Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 89–92
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Inégalités de Hardy précisées

Hajer Bahouri [a], Jean-Yves Chemin [b], Isabelle Gallagher [c]

[a] *Département de mathématiques, faculté des sciences de Tunis, 1060 Tunis, Tunisie*
[b] *Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598, université Paris 6, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*
[c] *Institut de mathématiques, UMR 7586, université Paris 7, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*

Reçu et accepté le 12 mai 2005

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Le but de cette Note est de présenter des inégalités de type Hardy « précisé ». Elles généralisent les inégalités de Hardy habituelles, et leur caractéristique est d'être invariantes par oscillations : appliqués à des fonctions très oscillantes, les deux membres de l'inégalité précisée sont du même ordre de grandeur. La démonstration repose sur le calcul paradifférentiel et les espaces de Besov. ***Pour citer cet article : H. Bahouri et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

Abstract

Precised Hardy inequalities. The aim of this Note is to present 'precised' Hardy-type inequalities. Those inequalities are generalisations of the usual Hardy inequalities, their feature being that they are invariant under oscillations: when applied to highly oscillatory functions, both sides of the precised inequality are of the same order of magnitude. The proof relies on paradifferential calculus and Besov spaces. ***To cite this article: H. Bahouri et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005).***

1. Introduction

Nous nous proposons dans ce texte de démontrer une version précisée des inégalités de Hardy [4,5]. Ces inégalités sont d'importance fondamentale en Analyse (parmi d'autres exemples citons les problèmes d'éclatement autour d'un point, ou encore l'étude d'opérateurs pseudodifférentiels à coefficients singuliers) et ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux. Notre objectif ici est d'abord de donner une nouvelle preuve de ces inégalités, et d'en obtenir en outre une version « précisée ». On trouvera dans ce texte des éléments de preuve, et le lecteur intéressé pourra consulter [1] pour plus de détails (ainsi qu'un énoncé plus général de l'inégalité principale de ce

Adresses e-mail : chemin@ann.jussieu.fr (J.-Y. Chemin), gallagher@math.jussieu.fr (I. Gallagher).

1631-073X/$ – see front matter © 2005 Publié par Elsevier SAS pour l'Académie des sciences.
doi:10.1016/j.crma.2005.05.015

texte, l'inégalité (2)). On trouvera aussi dans [1] la démonstration d'un résultat analogue dans le cadre du groupe de Heisenberg.

Rappellons tout d'abord l'inégalité classique : si $s \in]0, d/2[$, il existe une constante C telle que

$$\forall u \in \dot{H}^s(\mathbf{R}^d), \quad \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \leqslant C\|u\|^2_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)}. \tag{1}$$

On a noté $\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)$ l'espace de Sobolev homogène formé des éléments u de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ dont la tranformée de Fourier $\hat{u}$ est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ et dont la norme suivante est finie,

$$\|u\|^2_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{2s}\big|\hat{u}(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

Remarque 1. Comme pour les injections de Sobolev, l'inégalité de Hardy est invariante par changement d'échelle mais pas par oscillation. Le théorème précisé ci-dessous est la version « Hardy » du résultat [3] pour les injections de Sobolev.

Pour énoncer le théorème précisé, introduisons les espaces de Besov d'indice négatif.

Définition 1.1. Soit s un nombre réel strictement positif et soient p et r deux réels dans $[1, +\infty]$. L'espace de Besov $\dot{B}^{-s}_{p,r}(\mathbf{R}^d)$ est l'espace des distributions tempérées telles que

$$\|u\|_{\dot{B}^{-s}_{p,r}(\mathbf{R}^d)} \stackrel{\text{déf}}{=} \big\|t^{s/2}\|\mathrm{e}^{t\Delta}u\|_{L^p}\big\|_{L^r(\mathbf{R}^+, dt/t)} < +\infty.$$

Remarque 2. Il existe une définition équivalente de ces espaces en termes de découpage dyadique de Littlewood–Paley, qui en particulier permet d'étendre cette définition au cas d'indices positifs. Nous renvoyons à la Définition 2.3 ci-dessous. De plus, pour tout $s \in]0, d/2[$, $\dot{H}^s(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}^{s-d/2}_{\infty,2}(\mathbf{R}^d)$.

Le résultat que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Théorème 1.2. *Soit $s \in]0, d/2[$. Il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in \dot{H}^s(\mathbf{R}^d), \quad \left(\int_{\mathbf{R}^d} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant C\|u\|^{2s/d}_{\dot{B}^{s-d/2}_{\infty,2}(\mathbf{R}^d)}\|u\|^{1-2s/d}_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)}. \tag{2}$$

2. Autour des espaces de Besov

Donnons ici sans démonstration le résultat suivant (voir [1]), qui indique en quoi le Théorème 1.2 fournit une inégalité invariante par oscillations.

Proposition 2.1. *Soit σ un réel dans l'intervalle $]0, d[$, et soit f une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Alors il existe une constante C telle que la fonction oscillante $f_\varepsilon(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\omega/\varepsilon}$, où ω est un élément de S^{d-1}, vérifie*

$$\|f_\varepsilon\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,2}} \leqslant C\varepsilon^\sigma.$$

Appliquons l'inégalité (2) à f_ε ainsi construite. On remarque que le membre de gauche ne dépend évidemment pas de ε, alors que dans le membre de droite l'explosion en $\varepsilon^{-s(1-2s/d)}$ due à la norme $\dot{H}^s$ est exactement compensée par la petitesse en $\varepsilon^{2s/d(d/2-s)}$ due à la norme $\dot{B}^{-d/2+s}_{\infty,2}(\mathbf{R}^d)$ et à la Proposition 2.1.

Les oscillations ne sont pas les seules responsables de la petitesse de la norme Besov d'une fonction. On peut en effet construire des fonctions positives (en particulier non oscillantes) de norme de Besov arbitrairement petite, alors que ses normes de Lebesgue sont minorées. Plus précisément on montre le résultat suivant :

Proposition 2.2. *Soit $d \geqslant 2$ et soit $p \in [1,\infty]$. Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positives et de classe C^∞ telles que $\|f_n\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} = 1$ et vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\dot{B}^{-d/p}_{\infty,1}} = 0.$$

La démonstration de ce résultat est liée à une transformation fractale des fonctions régulières et à support compact du cube $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Si T est l'application de $\mathcal{D}(Q)$ dans lui même, définie par

$$Tf \stackrel{\text{déf}}{=} 2^d \sum_{J\in\{-1,1\}^d} f\big(4(x-x_J)\big), \quad \text{avec } x_J = \frac{3}{8}(J_1,\ldots,J_d)$$

alors on peut montrer que pour tout $\sigma < d$,

$$\|Tf\|_{L^p} = 2^{d(1-1/p)}\|f\|_{L^p},$$
$$\|Tf\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}} \leqslant 2^{d-2\sigma}\|f\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,1}} + C\|f\|_{L^1}.$$

Ces estimations donnent la Proposition 2.2 en prenant $f_n \stackrel{\text{déf}}{=} T^n f/\|T^n f\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}$.

Afin de redémontrer l'inégalité de Hardy (et d'obtenir ensuite le Théorème 1.2) nous aurons besoin de caractériser les espaces de Besov d'indice positif. La définition suivante fournit cette caractérisation, et nous admettrons la coïncidence avec la Définition 1.1 ci-dessus pour les indices strictement négatifs.

Définition 2.3. Soit φ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ telle que $\hat{\varphi}(\xi) = 1$ si $|\xi| \leqslant 1$ et $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ si $|\xi| > 2$. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on définit $\varphi_j(x) \stackrel{\text{déf}}{=} 2^{dj}\varphi(2^j x)$, et les opérateurs de Littlewood–Paley

$$S_j \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_j * \cdot \quad \text{et} \quad \Delta_j \stackrel{\text{déf}}{=} S_{j+1} - S_j.$$

Soit f dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$. Si $s < d/p$, alors f appartient à l'espace de Besov $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbf{R}^d)$ si et seulement si

- La somme partielle $\sum_{-m}^m \Delta_j f$ converge vers f en tant que distribution tempérée ;
- La suite $\varepsilon_j \stackrel{\text{déf}}{=} 2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p}$ appartient à $\ell^q(\mathbb{Z})$.

3. Démonstration de l'inégalité de Hardy classique (1)

Pour démontrer l'inégalité de Hardy (1) nous allons utiliser le fait (classique) que la fonction $x \mapsto |x|^{-2s}$ est un élément de l'espace $\dot{B}^{d-2s}_{1,\infty}(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow \dot{B}^{d/2-2s}_{2,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Il suffit maintenant de montrer que si u est dans $\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)$, alors le produit u^2 est dans $\dot{B}^{2s-d/2}_{2,1}(\mathbf{R}^d)$. Le calcul paradifférentiel de Bony [2] permet de multiplier entre elles des fonctions appartenant à deux espaces de Besov, pourvu que certaines conditions sur les indices soient respectées, et en particulier de démontrer le résultat classique suivant :

Proposition 3.1. *Soient f et g deux éléments de $\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)$, avec $0 < s < d/2$. Alors le produit fg est un élément de l'espace de Besov $\dot{B}^{2s-d/2}_{2,1}(\mathbf{R}^d)$, et il existe C (ne dépendant que de s et de d) telle que*

$$\|fg\|_{\dot{B}^{2s-d/2}_{2,1}(\mathbf{R}^d)} \leqslant C\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)}\|g\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)}.$$

4. Démonstration du Théorème 1.2

Elle consiste à utiliser l'algorithme de paraproduit

$$u^2 = 2T_u u + R(u,u), \quad \text{avec } T_u u \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-1}u\Delta_j u.$$

On commence par remarquer que

$$\|T_u u\|_{\dot{B}^{2s-d}_{\infty,1}(\mathbf{R}^d)} \leqslant C\|u\|^2_{\dot{B}^{s-d/2}_{\infty,2}(\mathbf{R}^d)}.$$

Comme $x \mapsto |x|^{-2s}$ est un élément de l'espace $\dot{B}^{d-2s}_{1,\infty}(\mathbf{R}^d)$, il suit directement que

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{|T_u u|}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \leqslant C\|u\|^2_{\dot{B}^{s-d/2}_{\infty,2}(\mathbf{R}^d)}.$$

Pour estimer le terme de reste $R(u,u)$, notons tout d'abord que pour toutes fonctions f et g,

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{fg}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \leqslant C\|f\|^{1-2s/d}_{L^2}\|g\|^{1-2s/d}_{L^2}\|f\|^{2s/d}_{L^\infty}\|g\|^{2s/d}_{L^\infty}.$$

L'inégalité de Hölder fournit alors, par définition de $R(u,u)$,

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{R(u,u)}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \leqslant C\sum_{|\ell|\leqslant 1}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js}\|\Delta_j u\|_{L^2}\|\Delta_{j-\ell}u\|_{L^2}\right)^{1-2s/d}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j(s-d/2)}\|\Delta_j u\|_{L^\infty}\|\Delta_{j-\ell}u\|_{L^\infty}\right)^{2s/d}$$

et donc

$$\int_{\mathbf{R}^d} \frac{R(u,u)}{|x|^{2s}}\,\mathrm{d}x \leqslant C\|u\|^{4s/d}_{\dot{B}^{s-d/2}_{\infty,2}(\mathbf{R}^d)}\|u\|^{2(1-2s/d)}_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^d)}.$$

Le Théorème 1.2 est démontré.

Remerciements

Nous remercions A. Cohen de nous avoir suggéré la Proposition 2.2 et sa démonstration.

Références

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, I. Gallagher, Precised Hardy inequalities, en préparation.
[2] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. École Normale Supérieure de Paris 14 (1981) 209–246.
[3] P. Gérard, Y. Meyer, F. Oru, Inégalités de Sobolev précisées, Séminaire EDP, École Polytechnique, Décembre 1996.
[4] G.H. Hardy, Note on a theorem of Hilbert, Math. Z. 6 (1920) 314–317.
[5] G.H. Hardy, An inequality between integrals, Messenger Math. 54 (1925) 150–156.