Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 447–452
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Ensembles à grande intersection et ubiquité

Arnaud Durand

Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées, université Paris XII, 61, avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil cedex, France

Reçu le 1er septembre 2006 ; accepté le 5 septembre 2006

Disponible sur Internet le 4 octobre 2006

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Nous définissons de nouvelles classes d'ensembles à grande intersection, qui généralisent celles introduites par K. Falconer. Ces classes contiennent les ensembles qui sont définis à partir de systèmes d'ubiquité homogènes et hétérogènes. De tels ensembles jouent un rôle important en approximation diophantienne et en analyse multifractale. ***Pour citer cet article : A. Durand, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Sets with large intersection and ubiquity. We define new classes of sets with large intersection, which generalize those introduced by K. Falconer. These classes contain the sets which are defined using homogeneous and heterogeneous ubiquitous systems. Such sets play an important role in Diophantine approximation and in multifractal analysis. ***To cite this article: A. Durand, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

This Note announces results which are detailed in [5,6]. Let I be a denumerable set and $\mathcal{S}_d(I)$ the set of all $(x_i, r_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ such that (1) holds. Let $(x_i, r_i)_{i\in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ and $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Consider the set F_φ of all $x \in \mathbb{R}^d$ such that $\|x - x_i\| < \varphi(r_i)$ for infinitely many $i \in I$. We show in [5] that F_φ enjoys a 'large intersection' property, under some assumption on $(x_i, r_i)_{i\in I}$.

Recall that the class $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in (0, d]$, of sets with large intersection was defined by K. Falconer as the collection of G_δ-subsets F of $\mathbb{R}^d$ such that $\dim \bigcap_p f_p(F) \geqslant s$ for all sequences of similarity transformations $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$, see [7]. He proved that $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ is the maximal class of G_δ-sets of dimension at least s that is closed under countable intersections and similarities. We generalize the classes of K. Falconer in the following manner. Let $\mathfrak{D}$ be the set of all gauge functions $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ that vanish at zero, continuously increase in an interval $[0, \varepsilon_h]$, $0 < \varepsilon_h \leqslant 1$, and are such that $r \mapsto r^{-d} h(r)$ is nonincreasing in $(0, \varepsilon_h]$. Every $h \in \mathfrak{D}$ enables to build a Hausdorff measure $\mathcal{H}^h$ on $\mathbb{R}^d$ in the usual way and an outer net measure $\mathcal{M}^h_\infty$ on $\mathbb{R}^d$ by setting $\mathcal{M}^h_\infty(F) = \inf \sum_\ell h(|\lambda_\ell|)$ where the infimum is taken on the set of all coverings of $F \subset \mathbb{R}^d$ by c-adic cubes ($c \geqslant 2$) λ_ℓ, $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, of diameter $|\lambda_\ell| < \varepsilon_h$. Moreover, for

Adresse e-mail : a.durand@univ-paris12.fr (A. Durand).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.09.002

$g, h \in \mathfrak{D}$, write $g \prec h$ if g/h monotonically tends to infinity at zero. The classes of K. Falconer necessarily refer to a large intersection property on the whole space $\mathbb{R}^d$ because the whole collection of similarities comes into play in their definition. In view of Theorem 0.2 below and its applications, where large intersection properties are often investigated in a local sense, we opt for the following definition. This also enables us to consider gauge functions which are much more general than those used by Y. Bugeaud in [4].

Definition 0.1. Let $h \in \mathfrak{D}$ and V be a nonempty open subset of $\mathbb{R}^d$. The class $\mathrm{G}^h(V)$ of sets with large intersection in V with respect to h is the collection of G_δ-subsets F of $\mathbb{R}^d$ such that $\mathcal{M}^g_\infty(F \cap U) = \mathcal{M}^g_\infty(U)$ for every $g \in \mathfrak{D}$ enjoying $g \prec h$ and every open subset U of V.

We prove that the class $\mathrm{G}^h(V)$ depends on the choice of neither c nor the norm $\mathbb{R}^d$ is endowed with. Moreover, it is closed under countable intersections. For every bi-Lipschitz transformation $f : V \to \mathbb{R}^d$ and every $F \in \mathrm{G}^h(f(V))$, $f^{-1}(F) \in \mathrm{G}^h(V)$. Furthermore, for $F \in \mathrm{G}^h(V)$ and $g \in \mathfrak{D}$ such that $g \prec h$, $\mathcal{H}^g(F) = \infty$, so $\dim F \geqslant s_h = \sup\{s \in (0, d) \mid r^s \prec h\}$ ($\sup \emptyset = 0$). Thus, $\mathrm{G}^h(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}^{s_h}(\mathbb{R}^d)$ if $s_h > 0$.

The aforementioned hypothesis on $(x_i, r_i)_{i \in I}$ is that the set F_r (defined as F_φ for $\varphi(r) = r$) has full Lebesgue measure in a given nonempty open subset V of $\mathbb{R}^d$. In this case, $(x_i, r_i)_{i \in I}$ is called a homogeneous ubiquitous system in V. For $h \in \mathfrak{D}$, let $\varphi_h = (h^{1/d})^{-1}$.

Theorem 0.2. *Let $(x_i, r_i)_{i \in I}$ be a homogeneous ubiquitous system in V. Then $F_{\varphi_h} \in \mathrm{G}^h(V)$ for all $h \in \mathfrak{D}$.*

This theorem is reminiscent of the mass transference principle established by Beresnevich and Velani in [3]. However, neither result implies the other.

Sets like F_φ play a key role in multifractal analysis. Indeed, in many cases (see e.g. [1,9,10]), the iso-Hölder sets of a $\mathbb{Z}^d$-periodic bounded function on $\mathbb{R}^d$ are related to $L_\delta = \mathbb{Z}^d + \limsup_j \bigcup_k B(k2^{-j}, 2^{-\delta j})$ where $k \in A_j \subset \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$ and $0 < \delta \leqslant 1$. Hence, Theorem 0.2 generally enables to derive the spectrum of singularities of that function.

The set F_φ plays an important role in Diophantine approximation too. For example, let $b \in \mathbb{R}^d$ and ψ be a function that decreases to zero at infinity. Let $K^b_{d,\psi}$ be the set of all $x \in \mathbb{R}^d$ such that $\|qx - b - p\| < q\psi(q)$ for infinitely many $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$. For $b = 0$, one recovers the set of all points that are ψ-approximable by rationals, which was introduced by Khintchine. Note that $K^b_{d,\psi}$ is of the form F_φ. Owing to Theorem 0.2, $K^b_{d,\psi} \in \mathrm{G}^h(\mathbb{R}^d)$ for every $h \in \mathfrak{D}$ such that $\sum_q h(\psi(q))q^d = \infty$.

Let Π_ψ be the set of all $x \geqslant 0$ such that $|x - p/q| < \psi(q)$ holds for infinitely many prime numbers p and q. Theorem 0.2 implies that $\Pi_\psi \in \mathrm{G}^h((0, \infty))$ for any $h \in \mathfrak{D}$ such that $\sum_q h(\psi(q))q/(\log q)^2 = \infty$.

For $n \in \mathbb{N}$, let $\mathcal{A}_n$ be the set of all real algebraic numbers of degree at most n and $H(a)$ denote the height of $a \in \mathcal{A}_n$. Let $A_{n,\psi}$ be the set of all $x \in \mathbb{R}$ such that $|x - a| < \psi(H(a))$ for infinitely many $a \in \mathcal{A}_n$. Thanks to Theorem 0.2, we prove that $A_{n,\psi} \in \mathrm{G}^g(\mathbb{R})$ for $g \in \mathfrak{D}$ enjoying $\sum_h g(\psi(h))h^n = \infty$. This leads to several new results concerning Koksma's and Mahler's classification of real transcendental numbers.

Let $\mathfrak{M}$ be the set of all finite Borel measures with support $[0, 1]^d$, $\mu \in \mathfrak{M}$ and $\alpha > 0$. Following [2], endow $\mathbb{R}^d$ with the supremum norm, let $\varphi(r) = r^t$ for $t \geqslant 1$ in the definition of F_φ and assume $x_i \in [0, 1]^d$. Moreover, let Ψ be the set of all functions $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ that vanish at the origin, continuously increase in a neighborhood of that point and are such that $r \mapsto r^{-\psi(r)}$ is nonincreasing in a neighborhood of zero. For $\psi \in \Psi$, $M > 0$ and $t \geqslant 1$, let E_t be the set of all $x \in [0, 1]^d$ such that $\|x - x_i\| < {r_i}^t$ for infinitely many $i \in I$ with $M^{-1}(2r_i)^{\alpha + \psi(2r_i)} \leqslant \mu(B(x_i, r_i)) \leqslant \mu(\bar{B}(x_i, r_i)) \leqslant M(2r_i)^{\alpha - \psi(2r_i)}$. In [6], we investigate whether E_t enjoys a large intersection property. Let $c \geqslant 2$ be an integer. For every c-adic cube $\lambda = \lambda^c_{j,k} = c^{-j}(k + [0, 1)^d)$ with $j \in \mathbb{Z}$ and $k \in \mathbb{Z}^d$, let $3\lambda = c^{-j}(k + [-1, 2)^d)$. For $x \in \mathbb{R}^d$ and $j \in \mathbb{Z}$, there is only one c-adic cube $\lambda^c_j(x)$ of diameter c^{-j} which contains x. Let Φ denote the set of all functions $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ that continuously increase in a neighborhood of the origin, vanish at that point and are such that $r^{-\varphi(r)}$ monotonically tends to ∞ as $r \to 0$ and $r \mapsto r^{\varepsilon - \varphi(r)}$ increases in a neighborhood of zero and has a vanishing limit at that point, for all $\varepsilon > 0$. Now let $\beta \in (0, d]$, $\varphi \in \Phi$ and $m \in \mathfrak{M}$. Assume that m-almost every $x \in [0, 1]^d$ enjoys $\|x - x_i\| \leqslant r_i/2$ for infinitely many $i \in I$, that for m-almost every $y \in [0, 1]^d$, (4) holds for all j large enough and all $k \in \{0, \dots, c^j - 1\}^d$, and that for every c-adic cube $\lambda \subset [0, 1)^d$, the measures $m_{|\lambda}$ and $m \circ \omega_\lambda$ are equivalent, where ω_λ is the dilation which maps λ to $[0, 1)^d$. If all those conditions are fulfilled, $(x_i, r_i)_{i \in I}$ is called a heterogeneous ubiquitous system with respect to $(\mu, \alpha, \beta, \varphi)$. In this case, J. Barral et S. Seuret proved that $\dim E_t \geqslant \beta/t$ for all $t \geqslant 1$, see [2, Th. 2.7]. The following result shows that E_t additionally enjoys a large intersection property.

Theorem 0.3. *Let $(x_i, r_i)_{i\in I}$ denote a heterogeneous ubiquitous system with respect to $(\mu, \alpha, \beta, \varphi) \in \mathfrak{M} \times (0,\infty) \times (0,d] \times \Phi$. Then, there exists $\psi \in \Psi$ and $M > 0$ such that $E_1 \in \mathrm{G}^{r^{\beta-\varphi(r)}}((0,1)^d)$ and $E_t \in \mathrm{G}^{r^{\beta/t-2\varphi(r)-\phi(r)}}((0,1)^d)$ for every $t > 1$ and $\phi \in \Phi$.*

This result has various applications in Diophantine approximation, see [2,6]. For example, when applying Theorem 0.3 to the case where μ is a product of multinomial measures, we establish that, for all $t \geqslant 1$, there is a set with large intersection inside the set of points which lie infinitely often in an open ball $B(x_i, {r_i}^t)$ for i such that the asymptotic frequencies of the digits of x_i fulfill a 'Besicovitch condition'. Furthermore, when μ is the Gibbs measure associated with a $\mathbb{Z}^d$-periodic Hölder potential f, we prove that a set with large intersection is included in the set of all points of $[0,1]^d$ which are approximated at least at a given rate by points where the average of the Birkhoff sum associated with f has a given limit.

1. Ensembles à grande intersection

Cette note annonce des résultats qui sont détaillés dans [5,6]. Un ensemble infini dénombrable I et un entier naturel non nul d étant fixés, notons $\mathcal{S}_d(I)$ l'ensemble des familles $(x_i, r_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^d \times]0,\infty[$ vérifiant

$$\sup_{i\in I} r_i < \infty \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \#\big\{i \in I \;\big|\; \|x_i\| < m \text{ et } r_i > 1/m\big\} < \infty. \tag{1}$$

Soient $(x_i, r_i)_{i\in I} \in \mathcal{S}_d(I)$ et $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons l'ensemble

$$F_\varphi = \big\{x \in \mathbb{R}^d \;\big|\; \|x - x_i\| < \varphi(r_i) \text{ pour une infinité de } i \in I\big\}. \tag{2}$$

Nous décrivons dans [5] la géométrie de l'ensemble F_φ lorsque la famille $(x_i, r_i)_{i\in I}$ vérifie une hypothèse simple qui est spécifiée dans la Section 2. En particulier, nous montrons que cet ensemble vérifie une propriété de « grande intersection ».

Rappelons que K. Falconer définit dans [7] pour $s \in]0,d]$ la classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ des ensembles à grande intersection de dimension supérieure à s comme la collection des $F \subset \mathbb{R}^d$ qui sont des G_δ (i.e. des intersections dénombrables d'ouverts) tels que $\dim \bigcap_p f_p(F) \geqslant s$ pour toute suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de similitudes de $\mathbb{R}^d$. Il prouve que $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ est la plus grande collection possible de G_δ de dimension supérieure à s à être stable par intersection dénombrable et par les similitudes de $\mathbb{R}^d$, cf. [7, th. A].

Nous généralisons les classes d'ensembles à grande intersection de K. Falconer de la manière suivante. L'intérêt d'une telle généralisation est détaillé dans les Sections 2 et 3. On appelle jauge toute fonction $h : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante sur un intervalle $[0,\varepsilon]$ avec $\varepsilon \in]0,1]$, nulle en 0 et telle que $r \mapsto r^{-d}h(r)$ décroisse sur $]0,\varepsilon]$. Désignons par ε_h le supremum de l'ensemble des réels ε convenables et notons $\mathfrak{D}$ l'ensemble des jauges. Toute jauge $h \in \mathfrak{D}$ permet de définir, de façon usuelle, une h-mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^h$ sur $\mathbb{R}^d$, ainsi qu'une mesure extérieure $\mathcal{M}^h_\infty$ définie pour $F \subset \mathbb{R}^d$ par $\mathcal{M}^h_\infty(F) = \inf \sum_\ell h(|\lambda_\ell|)$ où l'infimum est pris sur l'ensemble des recouvrements de F par des cubes c-adiques (i.e., pour un entier $c \geqslant 2$ fixé, des ensembles de la forme $c^{-j}(k + [0,1[^d)$, où $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}^d$) λ_ℓ, pour $\ell \in L \subset \mathbb{N}$, de diamètre $|\lambda_\ell| < \varepsilon_h$. Pour $g, h \in \mathfrak{D}$, écrivons en outre $g \prec h$ si et seulement si g/h décroît au voisinage de 0 et admet l'infini pour limite en ce point. Les classes de K. Falconer rendent nécessairement compte d'une propriété de grande intersection sur $\mathbb{R}^d$ tout entier, car leur définition fait intervenir les similitudes. Au vu du Théorème 2.1 énoncé ci-après et de ses applications, où les propriétés de grande intersection sont souvent étudiées en un sens local, nous préférons adopter la définition suivante. Cela nous permet aussi de considérer des jauges plus générales que celles utilisées par Y. Bugeaud dans [4].

Définition 1.1. Soient $h \in \mathfrak{D}$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. La classe $\mathrm{G}^h(V)$ des ensembles de $\mathbb{R}^d$ à grande intersection dans V relativement à la jauge h est la collection des $F \subset \mathbb{R}^d$ qui sont des G_δ tels que $\mathcal{M}^g_\infty(F \cap U) = \mathcal{M}^g_\infty(U)$ pour toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $g \prec h$ et tout ouvert $U \subset V$.

Nous montrons que la classe $\mathrm{G}^h(V)$ ne dépend ni du choix de la norme dont est muni $\mathbb{R}^d$ ni du choix de l'entier c. Outre des propriétés élémentaires de décroissance par rapport à h et à V, elle vérifie de surcroît des propriétés de stabilité similaires à celles caractérisant les classes de K. Falconer.

Théorème 1.2. *La classe $\mathrm{G}^h(V)$ est stable par intersection dénombrable. Pour toute $f : V \to \mathbb{R}^d$ bilipschitzienne et tout $F \in \mathrm{G}^h(f(V))$, on a $f^{-1}(F) \in \mathrm{G}^h(V)$. Pour tout $F \in \mathrm{G}^h(V)$ et toute jauge $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $g \prec h$, on a $\mathcal{H}^g(F) = \infty$. En particulier,* $\dim F \geqslant s_h = \sup\{s \in \,]0, d[\, \mid r^s \prec h\}$ *(avec* $\sup\emptyset = 0$).

Ce théorème implique que $\mathrm{G}^h(\mathbb{R}^d)$ s'inclut dans la classe $\mathcal{G}^{s_h}(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer, si $s_h > 0$. De plus, pour tous $(F_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{G}^h(V)$ et $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $g \prec h$, on a $\mathcal{H}^g(\bigcap_p F_p) = \infty$, si bien que $\dim \bigcap_p F_p \geqslant s_h$.

2. Ubiquité homogène et applications

L'hypothèse évoquée précédemment concernant la famille $(x_i, r_i)_{i\in I}$ est la suivante : l'ensemble F_r (donné par (2) pour $\varphi(r) = r$) est de mesure de Lebesgue pleine dans un certain ouvert non vide V de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, on dit que $(x_i, r_i)_{i\in I}$ est un système d'ubiquité homogène dans V. Citons quelques exemples. Pour tout entier $c \geqslant 2$, la famille $(kc^{-j}, c^{-j})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$. Il en va de même de la famille $(p/q, q^{-1-1/d})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{N}^*}$ d'après le théorème de Dirichlet. Plus généralement, les systèmes réguliers optimaux de points, dont l'usage est très courant dans la théorie de l'approximation diophantienne, conduisent à des systèmes d'ubiquité homogène.

Pour $h \in \mathfrak{D}$, considérons une fonction $\varphi_h : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ qui coïncide au voisinage de l'origine avec la réciproque de $h^{1/d}$, ainsi que l'ensemble F_{φ_h} défini par (2) pour $\varphi = \varphi_h$.

Théorème 2.1. *Soient $(x_i, r_i)_{i\in I}$ un système d'ubiquité homogène dans V et $h \in \mathfrak{D}$. Alors $F_{\varphi_h} \in \mathrm{G}^h(V)$.*

Ce théorème s'apparente au principe de transfert de masse établi par V. Beresnevich et S. Velani [3] qui concerne la h-mesure de Hausdorff de F_φ quand F_r est de mesure de Lebesgue pleine dans $\mathbb{R}^d$, sans toutefois l'impliquer ni s'en déduire. De plus, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement une suite de points de $[0, 1[^d$ et une suite de réels strictement positifs de limite nulle telles que la mesure de Lebesgue de $\limsup_n B(x_n, r_n)$ vaut 1, alors $(k + x_n, r_n)_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}$ est un système d'ubiquité homogène dans $\mathbb{R}^d$. Par conséquent, avec $h(r) = r^{d/t}$ pour $t \geqslant 1$, le Théorème 2.1 implique que $\mathbb{Z}^d + \limsup_n B(x_n, {r_n}^t) \in \mathrm{G}^{r^{d/t}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}^{d/t}(\mathbb{R}^d)$, ce qui généralise la Proposition 5.4 de [1].

Des ensembles comme F_φ se rencontrent souvent en analyse multifractale. En effet, dans de nombreux cas (cf. e.g. [1,9,10]), les ensembles isohöldériens d'une fonction $\mathbb{Z}^d$-périodique et bornée sur $\mathbb{R}^d$ s'écrivent, pour $\delta \in [0, 1]$, $H_\delta = \bigcap_{\delta'\in]0,\delta[} L_{\delta'} \setminus \bigcup_{\delta'\in]\delta,1[} L_{\delta'}$ avec $L_{\delta'} = \mathbb{Z}^d + \limsup_j \bigcup_k B(k2^{-j}, 2^{-\delta' j})$ où $k \in A_j \subset \{0, \ldots, 2^j - 1\}^d$. En outre, il existe $\delta_0 \in \,]0, 1]$ tel que L_{δ_0} est de mesure de Lebesgue pleine dans $[0, 1]^d$. D'après le Théorème 2.1, $L_{\delta'} \in \mathrm{G}^{r^{d\delta_0/\delta'}}(\mathbb{R}^d)$ si $\delta' > \delta_0$ et $\mathbb{R}^d \setminus L_{\delta'}$ est Lebesgue-négligeable si $\delta' \leqslant \delta_0$. Cela suffit en général pour déterminer le spectre de singularités de la fonction considérée.

On rencontre aussi des ensembles du type F_φ dans la théorie de l'approximation diophantienne. Fixons $b \in \mathbb{R}^d$ et ψ une fonction qui décroît strictement vers 0 à l'infini. Soit $K^b_{d,\psi}$ l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ pour lesquels $\|qx - b - p\| < q\psi(q)$ admet une infinité de solutions $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*$. Pour $b = 0$, on retrouve l'ensemble des points ψ-approchables par des rationnels initialement étudié par Khintchine. L'ensemble $K^b_{d,\psi}$ est clairement de la forme (2). Soit $h \in \mathfrak{D}$. Si $\sum_q h(\psi(q))q^d < \infty$, on montre aisément que $\mathcal{H}^h(K^b_{d,\psi}) = 0$, tandis que si $\sum_q h(\psi(q))q^d = \infty$, le Théorème 2.1, associé à une version inhomogène du théorème de Khintchine (cf. [11]), conduit à $K^b_{d,\psi} \in \mathrm{G}^h(\mathbb{R}^d)$. Nous prouvons même que $\bigcap_n K^{b_n}_{d,\psi}$ est de h-mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ pour toute suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$.

Considérons maintenant l'ensemble Π_ψ des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels l'inéquation $|x - p/q| < \psi(q)$ est vérifiée par une infinité de couples (p, q) de nombres premiers positifs. On observe aisément que Π_ψ est de la forme (2). Le Théorème 2.1 permet, grâce à certains résultats de Harman (cf. [8]), d'affirmer que $\Pi_\psi \in \mathrm{G}^h(]0, \infty[)$ dès que $h \in \mathfrak{D}$ vérifie $\sum_q h(\psi(q))q/(\log q)^2 = \infty$. En outre, Π_ψ est de h-mesure de Hausdorff infinie dans tout ouvert non vide de

$]0,\infty[$. De la même manière, nous précisons des résultats de [8] en montrant que les réels ψ-approchables par des rationnels dont le numérateur et le dénominateur vérifient certaines propriétés arithmétiques constituent un ensemble à grande intersection.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des réels algébriques de degré au plus n et désignons par $H(a)$ la hauteur de $a \in \mathcal{A}_n$ (i.e. la plus grande des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$). Soit $A_{n,\psi}$ l'ensemble des réels ψ-approchables par des réels algébriques de degré au plus n, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $|x-a| < \psi(H(a))$ admet une infinité de solutions $a \in \mathcal{A}_n$. Cet ensemble est de la forme (2). Pour $g \in \mathfrak{D}$, si $\sum_h g(\psi(h))h^n$ converge, on a $\mathcal{H}^g(A_{n,\psi}) = 0$, tandis que si elle diverge, $A_{n,\psi} \in \mathrm{G}^g(\mathbb{R})$ avec une g-mesure infinie dans tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Nous en déduisons des résultats nouveaux concernant la classification de Koksma des réels transcendants.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathbb{Z}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers de degré au plus n et désignons par $H(p)$ la hauteur de $p \in \mathbb{Z}_n[X]$ (i.e. la plus grande des valeurs absolues de ses coefficients). Soit $P_{n,\psi}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $|p(x)| < H(p)\psi(H(p))$ admet une infinité de solutions $p \in \mathbb{Z}_n[X]$. Nous montrons que $P_{n,\psi} \in \mathrm{G}^g(\mathbb{R})$ pour $g \in \mathfrak{D}$ vérifiant $\sum_h g(\psi(h))h^n = \infty$. Cela conduit à des résultats nouveaux concernant la classification de Mahler des réels transcendants.

3. Ubiquité hétérogène et applications

Suivant [2], munissons $\mathbb{R}^d$ de la norme supremum et prenons $\varphi(r) = r^t$ pour $t \geqslant 1$ dans (2). En outre, notons $\mathfrak{M}$ l'ensemble des mesures boréliennes finies de support égal à $[0,1]^d$ et désignons par $(x_i)_{i\in I}$ une famille de points de $[0,1]^d$ et par $(r_i)_{i\in I}$ une famille de réels strictement positifs dont 0 est le seul point d'accumulation. Dans l'approximation, considérons uniquement les $i \in I$ indexant les boules $B(x_i, r_i)$ dont la masse, au sens d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$, se comporte comme ${r_i}^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Soit Ψ l'ensemble des fonctions $\psi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ nulles en 0, continues et croissantes au voisinage de 0 et telles que $r \mapsto r^{-\psi(r)}$ décroisse au voisinage de 0. Pour $\psi \in \Psi$ et $M > 0$, notons $I^{\mu,\alpha}_{M,\psi}$ l'ensemble des $i \in I$ vérifiant $M^{-1}(2r_i)^{\alpha+\psi(2r_i)} \leqslant \mu(B(x_i,r_i)) \leqslant \mu(\bar{B}(x_i,r_i)) \leqslant M(2r_i)^{\alpha-\psi(2r_i)}$. Pour $t \geqslant 1$, considérons

$$E_t = \left\{x \in [0,1]^d \;\middle|\; \|x - x_i\| < {r_i}^t \text{ pour une infinité de } i \in I^{\mu,\alpha}_{M,\psi}\right\}. \tag{3}$$

Nous étudions dans [6] les propriétés de grande intersection de cet ensemble. Soit un entier $c \geqslant 2$. Pour tout cube c-adique $\lambda = \lambda^c_{j,k} = c^{-j}(k + [0,1[^d)$, avec $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, notons $3\lambda = c^{-j}(k + [-1,2[^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $j \in \mathbb{Z}$, il existe un unique cube c-adique $\lambda^c_j(x)$ de diamètre c^{-j} qui contient x. Soit Φ l'ensemble des fonctions $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ continues et croissantes au voisinage de 0, nulles en 0 et telles que $r^{-\varphi(r)}$ tende en croissant vers ∞ quand $r \to 0$ et $r \mapsto r^{\varepsilon-\varphi(r)}$ croisse strictement au voisinage de 0 et admette une limite nulle en 0, pour tout $\varepsilon > 0$. Prenons $\beta \in]0,d]$, $\varphi \in \Phi$ et supposons qu'il existe $m \in \mathfrak{M}$ telle que m-presque tout $x \in [0,1]^d$ vérifie $\|x - x_i\| \leqslant r_i/2$ pour une infinité de $i \in I$, que pour m-presque tout $y \in [0,1]^d$, pour tout j assez grand et tout $k \in \{0,\dots,c^j-1\}^d$,

$$\lambda^c_{j,k} \subset 3\lambda^c_j(y) \quad\Longrightarrow\quad m\left(\lambda^c_{j,k}\right) \leqslant \left|\lambda^c_{j,k}\right|^{\beta-\varphi(|\lambda^c_{j,k}|)} \text{ et } \left|\lambda^c_{j,k}\right|^{\alpha+\psi(|\lambda^c_{j,k}|)} \leqslant \mu\left(\lambda^c_{j,k}\right) \leqslant \left|\lambda^c_{j,k}\right|^{\alpha-\psi(|\lambda^c_{j,k}|)} \tag{4}$$

et que, pour tout cube c-adique $\lambda \subset [0,1[^d$, les mesures $m_{|\lambda}$ et $m \circ \omega_\lambda$ sont équivalentes, où ω_λ désigne la dilatation qui envoie λ sur $[0,1[^d$. Si toutes ces conditions sont remplies, on dit que $(x_i,r_i)_{i\in I}$ est un système d'ubiquité hétérogène relativement à $(\mu,\alpha,\beta,\varphi)$. J. Barral et S. Seuret ont prouvé qu'alors $\dim E_t \geqslant \beta/t$ pour $t \geqslant 1$, cf. [2, th. 2.7]. Le théorème suivant ajoute une propriété de grande intersection.

Théorème 3.1. *Désignons par $(x_i,r_i)_{i\in I}$ un système d'ubiquité hétérogène par rapport à un quadruplet $(\mu,\alpha,\beta,\varphi) \in \mathfrak{M} \times]0,\infty[\times]0,d] \times \Phi$. Alors, il existe $\psi \in \Psi$ et $M > 0$ tels que $E_1 \in \mathrm{G}^{r^{\beta-\varphi(r)}}(]0,1[^d)$ et $E_t \in \mathrm{G}^{r^{\beta/t-2\varphi(r)-\phi(r)}}(]0,1[^d)$ pour tous $t > 1$ et $\phi \in \Phi$.*

Citons quelques applications en approximation diophantienne, qui améliorent des résultats de [2]. Soit μ le produit de d mesures multinomiales μ_ℓ associées à des vecteurs de probabilité $(\pi^\ell_0,\dots,\pi^\ell_{c-1}) \in]0,1[^c$ vérifiant $\sum_s \pi^\ell_s = 1$, pour $\ell \in \{1,\dots,d\}$. L'analyse multifractale de μ fait appel à $\tau_\mu(q) = -\sum_{\ell=1}^d \sum_{s=0}^{c-1} (\pi^\ell_s)^q$. Prenons $q \in \mathbb{R}$. Nous montrons que, si tout $x \in [0,1]^d$ vérifie $\|x - x_i\| \leqslant r_i/2$ infiniment souvent, $(x_i,r_i)_{i\in I}$ est un système d'ubiquité hétérogène relativement à $(\mu,\alpha,\beta,\varphi)$, pour $\alpha = \tau'_\mu(q)$, $\beta = q\tau'_\mu(q) - \tau_\mu(q)$ et $\varphi \in \Phi$ bien déterminée qui ne dépend ni de μ, ni de q. Le Théorème 3.1 s'applique donc dans cette situation. Par ailleurs, pour $y = \sum_{p\geqslant 1} y_p c^{-p} \in [0, 1[$, où $(y_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset \{0, \ldots, c-1\}$ ne stationne pas en $c-1$, pour $s \in \{0, \ldots, c-1\}$ et pour $j \in \mathbb{N}^*$, notons $\sigma_{s,j}(y) = \#\{p \leqslant j \mid y_p = s\}/j$. Pour $t \geqslant 1$, désignons par $U_{\pi,t}$ l'ensemble des points $x \in [0, 1]^d$ qui vérifient $\|x - x_{i_n}\| < {r_{i_n}}^t$ avec $\sigma_{s,\lfloor -\log_c r_{i_n}\rfloor}(x^\ell_{i_n}) \to \pi^\ell_s$ pour tous $\ell \in \{1, \ldots, d\}$ et $s \in \{0, \ldots, c-1\}$ et une certaine suite injective $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$. Nous montrons que $U_{\pi,t}$ contient un ensemble à grande intersection de la classe $\mathrm{G}^{r^{\tau'_\mu(1)/t-3\varphi(r)}}(]0, 1[^d)$. Cela permet de minorer la dimension de l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles tels que $U_{\pi,t}$, c'est-à-dire par exemple la dimension de l'ensemble des points de $[0, 1]^d$ qui sont approchés au moins à une certaine vitesse par des rationnels dont on impose le comportement asymptotique du développement en base c et ce d'un nombre dénombrable de façons différentes.

Un autre exemple d'application est fourni par la mesure de Gibbs μ associée à un potentiel höldérien f qui est $\mathbb{Z}^d$-périodique. On peut cette fois inclure un ensemble à grande intersection dans l'ensemble des points de $[0, 1]^d$ qui sont approchés au moins à une certaine vitesse par des points en lesquels la moyenne de la somme de Birkhoff associée à f admet une limite donnée.

Références

[1] J.-M. Aubry, S. Jaffard, Random wavelet series, Comm. Math. Phys. 227 (2002) 483–514.
[2] J. Barral, S. Seuret, Heterogeneous ubiquitous systems in $\mathbb{R}^d$ and Hausdorff dimension, prépublication, 2004.
[3] V.V. Beresnevich, S.L. Velani, A mass transference principle and the Duffin–Schaeffer conjecture for Hausdorff measures, à paraître dans Ann. Math., 2005.
[4] Y. Bugeaud, Approximation by Algebraic Numbers, Cambridge University Press, 2004.
[5] A. Durand, Sets with large intersection and ubiquity, prépublication, 2006.
[6] A. Durand, Ubiquitous systems and metric number theory, prépublication, 2006.
[7] K.J. Falconer, Sets with large intersection properties, J. London Math. Soc. 49 (2) (1994) 267–280.
[8] G. Harman, Metric Number Theory, Clarendon Press, NY, 1998.
[9] S. Jaffard, The multifractal nature of Lévy processes, Probab. Theory Related Fields 114 (1999) 207–227.
[10] S. Jaffard, On lacunary wavelet series, Ann. Appl. Probab. 10 (1) (2000) 313–329.
[11] W.M. Schmidt, Metrical theorems on fractional parts of sequences, Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964) 493–518.