Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 807–812
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Le régulateur p-adique

Nadia Hamida

Institut national des sciences appliquées et technologie (I.N.S.A.T), Centre urbain nord, B.P. 676, 1080 Tunis cedex, Tunisie

Reçu le 15 septembre 2004 ; accepté après révision le 21 février 2006

Disponible sur Internet le 3 mai 2006

Présenté par Alain Connes

Résumé

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit un régulateur p-adique $R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{Q}_p$ dont on donne une formule explicite et dont on établit la non trivialité pour $n = 1$. Les idées sont inspirées d'une Note publiée en 2000 relative au cas transcendant. ***Pour citer cet article : N. Hamida, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

The p-adic regulator. For all $n \in \mathbf{N}^*$, we define a p-adic regulator $R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{Q}_p$ given by an explicit formula and we show that R_p is non-trivial for $n = 1$. The main ideas come from a Note published in 2000 for the transcendental case. ***To cite this article: N. Hamida, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

In this Note, we construct and study an explicitly given $(2n+1)$-cocycle of the group $\mathrm{GL}(\mathbf{Z}_p)$. The main ideas come from a previous work [4] for the transcendental case $\mathrm{GL}(\mathbf{C})$ where we proved that such a cocycle defines the Borel regulator. The p-adic analog of this result has turned out to be a more sophisticated problem.

Let $K_n(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p)$ be the Goodwillie relative K-theory of $\mathbf{Z}_p$ mod $p\mathbf{Z}_p$. We then define a p-adic regulator

$$R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \longrightarrow p\mathbf{Z}_p$$

such that $R_p([f]) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(2n)!(2n+1)!} \mathrm{Tr} \int_{\Delta_{2n+1}} (\nu^{-1}\,\mathrm{d}\nu)^{2n+1}$.

Here $\nu(x_0, \ldots, x_{2n+1}) = \sum_{i=0}^{2n} x_i g_{i+1} \cdots g_{2n+1} + x_{2n+1}$ with $(x_0, \ldots, x_{2n+1}) \in \Delta_{2n+1}$, the $(2n+1)$-standard simplex and $(g_1, \ldots, g_{2n+1}) = h([f])$ (h the Hurewicz homomorphism).

We treat here the first non-trivial case $n = 1$ and we show that the cohomology class of our cocycle is non-trivial. More precisely, we compare it with the p-adic dilogarithm.

Let $\varphi(g_0, g_1, g_2, g_3) = \mathrm{Tr} \int_{\Delta_3} (\nu^{-1}\,\mathrm{d}\nu)^3$. Then φ is cohomologous to

$$c(g_0, g_1, g_2, g_3) = D_p\big(r_2(g_0 v, g_1 v, g_2 v, g_3 v)\big),$$

Adresse e-mail : Nadia.Hamida@insat.rnu.tn (N. Hamida).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.02.039

the p-adic dilogarithm of the cross-ratio r_2 where $v \in \mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ is a point of the projective space (see Theorems 2.2.1 and 2.2.2).

1. Les groupes de K-théorie relative

1.1. La K-théorie relative de Goodwillie

Soient A un anneau et I un idéal bilatère. On désigne par $\overline{\mathrm{GL}}(A/I) := \mathrm{Im}(\mathrm{GL}(A) \to \mathrm{GL}(A/I))$ et par $\mathcal{K}(A, I)$ la fibre homotopique de l'application $\mathrm{BGL}(A)^+ \to \mathrm{B}\overline{\mathrm{GL}}(A/I)^+$.

Définition 1.1.1. On définit la K-théorie relative de Goodwillie par la formule

$$K_n(A, I) = \Pi_n\big(\mathcal{K}(A, I)\big).$$

Cette K-théorie admet un modèle simplicial (de Volodin). En effet, soit

$$X(A, I) := \bigcup_{\gamma} BT^{\gamma}(A, I)$$

où γ est un ordre partiel et où $T_n^{\gamma}(A, I) = \{1 + (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(A) \mid a_{ij} \in I \ i \not<^{\gamma} j\}$. On a alors le résultat suivant (cf. [7]) :

Proposition 1.1.2. *Il existe une équivalence d'homotopie naturelle*

$$X(A, I)^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}(A, I).$$

1.2. La K-théorie relative de Karoubi

Définition 1.2.1. Soient A un anneau de Banach et $\mathcal{F}_A$ la fibre homotopique de l'application canonique $\mathrm{BGL}(A)^+ \to \mathrm{BGL}(A)^{\mathrm{top}}$. On définit alors la K-théorie relative de Karoubi par

$$K_n^{\mathrm{rel}}(A) := \Pi_n(\mathcal{F}_A).$$

Remarque 1.2.2. Soit A un anneau de Banach ultramétrique (i.e. muni d'une quasi-norme vérifiant $\forall (x, y) \in A^2$, $\|x + y\| \leqslant \mathrm{Sup}(\|x\|, \|y\|)$). La définition de la K-théorie relative de A admet alors une interprétation simpliciale.

En effet, soit m un entier positif fixé et soit A_* l'anneau simplicial défini par $A_n = B_n/I_n$. Ici B_n désigne l'anneau des séries formelles à $n + 1$ variables :

$$P(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i_0 \cdots i_n} a_{i_0 \cdots i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$$

à coefficients dans A telles que $(i_0 \cdots i_n)^m \|a_{i_0 \cdots i_n}\| \to 0$ et I_n est l'idéal engendré par $x_0 + \cdots + x_n - 1$.

On a alors une fibration homotopique

$$\big(\mathrm{GL}(A_*)/\,\mathrm{GL}(A)\big)^+ \xrightarrow{\theta^+} \mathrm{BGL}(A)^+ \longrightarrow \mathrm{BGL}(A_*)$$

où θ est l'application définie par $\theta(\sigma) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i = \tilde{\sigma}(i - 1)\tilde{\sigma}(i)^{-1}$ (où $\tilde{\sigma}$ est un représentant de $\sigma \in \mathrm{GL}(A_n)/\,\mathrm{GL}(A)$).

On montre alors que

$$K_n^{\mathrm{rel}}(A) = \Pi_n\big(\big(\mathrm{GL}(A_*)/\,\mathrm{GL}(A)\big)^+\big).$$

En effet, les groupes de K-théorie topologique de l'ensemble simplicial A_* sont indépendants de m et coïncident avec les groupes usuels de K-théorie topologique de A.

Le théorème suivant compare ces deux K-théories relatives :

Théorème 1.3. *Soient A un anneau de Banach ultramétrique et I un idéal bilatère fermé topologiquement nilpotent (i.e. $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{Sup}\{\|x\|, x \in I^k\} = 0$) tels que A/I soit noethérien régulier discret. Alors il existe un isomorphisme*

$$K_n(A,I) \longrightarrow K_n^{\mathrm{rel}}(A).$$

Cet isomorphisme est induit par l'application simpliciale

$$\varphi : X(A,I) \longrightarrow \mathrm{GL}(A_*)/\mathrm{GL}(A)$$

définie pour tout $(g_1,\ldots,g_r) \in T^\gamma(A,I)^r \subset X_r(A,I)$ *par*

$$\varphi(g_1,\ldots,g_r) = \left[\tilde{\sigma} = \sum_{i=0}^{r-1} g_{i+1}\cdots g_r x_i + x_r\right].$$

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ la fibre homotopique de $\mathrm{BGL}(A)^+ \to \mathrm{BGL}(A/I)^{\mathrm{top}}$. D'après [1], la surjection canonique de A dans A/I induit un isomorphisme $K_n^{\mathrm{top}}(A) \to K_n^{\mathrm{top}}(A/I)$. D'où une équivalence d'homotopie $\mathcal{F}_A \to \mathcal{H}$. D'autre part, soit $\mathcal{H}'$ la fibre homotopique de $\mathrm{BGL}(A)^+ \to \mathrm{BGL}(A/I)^+$. On a $\Pi_i(\mathrm{B}\overline{\mathrm{GL}}(A/I)^+) = \Pi_i(\mathrm{BGL}(A/I)^+)$ si $i \geqslant 2$. D'où un morphisme $\mathcal{K}(A,I) \to \mathcal{H}'$ qui induit un isomorphisme en homotopie pour $i \geqslant 2$.

De plus, on sait que si R est un anneau noethérien régulier discret, on a un isomorphisme entre les K-théories algébrique et « topologique » de R. Donc $\mathrm{BGL}(A/I)^+$ a le type d'homotopie de $\mathrm{BGL}(A/I)^{\mathrm{top}}$. D'où une équivalence d'homotopie $\mathcal{H}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$. □

La composition de tous ces isomorphismes donne l'isomorphisme cherché.

Remarque 1.4. L'isomorphisme φ défini ci-dessus s'insère dans un diagramme commutatif faisant intervenir l'isomorphisme $K_n^{\mathrm{top}}(A) \to K_n^{\mathrm{top}}(A/I)$ défini dans [1] de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} K_n^{\mathrm{rel}}(A) & \longrightarrow & K_n(A) & \longrightarrow & K_n^{\mathrm{top}}(A) \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & & & \downarrow \\ K_n(A,I) & \longrightarrow & K_n(A/I) & \longrightarrow & K_n^{\mathrm{top}}(A/I). \end{array}$$

2. Construction et calcul du régulateur p-adique

2.1. Construction du régulateur p-adique

La construction du régulateur p-adique utilise le caractère de Chern relatif (cf. [5]) :

Théorème 2.1.1. *Soit A une $\mathbf{Q}$-algèbre ultramétrique vérifiant la condition suivante : il existe un entier s et une constante C_s tels que $\|1/k\| \leqslant C_s k^s$ $\forall k \in \mathbf{N}^*$. Alors il existe des homomorphismes*

$$\mathrm{ch}_n^{\mathrm{rel}} : K_n^{\mathrm{rel}}(A) \longrightarrow C_{n-1}^{\lambda\,\mathrm{top}} A/b\big(C_n^{\lambda\,\mathrm{top}} A\big)$$

qui rendent commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} K_n^{\mathrm{rel}}(A) & \longrightarrow & K_n(A) & & \\ \downarrow & & & \searrow{\scriptstyle D_n^{\mathrm{top}}} & \\ C_{n-1}^{\lambda\,\mathrm{top}} A/b\big(C_n^{\lambda\,\mathrm{top}} A\big) & \xrightarrow{B} & C_n^{\mathrm{top}} A/b\big(C_{n+1}^{\mathrm{top}} A\big) & \longleftarrow & H_n^{\mathrm{top}}(A,A) \end{array}$$

où B est l'opérateur de Connes, D_n^{top} est l'homomorphisme de Dennis et où $(C_*^{\lambda\,\mathrm{top}}(A), b)$ est le complexe qui définit l'homologie cyclique topologique de A.

Ce théorème nous permet de définir pour tout $n \geqslant 1$ un homomorphisme $\widetilde{R}_p$ comme la composée des applications

$$K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \xrightarrow{\varphi} K_{2n+1}^{\mathrm{rel}}(\mathbf{Z}_p) \longrightarrow K_{2n+1}^{\mathrm{rel}}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\mathrm{ch}_{2n+1}^{\mathrm{rel}}} C_{2n}^{\lambda\,\mathrm{top}}(\mathbf{Q}_p)/b\big(C_{2n+1}^{\lambda\,\mathrm{top}}(\mathbf{Q}_p)\big).$$

Définition–Proposition 2.1.2. L'image de $\widetilde{R}_p$ définie ci-dessus est contenue dans le sous-groupe $HC_{2n}^{\text{top}}(\mathbf{Q}_p)$ de $C_{2n}^{\lambda\,\text{top}}\mathbf{Q}_p/b(C_{2n+1}^{\lambda\,\text{top}}\mathbf{Q}_p)$.

On définit alors le régulateur p-adique

$$R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \xrightarrow{\tilde{R}_p} HC_{2n}^{\text{top}}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{S^{\text{top}}} HC_0^{\text{top}}(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$$

où l'application S^{top} est l'équivalent topologique de l'opérateur de périodicité de Connes.

Proposition 2.1.3. *Pour tout $[f] \in K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p)$, le régulateur R_p est défini par :*

$$R_p\big([f]\big) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(2n)!(2n+1)!}\operatorname{Tr}\int_{\Delta_{2n+1}} \big(\nu^{-1}\,\mathrm{d}\nu\big)^{2n+1}$$

où $\nu(x_0, \ldots, x_{2n+1}) = \sum_{i=0}^{2n} x_i g_{i+1} \cdots g_{2n+1} + x_{2n+1}$ avec $(x_0, \ldots, x_{2n+1}) \in \Delta_{2n+1}$ le $(2n+1)$-simplexe standard et $(g_1, \ldots, g_{2n+1}) = h([f])$ (h étant l'homomorphisme de Hurewicz).

Remarque 2.1.4.

- Cette formule explicite pour R_p nous permet d'affiner le résultat et de montrer que l'image de R_p est contenue dans le sous-groupe $p\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Q}_p$.
- Comme les K-théories algébrique et topologique de $\mathbf{Z}/p$ sont égales, la Remarque 1.4 nous permet donc de définir R_p de $K_n(\mathbf{Z}/p)$ vers $p\mathbf{Z}_p$.

2.2. Calcul de R_p

On va s'intéresser à $R_p : K_3(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \to p\mathbf{Z}_p$ pour établir sa non trivialité. Plus précisément, on montre que R_p est défini par le dilogarithme p-adique D_p d'un certain birapport r_2 (cf. [3]).

Théorème 2.2.1. *Soit $v \in \mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ un point fixé de l'espace projectif et soit $(g_0, g_1, g_2, g_3) \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)^4$ avec (g_0v, g_1v, g_2v, g_3v) en position générale.*

Soit $c(g_0, g_1, g_2, g_3) = D_p(r_2(g_0v, g_1v, g_2v, g_3v))$. Alors

(i) *c est un 3-cocycle mesurable localement borné de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*
(ii) *Le cap-produit $H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cap c^*} \mathbf{Q}_p$ est non trivial.*

Démonstration. (i) C'est une conséquence de l'identité fonctionnelle du dilogarithme

$$D_p(xy) = D_p(x) + D_p(y) - D_p\left(\frac{x}{x-1}(1-y)\right) - D_p\left(\frac{y}{y-1}(1-x)\right).$$

(ii) D'après Bloch, on a une suite exacte longue (cf. [3])

$$\cdots \longrightarrow H_3\big(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}\big) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\beta} \bigwedge^2\big(\mathbf{Q}_p^\times/\mu_{\mathbf{Q}_p}\big) \longrightarrow K_2(\mathbf{Q}_p) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ désigne le groupe abélien libre de générateurs $\{z\}$ avec $z \in \mathbf{Q}_p^* - \{1\}$ et les relations

$$\{z_1\} - \{z_2\} + \left\{\frac{z_2}{z_1}\right\} + \left\{\frac{1-z_2}{1-z_1}\right\} - \left\{\frac{1-z_2^{-1}}{1-z_1^{-1}}\right\} = 0$$

et où $\bigwedge^2$ désigne la deuxième puissance extérieure.

On montre que l'application α envoie le 3-simplexe (g_0, g_1, g_2, g_3) sur $\{z\}$, z désignant le birapport de (g_0v, g_1v, g_2v, g_3v) et d'après [3], l'application β envoie $\{z\}$ sur $z \wedge (1-z)$. Soit $B(\mathbf{Q}_p) = \operatorname{Ker}\beta$ le groupe de Bloch.

Considérons l'application surjective $\bar{\alpha}: H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p) \to B(\mathbf{Z})$ induite par α. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H_3\big(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}\big) \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[dr, "\cap c^*"'] & B(\mathbf{Q}_p) \arrow[d, "D_p"] \\ & \mathbf{Q}_p \end{tikzcd}$$

Donc, pour démontrer la non-trivialité de $H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cap c^*} \mathbf{Q}_p$, il suffit de trouver un élément dans $B(\mathbf{Q}_p)$ pour lequel D_p ne s'annule pas.

Soit ξ une racine $(p-1)$-ième de l'unité. On a alors $(p-1)\{\xi^{-a}\} \in B(\mathbf{Q}_p)$. Il faut montrer que

$$D_p\big((p-1)\{\xi^{-a}\}\big) = (p-1) l_{2,p}\big(\xi^{-a}\big) \neq 0.$$

Or, Coleman (cf. [2]) a démontré une formule pour les L-fonctions p-adiques

$$L_p(\Xi, 2) = \left(1 - \frac{\Xi(p)}{p^2}\right) g(\Xi, \xi) d^{-1} \sum_{a=1}^{d-1} \overline{\Xi}(a) l_{2,p}\big(\xi^{-a}\big)$$

où Ξ est un caractère primitif de Dirichlet de conducteur d. Il suffit de montrer que $L_p(\Xi, 2) \neq 0$.

Puisque $\xi \in \mu_{p-1}$, il existe alors i tel que $\Xi = w^i$, où w est le caractère de Teichmuller. Donc $L_p(\Xi, 2) = \zeta_{i,p}(2) = g_i((1+p)^2 - 1)$ où $\zeta_{i,p}$ est la i-ième branche de la fonction zêta p-adique et où $g_i(T) \in \mathbf{Z}_p[[T]]$. Donc on a une série formelle où tous les termes sont divisibles par p sauf peut être la constante. Ceci implique que si la valuation p-adique $v_p(\zeta_{i,p}(k_0)) \neq 0$ pour un certain k_0 alors $v_p(\zeta_{i,p}(k)) \neq 0$ pour tout k.

Or $\zeta_p(-1) = \frac{-1}{12}$, on choisit donc la i-ème branche qui passe par $\zeta_p(-1)$. Ceci implique que la constante n'est pas divisible par p donc que

$$\zeta_{i,p}(2) = \big(1 - p^{-2}\big)\zeta_p(2) = \big(1 - w^{2i} p^{-2}\big) L\big(w^{2i}, 2\big)$$

n'est pas divisible par p donc non nulle. □

Corollaire 2.2.2. *Pour tout nombre premier p, le régulateur p-adique*

$$R_p : K_3(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \longrightarrow p\mathbf{Z}_p$$

est non trivial.

Démonstration. Soit

$$\varphi(g_0, g_1, g_2, g_3) = \mathrm{Tr} \int_{\Delta_3} \big(\nu^{-1}\, \mathrm{d}\nu\big)^3$$

où

$$\nu(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{3} g_i^{-1} g_3 x_i.$$

Alors φ est un 3-cocycle homogène sur $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ à valeurs dans $p\mathbf{Z}_p$ et R_p est la composée de l'homomorphisme de Hurewicz et du cap-produit par φ. Donc il suffit de montrer que φ est cohomologue à c pour conclure à la non-trivialité de R_p.

On considère alors l'isomorphisme $u^3 : H_c^3(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p) \to H^3(\mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p)$ entre la cohomologie continue du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et la cohomologie de son algèbre de Lie $\mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p)$ défini dans [6]. Puisque la cohomologie $H^*(\mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p)$ est définie par le complexe

$$Z_* = \mathrm{Hom}\Big(U\, \mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p) \otimes \bigwedge^{*} \mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p\Big)$$

et puisque $\dim \mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p) = 3$, on a $\bigwedge^4 \mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p) = 0$, $\bigwedge^3 \mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$ et la différentielle $d_2 : Z_3 \to Z_2$ nulle. Donc $\dim H_c^3(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p) = \dim H^3(\mathrm{sl}_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p) = 1$.

Ainsi les deux cocycles φ et c sont cohomologues puisque $u^3(\varphi)$ n'est pas un cobord. □

Remerciements

Je remercie A.B. Goncharov pour des très utiles discussions, et pour son intérêt dans ce travail.

Références

[1] A. Calvo, K-théorie des anneaux ultramétriques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 300 (14) (1985).
[2] R.F. Colemann, Dilogarithms, Regulators and p-adic L-functions, Invent. Math. 69 (1982) 171–208.
[3] J.L. Dupont, C.H. Sah, Scissors congruences, II, J. Pure Appl. Algebra 25 (1982) 159–195.
[4] N. Hamida, Description explicite du régulateur de Borel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 330 (2000) 169–172.
[5] M. Karoubi, Homologie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 297 (10) (1983) 557–560.
[6] M. Lazard, Groupes analytiques p-adiques, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 26 (1965).
[7] J.L. Loday, Cyclic Homology, Springer-Verlag, 1991.