Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 799–802
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations différentielles

Sur le principe de superposition et l'équation de Riccati

Samia Rezzag [a], Raouf Dridi [b], Amar Makhlouf [b]

[a] *Département de mathématiques, centre universitaire Badji Mokhtar, Souk Ahras, Algérie*
[b] *Département de mathématiques, laboratoire de mathématiques appliquées, université d'Annaba, Algérie*

Reçu le 3 mai 2004 ; accepté après révision le 22 mars 2005

Disponible sur Internet le 17 mai 2005

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Dans cette Note on étudie les conditions pour qu'un système d'équations différentielles ordinaires possède une superposition des solutions, et également la linéarisation de tels systèmes. On étudie plus particulièrement l'équation de Riccati. ***Pour citer cet article : S. Rezzag et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

Abstract

On the superposition principal and Riccati equation. In this Note we study the conditions under which a system of ordinary differential equations admits a nonlinear superposition of the solutions, and also the linearization of such systems. A particular study is established for the Riccati equation. ***To cite this article: S. Rezzag et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).***

1. Introduction

Un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = F_i(t, x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

admet un principe de superposition non linéaire (PSN) si sa solution générale peut être formulée en fonction d'un nombre fini de solutions particulières distinctes $x_1, \ldots, x_m$ et de n constantes $C_1, \ldots, C_n$:

$$x = H(x_1, \ldots, x_m, C_1, \ldots, C_n). \tag{2}$$

Adresses e-mail : samia.rezzag@yahoo.fr (S. Rezzag), dridi@lifl.fr (R. Dridi), makhloufamar@yahoo.fr (A. Makhlouf).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2005.04.022

On exige que la forme des fonctions de superposition H ne dépende pas du choix des solutions particulières x_i. Ceci n'exclut pas pour une équation (système) donnée la possibilité d'admettre différentes présentations de la solution générale, et pour différents nombres m de solutions particulières distinctes.

Le PSN remonte aux travaux de S. Lie, E. Vessiot, G. Scheffers et V. Ermakov. En 1893 Lie [2] et Vessiot [4] formulaient le problème de la manière suivante :
Quelles sont les conditions pour qu'un système d'EDO du premier ordre possède un PSN ? Et comment déterminer la formule de la solution générale ?

Lie, Scheffers et Vessiot sont les premiers à avoir répondu à la question.

Théorème 1.1. *Les Éqs.* (1) *possèdent un PSN de la forme* (2) *si et seulement si elles admettent une séparation généralisée des variables* :

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = T_1(t)\xi_1^i(x) + \cdots + T_r(t)\xi_r^i(x); \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

telle que les champs de vecteurs

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r \tag{4}$$

engendrent une algèbre de Lie $\mathcal{L}_r$ *de dimension* $r \leqslant nm$.

L'algèbre de Lie $\mathcal{L}_r$ est appelée algèbre de Vessiot–Guldberg.

2. Équation de Riccati

L'équation de Riccati

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2 \tag{5}$$

a la forme (3) pour $n = 1$ et $r = 3$, et admet donc un PSN pour $m \geqslant 3$. Il est en effet bien connu que la solution générale x de l'équation de Riccati s'exprime en fonction de trois solutions particulières distinctes x_1, x_2 et x_3 :

$$\frac{x - x_2}{x - x_1} = c\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

où c est une constante. D'autre part, si une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w(t, x)$$

admet un PSN, alors la dimension de son algèbre de Vessiot–Guldberg est inférieure ou égal à trois [1,3]. On obtient le résultat suivant :

Proposition 2.1. *La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre qui admet un principe de superposition est l'équation de Riccati* (5).

On en déduit par exemple que l'équation générale d'Abel :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$$

où $a_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3,$ n'admet pas de principe de superposition de solutions.

Le fait que des équations différentielles admettent des superpositions nous pousse à nous demander si de telles équations sont linéarisables par un changement de variable. Une réponse est donnée par le résultat suivant, basé sur le redressement des champs de vecteurs des algèbres de Lie de dimension inférieure ou égal à deux :

Théorème 2.2. *Une équation différentielle ordinaire du premier ordre possédant un PSN peut être linéarisée par un changement de fonction inconnue si et seulement si son algèbre de Vessiot–Guldberg est de dimension inférieure ou égal à deux.*

On obtient pour l'équation de Riccati (5) la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Éq.* (5) *est linéarisable par un changement de fonction inconnue* x.

(ii) *Éq.* (5) *peut être écrite sous la forme* :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = T_1(t)\xi_1(x) + T_2(t)\xi_2(x)$$

tels que :

$$X_1 = \xi_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad X_2 = \xi_2(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

engendrent une algèbre de Lie de dimension inférieure ou égal à deux.

(iii) *Éq.* (5) *est soit de la forme* :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(t)x + Q(t)x^2 \tag{6}$$

soit de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(t) + Q(t)x + k\big[Q(t) - kP(t)\big]x^2, \tag{7}$$

où k est une constante.

(iv) *Éq.* (5) *a une solution constante.*

Considérons par exemple l'équation de Riccati suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(t) + Q(t)x + \big(Q(t) - P(t)\big)x^2$$

avec $X_1 = (1 - x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et $X_2 = (x + x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, et considérons les champs

$$X = X_1 + 2X_2 = (1 + x)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$
$$Y = X_2,$$

qui vérifient $[X, Y] = X$. Posons :

$$X(y) = (1 + x)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1,$$

ce qui est vérifié en particulier pour

$$y = -\frac{1}{1 + x}.$$

On obtient la linéarisation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(t) - P(t) + \big(Q(t) + 2P(t)\big)y,$$

et on remarque que la condition (iv) est vérifiée pour la fonction constante $c = -1$.

Références

[1] N.H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equation, Wiley, 1999.

[2] S. Lie, Vorlesungen über continuerliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen, Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers, Teubner, Leipzig, 1893, pp. 765–804.

[3] H. Stephani, Differential equations: their solution using symmetries, in: M.A.H. MacCallum (Ed.), Cambridge University Press, New York and London, 1989.

[4] E. Vessiot, Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales, Ann. Sci. École Norm. Sup. 10 (1893).