Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 539–544

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Simplicité abstraite des groupes de Kac–Moody non affines

Pierre-Emmanuel Caprace [a], Bertrand Rémy [b]

[a] *Université Libre de Bruxelles, département de mathématiques, CP 216, boulevard du Triomphe, B-1050 Bruxelles, Belgique*
[b] *Institut Camille-Jordan, UMR 5208 du CNRS, université de Lyon 1, 21, avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne cedex, France*

Reçu et accepté le 10 février 2006

Disponible sur Internet le 20 mars 2006

Présenté par Jacques Tits

Résumé

Nous annonçons la simplicité des réseaux de Kac–Moody non affines (modulo leur centre). Les groupes en question sont des groupes de Kac–Moody minimaux, définis par Jacques Tits au moyen d'une présentation « à la Steinberg ». Le corps de base est fini, supposé de cardinal supérieur au rang des immeubles sur lesquels ces groupes opèrent naturellement. Nous travaillons dans le contexte combinatoire général des données radicielles jumelées. ***Pour citer cet article : P.-E. Caprace, B. Rémy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Abstract simplicity of non-affine Kac–Moody groups. We announce the simplicity of non-affine Kac–Moody lattices (modulo center). The groups under consideration are minimal Kac–Moody groups. They were defined by Jacques Tits by means of a presentation à la Steinberg. The ground field is finite, assumed to be of cardinality greater than the rank of the buildings these groups naturally act upon. We work in the general combinatorial context of twin root data. ***To cite this article: P.-E. Caprace, B. Rémy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Kac–Moody groups are, by definition, groups which integrate Kac–Moody Lie algebras in whatever way. There exist several constructions of such groups but in any case, since the latter Lie algebras are infinite-dimensional analogues of semisimple Lie algebras, it is natural to see Kac–Moody groups as analogues of semisimple algebraic groups. Indeed, all the so far defined versions of Kac–Moody groups have remarkable combinatorial properties close to those of semisimple algebraic groups. In this note, we are interested in a definition given by J. Tits [11]. He calls the resulting Kac–Moody groups minimal because the other known constructions are, so to speak, completions of them. For instance if $\mathbf{G}$ is a split semisimple algebraic group over a field $\mathbf{K}$, then $\mathbf{G}(\mathbf{K}[t,t^{-1}])$ is a minimal Kac–Moody group of affine type over $\mathbf{K}$, while the other constructions presumably provide (a central extension of) the group $\mathbf{G}(\mathbf{K}((t)))$. In the case of a finite ground field, this example is the starting point of another analogy, namely between minimal

Adresses e-mail : pcaprace@ulb.ac.be (P.-E. Caprace), remy@math.univ-lyon1.fr (B. Rémy).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.02.029

Kac–Moody groups and arithmetic groups over function fields. This analogy is supported by the fact that if its finite ground field is large enough with respect to the growth series of its Weyl group, then a minimal Kac–Moody group is a lattice of the product of (the automorphism groups of) its twinned buildings [7].

Going back to group-theoretic properties with both analogies in mind, we can now consider one of the main questions, namely the simplicity of Kac–Moody groups. This is a non-trivial problem for the following reason: minimal Kac–Moody groups of affine type are never simple. Indeed the group $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t, t^{-1}])$ is residually finite, which can be seen for instance by intersecting its congruence subgroups. Our main result is that requiring the Weyl group not to be of affine type is the only serious condition for simplicity, up to a possibly superfluous condition on the size of the finite ground field.

Theorem 0.1. *Let G be a split or quasisplit Kac–Moody group over a finite field $\mathbf{F}_q$ with q elements. Let us denote by (W, S) the natural Coxeter system of the Weyl group W and by $W(t)$ the growth series of W with respect to S. Let us assume that (W, S) is irreducible, neither of spherical nor of affine type, and that $W(\frac{1}{q}) < \infty$. Then the derived group of G, divided by its center, is simple.*

To our knowledge, the main previous results about simplicity of Kac–Moody groups deal with completions: abstract simplicity in characteristic 0 [5] or topological simplicity over finite fields [8]. The above result is the specialization to Kac–Moody groups of the more general result below, valid in the context of twin root data (see Section 2 for the definition of this combinatorial structure and [13] for details about it).

Theorem 0.2. *Let G be a group admitting a twin root datum $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ of type (W, S). We denote by $G^\dagger$ the group generated by the root groups U_α and by $W(t)$ the growth series of W with respect to S. Let us assume the following.*

(S1) *The Coxeter system (W, S) is irreducible and its type is neither spherical nor affine.*
(S2) *All root groups are finite and nilpotent and the minimum $q_{\min}$ of their orders satisfies $W(\frac{1}{q_{\min}}) < \infty$.*
(S3) *For any root $\alpha \in \Phi$, the group X_α generated by U_α and $U_{-\alpha}$ is quasisimple.*

Then any subgroup of G, normalized by $G^\dagger$, centralizes $G^\dagger$ or contains $G^\dagger$.

Note that we will use the notation $G^\dagger$ for all the statements below. Our study of non-affine minimal Kac–Moody groups is shared between using the analogy with arithmetic groups to prove as many group-theoretic properties as possible and standing by some decisive differences eventually implying that these groups are new. For the problem of simplicity, this is illustrated as follows. Let us recall first that a finitely generated just infinite group (i.e. a finitely generated group all of whose proper quotients are finite), either is residually finite or is, up to finite index, a direct product of finitely many isomorphic simple groups.

Analogy step. Irreducible arithmetic groups in higher rank semisimple Lie groups almost enjoy this property since their normal subgroups either are finite and central or have finite index: this is the normal subgroup property [3, VIII.2]. The theorem below is a generalized form of the normal subgroup property for some groups with twin root data. It belongs to the class of results proved by analogy with S-arithmetic groups and it is proved as a combination of results in [1,9] and [10] (see Section 3 for further explanations on the proof).

Theorem 0.3. *Let G be a group admitting a twin root datum $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ of type (W, S) such that*:

(NSP1) *The Weyl group W is infinite.*
(NSP2) *The orders of the root groups U_α are finite and their minimum $q_{\min}$ satisfies $W(\frac{1}{q_{\min}}) < \infty$.*

Then any subgroup of G, normalized by $G^\dagger$, centralizes $G^\dagger$ or contains a finite index subgroup of $G^\dagger$.

Difference step. The second half of the proof consists in proving restrictions on finite index subgroups of non-affine Kac–Moody groups (without any assumption on the orders of root groups). These restrictions do not exist in the affine case of arithmetic groups. The key point is the sharp difference between the geometry of the Tits cones of affine (i.e.

virtually Abelian) and of non-affine Coxeter groups. Another instance of this difference is that Coxeter groups in the latter class have finite index subgroups virtually surjecting onto non-Abelian free groups [4].

Theorem 0.4. *Let G be a group admitting a twin root datum $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ of type (W,S) such that*:

(FQ1) *The Coxeter system (W,S) is irreducible and its type is neither spherical nor affine.*
(FQ2) *For any root $\alpha\in\Phi$, the root group U_α is nilpotent.*
(FQ3) *For any root $\alpha\in\Phi$, the group X_α generated by U_α and $U_{-\alpha}$ is not nilpotent.*

Let K be a finite index normal subgroup of G. Then for any $\alpha\in\Phi$ the group $K\cap X_\alpha$ is not central in X_α.

We finally note that the idea to construct simple groups by proving the normal subgroup property (by analogy with G.A. Margulis' proof) and disproving residual finiteness (by geometric arguments) appears in [2]; the so-obtained simple groups are uniform lattices in products of trees. In our case, the simple groups are non-uniform lattices of products of buildings, possibly (and usually) of dimension $\geqslant 2$.

1. Introduction

Il existe plusieurs constructions des groupes de Kac–Moody, c'est-à-dire des groupes qui intègrent les algèbres de Lie du même nom. Ces algèbres de Lie généralisent en dimension infinie les algèbres de Lie semi-simples. Il est donc naturel, quand on propose une telle généralisation au niveau des groupes, d'attendre des propriétés analogues à celles des groupes algébriques semi-simples. Et en effet toutes les constructions des groupes de Kac–Moody jouissent, à des degrés divers, de propriétés combinatoires proches de celles des groupes algébriques semi-simples.

La définition des groupes de Kac–Moody qui nous intéresse est celle qui a été donnée par J. Tits dans [11]. Cette construction donne lieu à des groupes que J. Tits appelle « de Kac–Moody minimaux ». Bien que les liens avec les autres constructions ne soient pas encore complètement élucidés, les groupes correspondant à ces dernières sont en quelque sorte des complétions des groupes minimaux [12]. Ainsi, les groupes de Kac–Moody minimaux et les groupes complétés entretiennent un rapport analogue au rapport entre le groupe arithmétique $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ et le groupe de Lie $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q((t)))$.

Si l'on revient à l'analogie avec les groupes algébriques semi-simples, une des principales questions est bien entendu celle de la simplicité. Malgré les analogies combinatoires évoquées ci-dessus, il existe peu de résultats de simplicité portant sur les groupes de Kac–Moody. Ces résultats ne concernent d'ailleurs, à notre connaissance, que les groupes de Kac–Moody complétés et établissent la simplicité topologique sur les corps finis [8] ou la simplicité abstraite sur un corps de caractéristique 0 [5].

Désormais, et jusqu'à la fin de cette note, le terme « groupe de Kac–Moody » désignera un groupe de Kac–Moody minimal. Ici la combinatoire de base est la structure de BN-paire (ou système de Tits), et son raffinement le plus fin adapté à la situation est la structure de donnée radicielle jumelée [13] sur laquelle nous revenons rapidement en 2. Nous prouvons un théorème de simplicité des groupes à donnée radicielle jumelée qui implique le suivant.

Théorème 1.1. *Soit G un groupe de Kac–Moody déployé ou quasi déployé sur un corps de base fini $\mathbf{F}_q$ à q éléments. Notons (W,S) le système de Coxeter naturel du groupe de Weyl W de G et $W(t)$ la fonction de croissance de W par rapport à S. Supposons que (W,S) est irréductible, de type ni sphérique ni affine et que $W(\frac{1}{q})<\infty$. Alors le groupe dérivé de G, divisé par son centre, est simple.*

La preuve du résultat ci-dessus utilise une analogie très féconde : celle qui consiste à voir les groupes de Kac–Moody sur les corps finis comme des généralisations de groupes arithmétiques sur les corps de fonctions. Cette analogie est suggérée par l'exemple du groupe arithmétique $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$, qui est aussi un groupe de Kac–Moody affine sur $\mathbf{F}_q$. Elle est surtout justifiée par le fait que pour q assez grand, un groupe de Kac–Moody sur $\mathbf{F}_q$ est un réseau du produit (des groupes d'automorphismes) de ses immeubles jumelés [7]. Bien entendu, au vu de nos résultats cette analogie a ses limites puisque $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q[t,t^{-1}])$ possède de nombreux sous-groupes distingués, par exemple ses sous-groupes de congruence (ce qui montre au passage que l'hypothèse sur le type du groupe de Weyl est nécessaire dans le précédent théorème). En fait, une partie de notre travail consiste à faire la part de ce qui relève de l'analogie avec les groupes arithmétiques et de ce qui relève de phénomènes qui assurent que certains (a posteriori la plupart) des groupes de Kac–Moody sont nouveaux.

À ce titre, la preuve se décompose en deux résultats illustrant chacun un des deux points ci-dessus. Le premier résultat relève de l'analogie. Il a été prouvé dans [1] et [9] et montre que dans un groupe de Kac–Moody sur un corps fini assez gros, tout sous-groupe distingué est soit central et fini, soit d'indice fini. Ce résultat est présenté et discuté en 3 ; c'est pour lui qu'on doit supposer les sous-groupes radiciels assez gros. Le second résultat, énoncé en 4 et pour lequel on doit faire l'hypothèse de non nilpotence des facteurs de Lévi de rang 1, établit des restrictions fortes sur les sous-groupes d'indice fini d'une donnée radicielle jumelée à groupe de Weyl infini et non affine. Ces restrictions n'existent pas pour les groupes arithmétiques ; d'ailleurs les arguments géométriques de la preuve utilisent de façon cruciale une sorte d'hyperbolicité faible des groupes de Coxeter infinis non affines.

Dans tout ce qui suit nous désignons par (W, S) un système de Coxeter et nous utilisons librement les notations et définitions de [11, Section 5] concernant le système de racines Φ associé. Nous notons Π la base de racines simples correspondant à S et s_α la réflexion associée à toute $\alpha \in \Phi$.

2. Groupes à donnée radicielle jumelée

Les données radicielles jumelées constituent un raffinement de la notion de BN-paire. On décrit cette structure essentiellement grâce à une famille de sous-groupes indexée par les racines d'un système de Coxeter [13, Section 3].

Définition 2.1. Soit G un groupe. Une donnée radicielle jumelée de type (W, S) pour G consiste en un sous-groupe H et une famille de sous-groupes $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ vérifiant les axiomes suivants.

(DRJ0) Pour toute racine α, le groupe U_α est non trivial et normalisé par H.
(DRJ1) Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha; \beta\}$, le groupe des commutateurs $[U_\alpha, U_\beta]$ est inclus dans le groupe $U_{]\alpha;\beta[}$ engendré par les racines de l'intervalle $]\alpha; \beta[$.
(DRJ2) Pour toute $\alpha \in \Pi$ et tout $u \in U_\alpha \setminus \{1\}$, il existe $u', u'' \in U_{-\alpha}$ tels que $m(u) = u'uu''$ conjugue U_β sur $U_{s_\alpha\beta}$ pour toute $\beta \in \Phi$. En outre, pour tous u, v de $U_\alpha \setminus \{1\}$, on requiert $m(u)H = m(v)H$.
(DRJ3) Pour toute $\alpha \in \Pi$, on a $U_{-\alpha} \not\subset U_+$ où $U_+ = \langle U_\alpha : \alpha \in \Phi_+\rangle$.
(DRJ4) On a : $G = H \cdot \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi\rangle$.

Quand ces axiomes sont satisfaits, on note $G^\dagger$ le sous-groupe engendré par les groupes radiciels U_α de G.

La principale propriété d'une donnée radicielle jumelée pour G est de nature géométrique : c'est l'existence d'une action de G sur une paire d'immeubles jumelés [13, Section 2], disons $X_\pm$. Quand les groupes radiciels de G sont tous finis, on peut munir le groupe d'automorphisme $\mathrm{Aut}(X_\pm)$ d'une topologie localement compacte. Quand les groupes radiciels sont d'ordre fini assez grand, l'image diagonale $\overline{G}$ de G dans $\mathrm{Aut}(X_-) \times \mathrm{Aut}(X_+)$ est un réseau [7] : l'espace homogène $\frac{\mathrm{Aut}(X_-)\times\mathrm{Aut}(X_+)}{\overline{G}}$ porte une mesure invariante de volume total fini.

3. Propriété du sous-groupe normal

La propriété du sous-groupe normal pour un groupe G est la suivante : tout sous-groupe normal de G est ou bien d'indice fini, ou bien fini et central dans G. Dans l'énoncé qui suit, parler de propriété du sous-groupe normal est légèrement abusif dans le sens où la seconde possibilité de l'alternative est que le sous-groupe distingué soit dans le noyau commun, non nécessairement central, des actions sur les deux immeubles jumelés (dans le cas Kac–Moody, ce noyau est effectivement fini et central).

Théorème 3.1. *Soit G un groupe muni d'une donnée radicielle jumelée $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ de type (W, S) et soit $W(t)$ la fonction de croissance de W par rapport à S. Faisons les hypothèses suivantes.*

(NSP1) *Le groupe de Weyl W est infini.*
(NSP2) *Les ordres des groupes radiciels U_α sont tous finis et leur minimum $q_{\min}$ satisfait $W(\frac{1}{q_{\min}}) < \infty$.*

Alors tout sous-groupe de G qui est normalisé par $G^\dagger$, centralise $G^\dagger$ ou contient un sous-groupe d'indice fini de $G^\dagger$.

Les hypothèses (NSP1) et (NSP2) précisent complètement les conditions évoquées à la fin de la Section 2 pour que G soit un réseau du produit de ses immeubles. Pour les différentes contributions à la preuve de ce théorème, on renvoie à [1, Introduction]. La stratégie remonte à la preuve par G.A. Margulis de cette propriété pour les réseaux irréductibles des groupes de Lie de rang $\geqslant 2$ [3, VIII.2]. Il s'agit de montrer que les quotients des groupes considérés jouissent à la fois de la propriété d'être moyennable et de la propriété (T) de Kazhdan. Les techniques utilisées dans la généralisation du cas classique relèvent de la cohomologie à coefficients dans des représentations unitaires [10] et de la théorie des frontières de Poisson [1]. La condition que G soit un réseau est cruciale pour cette preuve. La non cocompacité du réseau G est une difficulté technique que l'on surmonte en prouvant l'intégrabilité d'un certain cocycle d'induction [9].

4. Restrictions sur les sous-groupes d'indice fini

La seconde partie de la preuve est plutôt combinatoire et relève de la théorie des groupes de Coxeter. Sa preuve fait usage de la géométrie du cône de Tits du groupe de Weyl W et d'une autre réalisation, à courbure négative ou nulle en un sens singulier, du complexe de Coxeter de (W, S).

Théorème 4.1. *Soit G un groupe muni d'une donnée radicielle jumelée $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ de type (W, S). Faisons les hypothèses suivantes.*

(FQ1) *Le système de Coxeter (W, S) est irréducible et son type n'est ni sphérique, ni affine.*
(FQ2) *Pour toute $\alpha \in \Pi$, le groupe radiciel U_α est nilpotent.*
(FQ3) *Pour toute $\alpha \in \Pi$, le groupe X_α engendré par U_α et $U_{-\alpha}$ n'est pas nilpotent.*

Soit K un sous-groupe normal d'indice fini de G. Alors pour toute racine α le groupe $K \cap X_\alpha$ n'est pas central dans X_α.

Le point essentiel est une propriété d'hyperbolicité faible des groupes de Coxeter infinis non affines, à savoir l'existence de configurations d'au moins trois demi-espaces radiciels deux à deux disjoints. Une autre illustration des propriétés d'hyperbolicité des groupes de Coxeter infinis non affines est l'alternative de Tits forte pour ces groupes [4]. Cette alternative et son amélioration [6] seront sans doute des outils importants de l'étude des groupes de Kac–Moody, minimaux ou complétés, à groupe de Weyl infini non affine.

5. Simplicité des réseaux de Kac–Moody

La combinaison des deux résultats précédents permet enfin de prouver le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Soit G un groupe muni d'une donnée radicielle jumelée $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ de type (W, S). Faisons les hypothèses suivantes.*

(S1) *Le système de Coxeter (W, S) est irréductible et son type n'est ni sphérique, ni affine.*
(S2) *Tout groupe radiciel est nilpotent fini et l'ordre minimal $q_{\min}$ de ces groupes satisfait $W(\frac{1}{q_{\min}}) < \infty$.*
(S3) *Pour toute $\alpha \in \Pi$, le groupe X_α engendré par U_α et $U_{-\alpha}$ est quasi-simple.*

Alors tout sous-groupe de G, normalisé par $G^\dagger$, centralise $G^\dagger$ ou contient $G^\dagger$.

Ce théorème implique le Théorème 1.1 de l'introduction. En effet, les groupes X_α ci-dessus sont dans ce cas les facteurs de Lévi semi-simples de rang 1. Ce sont des groupes finis de type de Lie ; ils satisfont (S3) quand $q \geqslant 4$. La condition (S2) est satisfaite pour $\mathbf{F}_q$ assez gros car les groupes radiciels sont alors les radicaux unipotents de sous-groupes de Borel des facteurs de Lévi ; ils sont d'ordre q ou q^3 et on a donc $q_{\min} = q$.

Références

[1] U. Bader, Y. Shalom, Factor and normal subgroup theorems for lattices in products of groups, Invent. Math. 163 (2006) 415–454.

[2] M. Burger, Sh. Mozes, Lattices in product of trees, Publ. Math. IHÉS 92 (2001) 151–194.
[3] G.A. Margulis, Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups, Springer, 1991.
[4] G.A. Margulis, È.B. Vinberg, Some linear groups virtually having a free quotient, J. Lie Theory 10 (2000) 171–180.
[5] R.V. Moody, A simplicity theorem for Chevalley groups defined by generalized Cartan matrices, Preprint, 1982.
[6] G.A. Noskov, È.B. Vinberg, Strong Tits alternative for subgroups of Coxeter groups, J. Lie Theory 12 (2002) 259–264.
[7] B. Rémy, Construction de réseaux en théorie de Kac–Moody, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 329 (1999) 475–478.
[8] B. Rémy, Topological simplicity, commensurator super-rigidity and non-linearities of Kac–Moody groups. With an appendix by P. Bonvin, Geom. Funct. Anal. 14 (2004) 810–852.
[9] B. Rémy, Integrability of induction cocycles for Kac–Moody groups, Math. Ann. 333 (2005) 29–43.
[10] Y. Shalom, Rigidity of commensurators and irreducible lattices, Invent. Math. 141 (2000) 1–54.
[11] J. Tits, Uniqueness and presentation of Kac–Moody groups over fields, J. Algebra 105 (1987) 542–573.
[12] J. Tits, Groupes associés aux algèbres de Kac–Moody, in : Séminaire Bourbaki, exposé 700, in : Astérisque, vols. 177–178, 1989, pp. 7–31.
[13] J. Tits, Twin buildings and groups of Kac–Moody type, in: London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 165, 1992, pp. 249–286.