of regularity on correctors. This error is of order ε. ***To cite this article: G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Résumé

Estimation intérieure de l'erreur en homogénéisation périodique. On s'intéresse dans cette Note à l'erreur intérieure dans les problèmes d'homogénéisation périodique. Les techniques utilisées sont celles de l'éclatement périodique. L'estimation intérieure de l'erreur est obtenue par la méthode de transposition sans faire d'hypothèses supplémentaires de régularité sur les correcteurs. Cette erreur est d'ordre ε. ***Pour citer cet article : G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Version française abrégée

Cette Note présente la suite d'un travail [4,5] sur l'estimation de l'erreur dans le problème d'homogénéisation périodique. Dans ces articles on a montré que l'erreur est d'ordre $\varepsilon^{1/2}$ sous des hypothèses minimales de régularité des correcteurs. On montre ici que l'erreur intérieure est d'ordre ε.

Les premières estimations de l'erreur dans le problème d'homogénéisation périodique ont été données dans [1,3,6]. Dans ces travaux on fait l'hypothèse que les correcteurs appartiennent à $W^{1,\infty}(Y)$ ($Y =]0,1[^n$ est la cellule de référence) ; l'estimation obtenue était en $\varepsilon^{1/2}$.

La première partie de cette Note est consacrée à des théorèmes de projection. Le domaine Ω est de frontière lipschitzienne. On donne (Théorème 2.1) un majorant de la distance entre l'éclaté d'une fonction de $H^1(\Omega)$ et l'espace $H^1_{\mathrm{per}}(Y; L^2(\Omega))$ pour la norme de $H^1(Y; (H^1(\Omega))')$ puis (Théorème 2.2) un majorant de la distance entre l'éclaté du gradient d'une fonction de $H^1(\Omega)$ et l'espace $\nabla_x H^1(\Omega) \oplus \nabla_y H^1_{\mathrm{per}}(Y; L^2(\Omega))$ pour la norme

E-mail address: georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2004.10.027

de $[L^2(Y;(H^1(\Omega))')]^n$. Ces résultats s'appuient sur le théorème mesurant le défaut de périodicité d'une fonction harmonique appartenant à $H^1(Y)$ (voir [5]). Les majorants obtenus dépendent à la fois de ε, de la norme de la fonction dans $H^1(\Omega)$ et de la norme H^1 de cette fonction dans un voisinage d'ordre ε de la frontière de Ω.

La seconde partie de cette étude est consacrée à l'estimation intérieure de l'erreur. On cherche à mesurer la distance entre la solution d'un problème de diffusion à coefficients périodiques et fortement oscillants (3) et sa limite qui est la solution du problème (5) donné sous la forme éclatée. Dans cette Note on se restreint au cas d'un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ de frontière assez régulière ($\mathcal{C}^{1,1}$), de la condition aux limites homogène de Dirichlet et d'un second membre appartenant à $L^2(\Omega)$. Dans une première étape on part du problème (3) en choisissant comme fonction-test $\Psi + \varepsilon \sum_{i=1}^n \rho_\varepsilon \mathcal{Q}_\varepsilon(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i})\chi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon})$, $\Psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. On transforme ensuite par éclatement l'égalité obtenue puis on applique le Théorème 2.2 à la fonction φ^ε. L'estimation supplémentaire demandée par le Théorème 2.2 du gradient de φ^ε au voisinage de la frontière de Ω est obtenue grâce au Théorème 4.1 de [5]. La méthode de transposition donne l'estimation L^2 de l'erreur. Dans une seconde étape on obtient l'estimation H^1 de l'erreur dans tout ouvert fortement inclu dans Ω grâce à l'estimation L^2 précédente. Ces erreurs sont d'ordre ε.

Dans un article à venir on donnera les démonstrations détaillées et on ajoutera à cette étude le cas de la condition aux limites homogène de Neumann et le cas d'un ouvert de frontière polygonale ($n = 2$) ou polyédrale ($n = 3$).

Ce travail utilise les notations de [2,4,5].

1. Introduction

In the periodic homogenization problem we have obtained an error estimate (in [5]) without any regularity hypothesis on the correctors. It was supposed that the solution of the homogenized problem belongs to $H^2(\Omega)$. This holds true with a smooth boundary and homogeneous Dirichlet or Neumann limit conditions. The exponent of ε in the error estimate is equal to $1/2$.

The aim of this work is to give further error estimates with again minimal hypotheses on the correctors.

Section 2 is dedicated to Theorem 2.2 which is the essential tool to obtain new estimates. This theorem is related to the periodic unfolding method (see [2,5]). We show that for any φ in $H^1(\Omega)$, where Ω is a bounded open set of $\mathbf{R}^n$ with Lipschitz boundary, there exists a function $\hat{\varphi}_\varepsilon$ in $L^2(\Omega; H^1_{\mathrm{per}}(Y))$, such that the distance between the unfolded $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x \varphi)$ and $\nabla_x \varphi + \nabla_y \hat{\varphi}_\varepsilon$ is of order ε in the space $[L^2(Y;(H^1(\Omega))')]^n$ provided that the norm of gradient φ in a neighbourhood (of order ε) of the boundary of Ω is less than $\varepsilon^{1/2}$. This result is based on the theorem that measures the periodic defect of a harmonic function belonging to $H^1(Y)$ (see [5]).

In Section 3, we give the distance between the solution of a diffusion problem with strongly oscillating periodic coefficients (3) and its limit. This limit is the solution of problem (5) given in its unfolded form. We consider the case of an open set Ω with sufficiently smooth boundary ($\mathcal{C}^{1,1}$) and homogeneous Dirichlet limits conditions, the right-hand side of the homogenized problem being in $L^2(\Omega)$. In Theorem 3.1, we show by transposition that the L^2 error estimate and the interior error estimate is of order ε. The required condition in Theorem 2.2 is obtained thanks to the estimates of Theorem 4.1 of [5].

The detailed demonstrations including the case of a domain Ω with polygonal ($n = 2$) or polyhedral boundary ($n = 3$) will be presented in forthcoming article.

Throughout this study we use the notation of [2,4,5].

2. Preliminary result

Let Ω be a bounded domain in $\mathbf{R}^n$ with a Lipschitzian boundary. We denote

$$\widehat{\Omega}_{\varepsilon,k} = \left\{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < k\sqrt{n}\varepsilon\right\}, \quad \widetilde{\Omega}_{\varepsilon,k} = \left\{x \in \mathbf{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, \Omega) < k\sqrt{n}\varepsilon\right\}, \quad k \in \{1,2,3\},$$
$$\Omega_\varepsilon = \mathrm{Int}\left(\bigcup_{\xi \in \Xi_\varepsilon} \varepsilon(\xi + \overline{Y})\right), \quad \Xi_\varepsilon = \left\{\xi \in \mathbf{Z}^n \mid \varepsilon(\xi + Y) \cap \Omega \neq \emptyset\right\}, \quad Y =]0,1[^n.$$

There exists a linear and continuous extension operator $\mathcal{P}$ from $H^1(\Omega)$ into $H^1(\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,3})$ such that

$$\|\nabla\mathcal{P}(\varphi)\|_{[L^2(\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,3}\setminus\Omega)]^n}\leqslant C\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n}\quad\text{and}\quad\|\mathcal{P}(\varphi)\|_{L^2(\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,3})}\leqslant C(\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n}).$$

In the sequel any function belonging to $H^1(\Omega)$ is extended into a function belonging to $H^1(\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,3})$. The extension of φ is still denoted φ. We now can define and evaluate the local average $M^\varepsilon_Y(\varphi)$ (respectively the Q_1-interpolate $\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)$) in all cells contained in $\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,3}$ (resp. $\widetilde{\Omega}_{\varepsilon,2}$) (see [2] for details).

Theorem 2.1. *For any φ belonging to $H^1(\Omega)$, there exists $\hat{\psi}_\varepsilon$ in $L^2(\Omega;H^1_{\mathrm{per}}(Y))$ such that*

$$\begin{cases}\|\hat{\psi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega;H^1(Y))}\leqslant C\big\{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}\big\},\\ \|\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)-\hat{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(Y;(H^1(\Omega))')}\\ \quad\leqslant C\varepsilon\big\{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}\big\}+C\sqrt{\varepsilon}\big\{\|\varphi\|_{L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,2})}+\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,2})]^n}\big\}.\end{cases}\tag{1}$$

The constants depend only on Ω.

In [5] we proved that $\|\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)-\hat{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(Y;H^{-1}(\Omega)))}\leqslant C\varepsilon\{\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}\}$ since for any function $\Psi\in H^1_0(\Omega)$, we have $\|\Psi\|_{L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,2})}\leqslant C\varepsilon\|\nabla\Psi\|_{[L^2(\Omega)]^n}$.

If Ψ belongs to $H^1(\Omega)$, we only have $\|\Psi\|_{L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,2})}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\Psi\|_{H^1(\Omega)}$. This accounts for the presence of the supplementary term $C\sqrt{\varepsilon}\{\|\varphi\|_{L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,2})}+\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,2})]^n}\}$ in the second estimate of (1). The proof is similar to that of Proposition 3.3 of [5]. We measure the periodic defect (cf. [4,5]) of the unfolded of φ, $\mathcal{T}_\varepsilon(\varphi)$ in the space $H^1(Y;(H^1(\Omega))')$, then apply Theorem 2.3 of [5].

Theorem 2.2. *For any φ belonging to $H^1(\Omega)$, there exists $\hat{\varphi}_\varepsilon$ in $L^2(\Omega;H^1_{\mathrm{per}}(Y))$ such that*

$$\begin{cases}\|\hat{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega;H^1(Y))}\leqslant C\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n},\\ \|\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\varphi)-\nabla_x\varphi-\nabla_y\hat{\varphi}_\varepsilon\|_{[L^2(Y;(H^1(\Omega))')]^n}\leqslant C\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}+C\sqrt{\varepsilon}\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n}.\end{cases}\tag{2}$$

The constants depend only Ω.

The idea is to take φ in $H^1(\Omega)$ and write it as $\varphi=\Phi+\varepsilon\tilde{\varphi}$ where $\Phi=\mathcal{Q}_\varepsilon(\varphi)$. We use the following estimate: $\|\nabla\Phi\|_{[L^2(\Omega)]^n}+\|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}+\varepsilon\|\nabla\tilde{\varphi}\|_{[L^2(\Omega)]^n}\leqslant C\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}$ (see [2]), and apply Theorem 2.1 to the function $\tilde{\varphi}$. We obtain $\|\hat{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega;H^1(Y))}\leqslant C\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}$ and $\|\mathcal{T}_\varepsilon(\varepsilon\nabla_x\tilde{\varphi})-\nabla_y\hat{\varphi}_\varepsilon\|_{L^2(Y;(H^1(\Omega))')}\leqslant C\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}+C\sqrt{\varepsilon}\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n}$ (recall that $\mathcal{T}_\varepsilon(\varepsilon\nabla_x\tilde{\varphi})=\nabla_y\mathcal{T}_\varepsilon(\tilde{\varphi})$).

As in Theorem 3.4 of [2] we prove that

$$\big\|\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\Phi)-\nabla_x\Phi\big\|_{[L^2(Y;(H^1(\Omega)')]^n}\leqslant C\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}+C\sqrt{\varepsilon}\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n}.$$

Finally, we show that $\|\varepsilon\nabla\tilde{\varphi}\|_{[(H^1(\Omega))']^n}\leqslant C\varepsilon\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^n}+C\sqrt{\varepsilon}\|\nabla\varphi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n}$, from which the second estimate of Theorem 2.2.

3. Interior error estimate

In this section Ω is a bounded domain in $\mathbf{R}^n$ with a sufficiently smooth boundary ($\mathcal{C}^{1,1}$).

We consider the following homogenization problem:

$$\varphi^\varepsilon\in H^1_0(\Omega),\quad\int_\Omega A\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\nabla\psi=\int_\Omega f\psi,\quad\forall\psi\in H^1_0(\Omega),\tag{3}$$

where f belongs to $L^2(\Omega)$ and where A is a square matrix of elements belonging to $L^\infty_{\mathrm{per}}(Y)$, satisfying the condition of uniform ellipticity $c|\xi|^2\leqslant A(y)\xi\cdot\xi\leqslant C|\xi|^2$ a.e. $y\in Y$, with c and C strictly positive constants.

We have shown (see Theorem 4.1 in [5]) that

$$\|\varphi^\varepsilon - \Phi\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla\varphi^\varepsilon - \nabla\Phi - \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\nabla\chi_i\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{4}$$

where $(\Phi, \hat{\varphi}) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y)/\mathbf{R})$ is the solution of the limit problem of unfolding homogenization

$$\int_\Omega\int_Y A\{\nabla_x\Phi + \nabla_y\hat{\varphi}\} \cdot \{\nabla_x\Psi + \nabla_y\hat{\psi}\} = \int_\Omega f\Psi, \quad \forall(\Psi, \hat{\psi}) \in H_0^1(\Omega) \times L^2\big(\Omega; H^1_{\text{per}}(Y)/\mathbf{R}\big). \tag{5}$$

We recall that the correctors χ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, are the solutions of the variational problems

$$\chi_i \in H^1_{\text{per}}(Y), \quad \int_Y A(y)\nabla_y\big(\chi_i(y) + y_i\big)\nabla_y\psi(y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \forall\psi \in H^1_{\text{per}}(Y).$$

They allow us to express $\hat{\varphi}$ in terms of $\nabla\Phi$: $\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\chi_i$ and to give the homogenized problem satisfied by Φ

$$\int_\Omega \mathcal{A}\nabla\Phi\nabla\Psi = \int_\Omega f\Psi \quad \forall\Psi \in H_0^1(\Omega) \tag{6}$$

where $\mathcal{A}_{ij} = \frac{1}{|Y|}\sum_{k,l=1}^n \int_Y a_{kl}\frac{\partial(y_i+\chi_i)}{\partial y_k}\frac{\partial(y_j+\chi_j)}{\partial y_l}$ (see [3]).

Theorem 3.1. *Let Ω' be a subdomain such that $\Omega' \subset\subset \Omega$. The solution of problem* (3) *satisfied the following error estimate*:

$$\left\|\varphi^\varepsilon - \Phi - \varepsilon\sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_\varepsilon\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)\chi_i\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{H^1(\Omega')} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{7}$$

The constant depends on A, on Ω' and on Ω.

Idea of the proof. The solution Φ of the homogenized problem (6) belongs to $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ and we have $\|\nabla\Phi\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{L^2(\Omega)}$. Using (4) we obtain $\|\nabla\varphi^\varepsilon\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{L^2(\Omega)}$. Let Ψ be in $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. In (3) we take $\Psi + \varepsilon\sum_{i=1}^n \rho_\varepsilon\mathcal{Q}_\varepsilon(\frac{\partial\Psi}{\partial x_i})\chi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ as test function where $\rho_\varepsilon(x) = \inf\{\frac{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)}{\varepsilon}, 1\}$ and we transform the left-hand side by unfolding.

We then apply Theorem 2.2 to function φ^ε. Due to the estimate of $\|\nabla\varphi^\varepsilon\|_{[L^2(\widehat{\Omega}_{\varepsilon,3})]^n}$ we obtain $|\int_\Omega \mathcal{A}\nabla(\varphi^\varepsilon - \Phi)\nabla\Psi| \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\Psi\|_{H^2(\Omega)}$ where $\mathcal{A}$ is the matrix of problem (6). This gives $\|\varphi^\varepsilon - \Phi\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}$. We now write the variational problems satisfied by $\rho\varphi^\varepsilon$ and $(\rho\Phi, \rho\hat{\varphi})$ where $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Proceeding as in Proposition 4.4 in [5] and thanks to the L^2 estimate of $\varphi^\varepsilon - \Phi$ we obtain $\|\rho(\nabla\varphi^\varepsilon - \nabla\Phi - \sum_{i=1}^n \mathcal{Q}_\varepsilon(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i})\nabla_y\chi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon}))\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}$, hence (7). □

References

[1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam, 1978.
[2] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 99–104.
[3] D. Cioranescu, P. Donato, An Introduction to Homogenization, in: Oxford Lecture Series in Math. Appl., vol. 17, Oxford University Press, 1999.
[4] G. Griso, Estimation d'erreur et éclatement en homogénéisation périodique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 333–336.
[5] G. Griso, Error estimate and unfolding for periodic homogenization, Asymptotic Anal., in press.
[6] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev, G.A. Yosifian, Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization, North-Holland, Amsterdam, 1992.