Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 853–858
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Stabilisation d'ondes électromagnétiques dans un domaine extérieur 2D

Ammar Moulahi

Département de mathématiques, faculté des sciences de Monastir, 5019 Monastir, Tunisie

Reçu le 15 novembre 2005 ; accepté après révision le 14 mars 2006

Disponible sur Internet le 18 avril 2006

Présenté par Gilles Lebeau

Résumé

On étudie le problème de stabilisation frontière des équations de Maxwell à l'extérieur d'un obstacle borné avec condition de Silver-Müller au bord en dimension deux. En étudiant l'équation des ondes amorties de type Neumann au bord et sous la condition de contrôle géométrique extérieur, on déduit le comportement des solutions en temps grand. ***Pour citer cet article : A. Moulahi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Stabilization of electromagnetics waves on an exterior bounded obstacle 2D. We consider the stabilization of Maxwell equations in two dimensional on the exterior of an arbitrary bounded obstacle. Using some results concerning of wave equations with Neumann boundary condition in the exterior domain. We deduce under the 'exterior geometric control condition' the behavior of the solution for large time. ***To cite this article: A. Moulahi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

In this Note, our objective is to study the stabilization of Maxwell equations using the results recently established in [1,3,4,7] and [6], concerning the wave equations. For that purpose, we apply certain technics inspired from those developed in [7]. These technics are closely linked to the propagation defect measure theorem [5].

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be the complement of the closure of a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$. If we assume that $(\{\alpha(x) > 0\} \cap \partial\Omega, T)$ satisfies the 'exterior geometric control', see [7], then for all (e_0, h_0) in a suitable space having compact support, there exists $c > 0$ such that the solution (e, h) of the following problem:

$$\begin{cases} \partial_t e = \mathbf{Rot}(\mu h), \quad \partial_t h = -\mathbf{rot}(\varepsilon e), \quad \operatorname{div} e = 0 \quad \text{on } \Omega \times (0, +\infty), \\ \nu \wedge e - \alpha(x) h = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, +\infty) = 0, \quad e(\cdot, 0) = e_0, \quad h(\cdot, 0) = h_0 \quad \text{on } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

verifies the energy estimation

Adresse e-mail : ammar.moulahi@fsm.rnu.tn (A. Moulahi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.03.020

$$\mathcal{E}_R(e,h)(t) \leqslant \frac{c}{t}\mathcal{E}(e,h)(0),$$

where $\mathcal{E}_R(e,h)(t) = \int_{\Omega_R} \varepsilon|\partial_t e|^2 + \mu|\partial_t h|^2$ and $\mathcal{E}(e,h)(t) = \int_{\Omega} \varepsilon|\partial_t e(\cdot,t)|^2 + \mu|\partial_t h(\cdot,t)|^2\,\mathrm{d}x$.

Moreover, we study the interior stabilization for the Maxwell equations and prove a similar result for the boundary stabilization problem.

1. Présentation du problème

Soient $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, à bord régulier $\partial\mathcal{O}$ et $\alpha(x) \in C^\infty(\partial\mathcal{O}, \mathbb{R}_+)$. Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}}$, est occupé par un champ électromagnétique (e,h) avec une permittivité éléctrique ε et une perméabilité μ. On considère le système de Maxwell suivant :

$$\begin{cases} \partial_t e = \mathbf{Rot}(\mu h), \quad \partial_t h = -\,\mathbf{rot}(\varepsilon e), \quad \operatorname{div} e = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ \nu \wedge e - \alpha(x)h = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) = 0, \quad e(\cdot,0) = e_0, \quad h(\cdot,0) = h_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $\nu(x)$ le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega$, $e \wedge \nu = e.\tau$, τ est le vecteur tangentiel unitaire, $\mathbf{rot}\, e = \partial_x e_2 - \partial_y e_1$, $\mathbf{Rot}\, h = (\partial_y h, -\partial_x h)$, μ et ε sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit $M_\alpha(u,v) = (\mathbf{Rot}\,\mu v, -\,\mathbf{rot}\,\varepsilon u)$ l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $\mathcal{L}(\Omega) = (L^2(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$ muni de la norme $\|(f,g)\|^2 = \|\sqrt{\varepsilon} f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\mu} g\|^2_{L^2(\Omega)}$ de domaine $D(M_\alpha)$, défini comme suit

$$D(M_\alpha) = \big\{(f,g) \mid (\mathbf{Rot}\,\mu g, -\,\mathbf{rot}\,\varepsilon f) \in \mathcal{L}(\Omega);\ \nu \wedge f(x) + \alpha(x)g(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\big\}.$$

On rappelle que l'opérateur M_α est dissipatif ainsi que son adjoint M_α^*. Alors, l'opérateur M_α engendre un semi groupe de contraction de classe C^0, unitaire pour $\alpha \equiv 0$. Soit $\mathcal{M} = \{v \in D(M_\alpha);\ M_\alpha^* v = 0\}$, et soit $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}^\perp_{\mathcal{L}}$. Le noyau de M_α^* est non vide, puisque il contient $(\varepsilon^{-1}\nabla\varphi, 0)$ tel que $\nu \wedge \varphi = 0$. On a le résultat de régularité suivant :

$$\forall (e_0, f_0) \in \mathcal{M}_1 \cap D(M_\alpha)\ ;\ \exists! (e,h) \in C^0\big(]0,+\infty[, \mathcal{M}_1 \cap D(M_\alpha)\big) \cap \big(]0,+\infty[, \mathcal{L}\big) \text{ solution de (2).}$$

Soit $R > 0$ tel que $\overline{O} \subset B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < R\}$, on pose $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. Pour $u = (e,h)$ solution de (2), en posant $\mathcal{E}_R(u)(t)$ l'énergie locale concentrée dans le domaine Ω_R à l'instant t donnée par

$$\mathcal{E}_R(u)(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} \varepsilon|\partial_t e|^2 + \mu|\partial_t h|^2\,\mathrm{d}x.$$

On suppose que $\omega_1 = \{\alpha(x) > 0\}$ vérifie la condition de contrôle géométrique extérieur (C.G.E.) au-dessus de B_R, i.e. il existe $T > 0$ tel que pour tout rayon bicaractéristique généralisé γ issu d'un point de $T^*(\Omega_R \times \mathbb{R}_+)$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- γ quitte $\Omega_R \times \mathbb{R}_+$ avant l'instant T,
- γ rencontre la zone $\omega_1 \times \mathbb{R}_+$ en un point non diffractif entre les instants 0 et T.

De plus on suppose que $\partial\Omega$ n'a pas de contact d'ordre infini avec ses tangentes. Par un argument de propagation des mesures de défaut microlocales, on démontre le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que $0 < c_1 \leqslant \varepsilon(x), \mu(x) \leqslant c_2$, $\varepsilon, \mu \in C^2(\Omega)$ et $\varepsilon \equiv \mu \equiv 1$ pour $\|x\|$ suffisamment grand. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $(e_0, h_0) \in \{\mathbf{rot}\,\varepsilon e_0 \in L^2(\Omega);\ \mathbf{Rot}\,\mu h_0 \in (L^2(\Omega))^2 \operatorname{div} e_0 = 0$ dans Ω et $\nu \wedge e_0 - \alpha(x)h_0 = 0$ sur $\partial\Omega\}$, à support dans B_R, la solution du problème (2) de donnée initiale (e_0, h_0) vérifie l'inégalité*

$$\mathcal{E}_R(u)(t) \leqslant \frac{C}{t}\mathcal{E}(u)(0).$$

Le second problème de stabilisation étudié est :

$$\begin{cases} \partial_t e = \mathbf{Rot}(\mu h), \quad \partial_t h = -\,\mathbf{rot}(\varepsilon e) - \sigma(x)h, \quad \operatorname{div} e = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ \nu \wedge e = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) = 0, \quad e(\cdot,0) = e_0, \quad h(\cdot,0) = h_0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

où $\sigma \in C(\Omega; \mathbb{R}_+)$ à support compact. On montre à l'aide de la propagation des mesures de défaut microlocales, le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Supposons que* $0 < c_1 \leqslant \varepsilon(x), \mu(x) \leqslant c_2$, $\varepsilon, \mu \in C^2(\Omega)$ *et* $\varepsilon \equiv \mu \equiv 1$ *pour* $\|x\|$ *suffisamment grand,* $\omega_2 = \{\sigma > 0\}$ *vérifie la condition de (C.G.E.) au-dessus de* B_R*. Alors il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $(e_0, h_0) \in \{\mathbf{rot}\,\varepsilon e_0 \in L^2(\Omega); \mathbf{Rot}\,\mu h_0 \in (L^2(\Omega))^2\ \operatorname{div} e_0 = 0$ *dans* Ω *et* $\nu \wedge e_0 = 0$ *sur* $\partial\Omega\}$*, à support dans* B_R*, la solution du problème* (3) *de donnée initiale* (e_0, h_0) *vérifie l'inégalité*

$$\mathcal{E}_R(u)(t) \leqslant \frac{C}{t}\mathcal{E}(u)(0).$$

2. Schéma de la preuve du Théorème 1.1

Soit (e, h) solution du système (2), on obtient ainsi que le champ magnétique h est solution du système hyperbolique

$$\begin{cases} \partial_t^2 h + \mathbf{rot}\,\varepsilon\,\mathbf{Rot}\,\mu h = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad \partial_\nu \mu h + \alpha(x)\partial_t h = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ h(\cdot, 0) = h_0, \quad \partial_t h(\cdot, 0) = -\,\mathbf{rot}\,\varepsilon e_0 \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag*{$(1)_h$}$$

et, le champ éléctrique e est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t^2 e + \mathbf{Rot}\,\mu\,\mathbf{rot}\,\varepsilon e = 0, \quad \operatorname{div} e = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \partial_t e \wedge \nu + \alpha(x)\,\mathbf{rot}\,\varepsilon e = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad e(\cdot, 0) = e_0, \quad \partial_t e(\cdot, 0) = \mathbf{Rot}\,\mu h_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag*{$(1)_e$}$$

Soit h solution du système $(1)_h$ dont les conditions initiales vérifiant $\operatorname{div} e_0 = 0$ et $\nu \wedge e_0 - \alpha(x)h_0 = 0$, on considère e solution du problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t e = \mathbf{Rot}\,\mu h, \quad e(\cdot, 0) = e_0.$$

On obtient que e et h sont respectivement solutions de $(1)_e$ et $(1)_h$. Avec des outils classiques d'équations différentielles ordinaires, on prouve que (e, h) est une solution de (2). Donc, l'étude du comportement asymptotique en temps grand de l'énergie locale de (2) se déduit de celle du problème $(1)_h$.

Pour simplifier, on prend $\varepsilon \equiv \mu \equiv 1$. On considère donc le problème suivant :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \partial_\nu u + \alpha(x)\partial_t u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(\cdot, 0) = f_1, \quad \partial_t u(\cdot, 0) = f_2 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$, d étant un entier pair et $(f_1, f_2) = f \in H = \widetilde{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ le complété de $C_0^\infty(\overline{\Omega})^2$ pour la norme $\|f\|^2 = \int_\Omega |\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Pour $u(x, t)$ solution de (4), on note

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\partial_t u(\cdot, t)\right|^2 + \left|\nabla_x u(\cdot, t)\right|^2\right)\mathrm{d}x.$$

Soit $A_\alpha(u, v) = (v, \Delta u)$ défini sur l'espace de Hilbert H, de domaine

$$D(A_\alpha) = \left\{f = (f_1, f_2) \in H \text{ tel que } (f_2, \Delta f_1) \in H \text{ et } \partial_\nu f_1 + \alpha(x)f_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}.$$

Le problème se réecrit donc sous la forme $\partial_t U_\alpha(t)f = AU_\alpha(t)f$ où $U_\alpha(t)f = (u, \partial_t u)$ et qui est équivalent au problème (4).

L'opérateur A_α est maximal dissipatif, voir par exemple [1]. Pour $U_0 \in D(A_\alpha)$, on note $U(t, x) = (u, \partial_t u) = \mathrm{e}^{tA_\alpha}U_0$. Soit U solution du problème d'évolution suivant :

$$(\partial_t - A_\alpha)U = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}, \quad U_{|t=0} = U_0 \in D(A_\alpha).$$

Soit $u_\alpha(t)f$ le propagateur des ondes c'est à dire $u_\alpha(t)f$ est égale à la première composante de $\mathrm{e}^{tA_\alpha}(0, f)$ où f est telle que $(0, f) \in D(A_\alpha)$. Alors $u_\alpha(t)f$ vérifie l'équation suivante

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u_\alpha(t)f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \partial_\nu u_\alpha(t)f + \alpha(x)\partial_t u_\alpha(t)f = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u_\alpha(0)f = 0, \quad \partial_t u_\alpha(0)f = f \in \left\{f \in C_0^\infty(\overline{\Omega}),\ f \equiv 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \operatorname{supp}\alpha\right\}. \end{cases} \tag{5}$$

L'opérateur $R_\alpha(\lambda)$ est défini par la relation

$$R_\alpha(\lambda)f = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}u_\alpha(t)f\,\mathrm{d}t \quad \text{pour } \lambda \in \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}(\lambda) < 0\right\}. \tag{6}$$

Comme A_α est maximal dissipatif, alors d'après le Théorème de Hille Yosida, il engendre sur H un semi groupe de contraction $(U_\alpha(t))_{t\geqslant 0}$. Donc, il est clair que la relation (6) définit une famille d'opérateurs bornés de

$$V(\Omega)=\{f\in H^1(\Omega),\ f=0 \text{ sur } \{\alpha>0\}\cap\partial\Omega\}$$

dans

$$\widetilde{H}(\Omega)=\{u\in H^2(\Omega),\ \partial_\nu u+\mathrm{i}\lambda\alpha(x)u=0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

holomorphe dans $\{\operatorname{Im}\lambda<0\}$.

Soit $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\chi\equiv 1$ sur B_R. La résolvante sortante tronquée

$$R_{\alpha,\chi}(\lambda)=\chi R_\alpha(\lambda)\chi$$

considérée comme un opérateur de $V(\Omega)$ dans $\widetilde{H}(\Omega)$ holomorphe dans $\{\lambda\in\mathbb{C};\ Im\lambda<0\}$, s'étend en un opérateur méromorphe dans le revêtement simplement connexe de $\mathbb{C}^*$. On a le résultat suivant

Théorème 2.1. *Ils existent $\delta_0>0$ et $\lambda_0>0$ tel que la résolvante sortante tronquée $R_{\alpha,\chi}(\lambda)$ se prolonge d'une manière holomorphe dans la région*

$$\{\lambda\in\mathbb{C},\ \operatorname{Im}(\lambda)\leqslant\delta_0,\ |\operatorname{Re}\lambda|\geqslant\lambda_0\}. \tag{7}$$

Plus précisement, il existe $c>0$ tel que pour toute $f\in V(\Omega)$, $\operatorname{supp} f\subset B_R$ et pour tout λ appartenant à la région précédente, on a

$$\|\nabla R_{\alpha,\chi}(\lambda)f\|^2_{L^2_R}+\|\lambda R_{\alpha,\chi}(\lambda)f\|^2_{L^2_R}\leqslant c\|f\|^2_{L^2}. \tag{8}$$

On déduit que la décroissance de l'énergie est en $1/t$:

Théorème 2.2. *Sous l'hypothèse de (C.G.E.) au dessus de B_R, la solution u du problème* (4) *de donnée initiale $f\in\{u\in H^1(\Omega),\ u=0$ sur $\{\alpha>0\}\cap\partial\Omega\}$ à support dans B_R, vérifie l'inégalité*

$$E_R(u)(t)\leqslant\frac{c}{t}E(u)(0).$$

La preuve du Théorème 1.1 se déduit du Théorème 2.2. La démonstration du Théorème 2.1 se décompose en trois étapes :

Étape 1. En utilisant la résolvante libre, on montre que la résolvante tronquée s'étend en un opérateur méromorphe sur la surface de Riemann du logarithme.

Étape 2. On montre que la résolvante est bornée pour λ proche de 0 dans le secteur $\Lambda_\gamma=\{\lambda\in\mathbb{C};\ \operatorname{Re}(\gamma\lambda)\geqslant|\operatorname{Im}(\gamma\lambda)|\}$. On recouvre un voisinage de demi-plan supérieur privé de 0 par un nombre fini Λ_{γ_i}, ce qui permet de conclure que la résolvante est bornée au voisinage de 0 voir par exemple [2].

Étape 3. Par un raisonnement par l'absurde, on suppose qu'il existe λ_n vérifiant $\operatorname{Im}\lambda_n\to 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_n)\geqslant n$ tel que

$$\|\nabla R_\alpha(\lambda_n)f_n\|^2_{L^2_R}+\|\lambda_n R_\alpha(\lambda_n)f_n\|^2_{L^2_R}\geqslant n\|f_n\|^2_{L^2}.$$

On note $u_n=R_\alpha(\lambda_n)f_n$, on normalise par $\|\nabla u_n\|^2_{L^2_R}+\|\lambda_n u_n\|^2_{L^2_R}<\infty$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}&-\Delta u_n-\lambda_n^2u_n=f_n \quad \text{dans } \Omega,\quad \partial_\nu u_n+\mathrm{i}\lambda_n\alpha(x)u_n=0 \quad \text{sur } \partial\Omega,\\&u_n \text{ satisfait la condition de radiation sortante,}\\&\|\nabla u_n\|^2_{L^2_R}+\|\lambda_n u_n\|^2_{L^2_R}=1,\quad \|f_n\|_{L^2_R}\to 0 \quad\text{et}\quad \|u_n\|_{L^2_R}\to 0\end{aligned} \tag{9}$$

et $1/\operatorname{Re}(\lambda_n)\to 0$, $\operatorname{Im}(\lambda_n)\to 0$. On peut voir que $u_n\rightharpoonup 0$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\lambda_n u_n\rightharpoonup 0$ dans L^2_{loc} et

$$\int_{\partial\Omega}\lambda_n^2\alpha(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}\sigma(x)\to 0.$$

On pose

$$v_n(t,x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda_n}u_n(x).$$

La suite v_n vérifie l'équation des ondes

$$\partial_t^2 v_n-\Delta v_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda_n}f_n \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}_+, \qquad \partial_n v_n+\alpha(x)\partial_t v_n(t,x)=0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times R_+ \tag{10}$$

avec $\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\lambda_n)}f_n\|_{L^2_{\mathrm{loc}}}\to 0$ quand $n\to+\infty$. Puisque $\operatorname{Im}\lambda_n$ est bornée, on déduit que $v_n\rightharpoonup 0$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R})$ (voir [7]). On peut ainsi lui associer une mesure de défaut microlocale μ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R})$ (voir [4,7]). On a que $\operatorname{supp}\mu$ est un sous-ensemble de la variété caractéristique. Donc, en appliquant le théorème de propagation des mesures de défaut, dans [5] et [7], sous l'hypothèse de contrôle géométrique extérieur (C.G.E.), on aurait le lemme de relèvement [1] ce qui implique que $\mu=0$ sur $B_{R'}$ où $R'>R$ et donc $v_n\to 0$ dans $H^1_{x,t}(B_{R'}\times[0,T])$. Ainsi $u_n\to 0$ dans $H^1_{R'}$, et $\lambda_n u_n\to 0$ dans L^2_R, ce qui est absurde car

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2_R}+\|\lambda_n u_n\|^2_{L^2_R}=1.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 2.1. La démonstration du Théorème 2.2 repose sur le Théorème 2.1 (pour plus des détails voir [6]).

3. Schéma de la preuve du Théorème 1.2

Soit $v_\sigma(t)f$ est le propagateur d'onde du problème

$$\big(\partial_t^2-\Delta+2\sigma(x)\partial_t\big)v(t)f=0 \quad \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}_+, \qquad \partial_\nu v(t)f=0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times\mathbb{R}_+,$$
$$v(0)f=0, \quad \partial_t v(0)f=f \quad \text{dans } \Omega.$$

Soient l'opérateur $S_\sigma(\lambda)f=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}v_\sigma(t)f\,\mathrm{d}t$ et $S_{\sigma,\chi}$ la résolvante tronquée. On pose $D(0)=\inf\{\operatorname{Im}\lambda,\ \lambda \text{ pôle de } S_\sigma(\lambda)\}$, soit

$$\tilde\sigma(x)=\begin{cases}\sigma(x) & \text{si } x\in B_R,\\ +\infty & \text{si } x\in B_R^c.\end{cases}$$

On définit $\kappa(x)=\inf_{\rho_0}\frac{1}{t}\int_0^t\tilde\sigma(x(s,\rho_0))\,\mathrm{d}s$, est une fonction positive, sous additive et bornée, on pose $\kappa(\infty)=\lim_{t\to+\infty}\kappa(x)$ avec $s\mapsto x(s,\rho_0)$ l'unique géodésique généralisée issue de $\rho_0\in T^*(\Omega)\setminus 0$. On a les résultats suivants :

Théorème 3.1. *Pour tout $\delta<\kappa(\infty)$, il existe $\lambda_0>0$ tel que la résolvante sortante tronquée $S_{\sigma,\chi}(\lambda)$ se prolonge d'une manière holomorphe dans la région*

$$\big\{\lambda\in\mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda\leqslant\delta,\ |\operatorname{Re}\lambda|\geqslant\lambda_0\big\}.$$

Plus précisement, il existe $c>0$ tel que pour toute $f\in L^2$, $\operatorname{supp} f\subset B_R$ *et pour tout λ appartenant à la région précédente, on a*

$$\big\|\nabla S_{\sigma,\chi}(\lambda)f\big\|^2+\big\|\lambda S_{\sigma,\chi}(\lambda)f\big\|^2\leqslant c\|f\|^2.$$

On déduit donc la décroissance de l'énergie locale en $1/t$.

Théorème 3.2. *Sous l'hypothèse de (C.G.E.) au dessus de B_R, pour tout $\delta<\beta=\min(D(0),\kappa(\infty))$, il existe $c>0$ tel que pour tout $f\in\widetilde{H}^1_R(\Omega)$, on a*

$$E_R\big(v(t)f\big)\leqslant\frac{c}{t}E\big(v(0)f\big)$$

où v est la première composante de la solution du

$$(\partial_t-B_\sigma)V(t)=0 \quad \textit{dans } \Omega\times\mathbb{R}_+, \qquad V(0)=V_0=(0,f)\in D(B_\sigma),$$

où $B_\sigma(u,v)=(v,\Delta u-\sigma v)$ et $D(B_\sigma)=\{(u,v)\in H;\ \Delta u\in L^2(\Omega),\ \partial_\nu v=0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Pour montrer les Théorèmes 3.1 et 3.2 il suffit d'adapter convenablement les travaux [7] et [6]. La preuve du Théorème 1.2 se déduit du Théorème 3.2.

Remerciements

Je remercie le Professeur Kaïs Ammari, qui ma proposé cette question et pour les discussions que j'ai eues avec lui. Je remercie également le Professeur Gilles Lebeau pour ses remarques fructueuses qui ont permis d'améliorer le contenu de ce travail.

Références

[1] L. Aloui, Stabilisation Neumann pour l'équation des ondes dans un domaine extérieur, J. Math. Pures Appl. 81 (2002) 1113–1134.
[2] N. Burq, Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absences de résonnance au voisinage du réel, Acta Math. 180 (1998) 16–29.
[3] N. Burq, Semi-classical estimates the resolvent in non trapping geometries, Int. Math. Res. Not. 5 (2002) 221–241.
[4] N. Burq, G. Lebeau, Mesures de défaut de compacité, application au système de Lamé, Ann. Sci. École Norm. Sup. 34 (2001) 817–870.
[5] P. Gérard, Microlocal defect measures, Comm. Partial Differential Equations 16 (1991) 1761–1794.
[6] M. Khenissi, Équation des ondes amorties dans un domaine extérieur, Bull. Soc. Math. France 131 (2003) 211–228.
[7] G. Lebeau, Equation des ondes amorties, in : Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996, pp. 73–109.