Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 235–240
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse fonctionnelle

Espaces métriques linéairement rigides

Julien Melleray [a], Fedor Petrov [b], Anatoly Vershik [b]

[a] *University of Illinois at Urbana-Champaign, 1409 W. Green Street, 273 Altgeld Hall, 61801 Urbana, IL, États-Unis*
[b] *St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics, 27, Fontanka, St. Petersburg 191023, Russie*

Reçu le 24 novembre 2006 ; accepté après révision le 17 décembre 2006

Disponible sur Internet le 26 janvier 2007

Présenté par Gilles Pisier

Résumé

Il est bien connu que tout espace métrique admet un plongement isométrique dans un espace de Banach. Nous étudions ici les espaces métriques X admettant un unique (à isométrie près) plongement isométrique dans un espace de Banach tel que l'enveloppe linéaire de l'image de X soit dense. Nous disons que ces espaces métriques sont *linéairement rigides* ; le premier example d'un tel espace a été fourni par R. Holmes (1992), qui a démontré que l'espace d'Urysohn est linéairement rigide. Nous fournissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit linéairement rigide, et obtenons ainsi d'autres exemples d'espaces ayant cette propriété. ***Pour citer cet article : J. Melleray et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Linearly rigid metric spaces. It is a well-known fact that any metric space admits an isometric embedding into a Banach space (Kantorovitch–Monge embedding); here, we introduce and study the class of metric spaces which admit a unique (up to isometry) linearly dense embedding into a Banach space. We call these spaces *linearly rigid*. The first example of such a space was obtained by R. Holmes, who proved that the Urysohn space is linearly rigid. We provide a necessary and sufficient condition for a space to be linearly rigid. Then we discuss some corollaries, including new examples of linearly rigid metric spaces. ***To cite this article: J. Melleray et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

Any metric space X admits an isometric embedding in a Banach space; one possible way to prove this is to apply Kantorovitch's construction for the Monge–Kantorovitch transformation problem to X (see [5]). Consider the spaces $V(X)=\{\sum a_x\cdot\delta_x,\ x\in X, a_x\in\mathbb{R}\}$, $V_0(X)=\{\sum a_x\cdot\delta_x,\ x\in X, a_x\in\mathbb{R}, \sum a_x=0\}$. The space $V(X)$ (resp. $V_0(X)$) corresponds to the finitely supported (resp. finitely supported with total mass 0) Borel measures on X. Given $x, y\in X$ denote by $e_{x,y}$ the measure $\delta_x-\delta_y$ on X; then a norm $\|\cdot\|$ on V_0 is said to be *compatible with the metric* ρ if it is such that $\|e_{x,y}\|=\rho(x,y)$ for any $x, y\in X$.

Adresses e-mail : melleray@math.uiuc.edu (J. Melleray), fedorpetrov@mail.ru (F. Petrov), vershik@pdmi.ras.ru (A. Vershik).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.12.015

Fact. The Kantorovitch norm $\|\cdot\|_K$ is compatible with the metric, and is maximal among such norms.

Definition. We say that a space is *linearly rigid* if it admits a unique (up to isometry) linearly dense embedding into a Banach space. Equivalently, a metric space X is linearly rigid if the Kantorovitch norm is the only norm on $V_0(X)$ which is compatible with the metric on X.

If (X,ρ) is a metric space, and $x \in X$, one can extend the Kantorovitch norm $\|\cdot\|_K$ on $V_0(X)$ to a norm on $V(X)$, still called the Kantorovitch norm, by setting $\|\delta_x\|_K = 0$. We denote by $E_{X,\rho}$ (or E_X when there is no risk of confusion) the Banach space which is the completion of $V(X)$ endowed with this norm. The correspondence $(X,\rho) \mapsto E_{X,\rho}$ is a functor from the category of metric spaces (with Lipschitz maps as morphisms) to the category of Banach spaces (with continuous linear maps as morphisms).

If $X = (x_n)$ is a dense sequence in a Polish metric space $(\overline{X},\rho)$, then its *distance matrix* is the (countably) infinite matrix $(\rho_{i,j}) = \{\rho(x_i,x_j)\}$; this matrix contains all the information on $\overline{X}$ as a metric space. We say that a vector $v = (v_i)$ is *admissible* (see [8]) for a distance matrix $(\rho_{i,j})$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, if $|v_i - v_j| \leqslant \rho_{i,j} \leqslant v_i + v_j$ for all $i,j = 1,\dots,n$. These vectors correspond to the possible values of the $n+1$-th column (and row) of a distance matrix whose first $n \times n$ entries are given by $(\rho_{i,j})$.

Recall that Urysohn's universal metric space $\mathbb{U}$ is the unique (up to isometry) Polish metric space which is both universal (any separable space isometrically embeds in it) and homogeneous (any isometry between finite subsets extends to the whole space). This space was the first nontrivial example of a linearly rigid metric space (see [4]); it is characterized by the following universal property: $\{\rho_{i,j}\}$ encodes a dense subset of $\mathbb{U}$ iff for any n, any $\varepsilon > 0$ and any admissible vector v for $(\rho_{i,j})$, there exists m such that $|\rho_{m,j} - v_j| \leqslant \varepsilon$ for all $j = 1,\dots,n$.

Let us say that a 1-Lipschitz map u is *extremal* if it is an extremal point in the unit ball of the space $(\mathrm{Lip}_0(X), \|\cdot\|_{\mathrm{Lip}})$ of Lipschitz maps (up to a constant) on X, which is the dual space to $(V_0, \|\cdot\|_K)$; recall that $\|u\|_{\mathrm{Lip}}$ is the Lipschitz constant of u. We simply call these maps 'extremal maps' below.

Our main result (criterion of linear rigidity) is the following:

Theorem. *A Polish metric space $(\overline{X},\rho)$, with some (any) dense sequence $X = (x_n)$, is linearly rigid if, and only if, the distance matrix $(\rho_{i,j})$ is such that for any $\varepsilon > 0$ and any extremal map u on $X_n = \{x_1,\dots,x_n\}$, there exists $m \in \mathbb{N}$ and $c \in \mathbb{R}^+$ such that $|c + u(x_i) - \rho_{m,j})| \leqslant \varepsilon$ for all $j = 1,\dots,n$.*

This criterion reminds one of the universal property of the Urysohn space; both properties may be stated without using distance matrices. Explicitly, a Polish metric space (X,ρ) is linearly rigid if, and only if, for any finite set $F \subset X$, any extremal map u on F and any $\varepsilon > 0$, there exists $z \in X$ and $c \in \mathbb{R}^+$ such that $|c + \rho(z,x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$ for any $x \in F$. It turns out that this version of the criterion holds for any metric space X (linear rigidity makes sense for all metric spaces, and the criterion above holds for metric spaces of any density character).

Our criterion also provides a new proof of the fact that Urysohn's universal space is linearly rigid. Further, it shows that there are many nonisometric linearly rigid metric spaces; denote by $\mathbb{ZU}$ (resp. $\mathbb{QU}_{\geqslant 1}$) the (unique up to isometry) metric space which is both homogeneous and universal for the class of metric spaces with integer-valued (resp. with nonzero values both rational and larger than 1) metric.

Proposition. *The Urysohn spaces $\mathbb{ZU}$, $\mathbb{QU}_{\geqslant 1}$ are linearly rigid.*

Yet these spaces are discrete, which shows that a linearly rigid metric space need not be 'big' in a topological sense. However, one can deduce from our characterization the following result:

Theorem. *A linearly rigid metric space with at least three points has to be unbounded; in particular, no compact metric space is linearly rigid (besides the trivial examples of spaces with 1 or 2 elements).*

Recall (see [8]) that the set of infinite distance matrices is a convex weakly closed cone. Its extreme rays correspond to metrics on $\mathbb{N}$ that cannot be written as the half sums of any other nonproportional metrics. The Urysohn space $\mathbb{U}$ is extremal in this sense, as is the integer Urysohn space $\mathbb{ZU}$ (this is a consequence of results in [1]). It is not known whether all linearly rigid spaces are extremal.

It seems that the Banach–Kantorovitch spaces $E_{X,\rho}$ corresponding to linearly rigid metric spaces (X,ρ) have not been studied, though they are interesting objects. For example, the Banach–Kantorovitch space $E_{\mathbb{U}}$ of the universal Urysohn space $\mathbb{U}$ is a universal separable Banach space, i.e. every separable Banach space can be linearly isometrically embedded into it (this is a consequence of results in [2]). However, one can show that $E_{\mathbb{U}}$ is not isometric to the other well-known universal separable Banach spaces, for instance the Gurariy space (see [3]); the authors do not know any characterization of $E_{\mathbb{U}}$ as a Banach space. The same holds for the spaces $E_{\mathbb{QU}_{\geqslant 1}}$ and $E_{\mathbb{ZU}}$. Such a characterization is undoubtedly of interest.

1. Introduction

Dans cette Note, nous étudions et caractérisons les espaces métriques (X,d) séparables complets (= polonais) qui admettent (à isométrie près) un unique plongement isométrique dans un espace de Banach B tel que l'enveloppe linéaire de X soit dense dans B. Une telle façon de plonger (X,d) dans un espace de Banach est bien connue, et date des travaux de Kantorovitch [5,6]. L'espace ainsi construit est appelé *espace de Banach–Kantorovitch* associé à X (on rencontre aussi les termes *espace d'Arens–Eells* ou *espace Lipschitz-libre*). Ainsi, nous cherchons à caractériser les espaces polonais qui n'admettent (à isométrie près) pas d'autre plongement isométrique linéairement dense dans un espace de Banach que celui de Kantorovitch. Le premier exemple non-trivial d'un tel espace a été obtenu par R. Holmes ([4]) : il s'agit de l'espace d'Urysohn.

2. Normes compatibles avec une distance

Si (X,d) est un espace métrique, on pose

$$V(X)=\mathbb{R}(X)=\left\{\sum a_x\cdot\delta_x,\ x\in X, a_x\in\mathbb{R}\right\},\quad V_0(X)=\left\{\sum a_x\cdot\delta_x,\ x\in X, a_x\in\mathbb{R}, \sum a_x=0\right\}$$

(toutes les sommes sont finies). On peut voir $V(X)$ (resp. $V_0(X)$) comme l'espace des mesures sur X à support fini (resp. à support fini et masse nulle) ; $V_0(X)$ est un hyperplan affine de l'espace affine $V(X)$. On aura parfois besoin de fixer un δ_x comme origine de $V(X)$; pour $x,y\in X$, on pose $e_{x,y}=\delta_x-\delta_y$.

Définition 2.1. Une norme $\|\cdot\|$ sur $V_0(X)$ est compatible avec d si $\|e_{x,y}\|=d(x,y)$ pour tout $(x,y)\in X^2$.

Les rayons $\{c.e_{x,y}\}$ sont appelés *rayons fondamentaux* ; si une distance sur X est fixée, alors une norme compatible avec cette distance définit un unique vecteur de norme 1 sur chaque rayon fondamental. Nous appelons ces vecteurs les *sommets fondamentaux* pour cette distance. Ils sont définis par $\bar{e}_{x,y}=\frac{e_{x,y}}{d(x,y)}$ $(x\neq y)$. Ainsi, l'ensemble des normes compatibles avec une distance est l'ensemble des normes pour lesquelles chaque sommet fondamental est de norme 1.

Lemme 2.2. *Soit (X,d) un espace métrique. La norme de Kantorovitch $\|\cdot\|_K$ est maximale parmi les normes compatibles avec la distance sur X, i.e. pour toute autre norme compatible $\|\cdot\|$ et tout $f\in V_0(X)$ on a $\|f\|\leqslant\|f\|_K$. La boule unité pour $\|\cdot\|_K$ est l'enveloppe convexe des sommets fondamentaux.*

Cette caractérisation géométrique de la norme de Kantorovitch nous sera très utile par la suite ; elle est à la base de notre étude des espaces linéairement rigides. Notons que toute norme sur $V_0(X)$ peut être étendue en une norme sur $V(X)$ en posant $\|\delta_{x_0}\|=0$ pour un certain $x_0\in X$ (la mesure δ_{x_0} correspondante est alors prise comme origine de $V(X)$). On appelle encore norme de Kantorovitch la norme sur $V(X)$ obtenue en étendant ainsi $\|\cdot\|_K$ à $V(X)$, et on appelle *espace de Banach–Kantorovitch associé à* (X,d) le complété de $V(X)$ muni de $\|\cdot\|_K$. Nous dénotons cet espace par E_{X,d,x_0} (ou $E_{X,d}$, voire E_X quand il n'y a pas de risque de confusion) ; le choix de x_0 n'a pas d'influence sur le type d'isométrie linéaire de E_{X,d,x_0}, donc on peut considérer l'application $(X,d)\mapsto E_{X,d}$. Celle-ci est un foncteur de la catégorie des espaces métriques (avec les applications lipschitziennes comme morphismes) dans la catégorie des espaces de Banach (avec les applications linéaires continues comme morphismes). Tout espace métrique pointé (X,d,x_0) admet un plongement canonique dans E_{X,d,x_0} ; réciproquement, si (X,d) est plongé isométriquement dans un espace de Banach B, alors la fermeture dans B de l'enveloppe affine de X est isométrique au complété de $V(X)$ pour une certaine norme compatible avec la distance sur X. Nous disons qu'un plongement isométrique de (X,d) dans un Banach B est *linéairement dense* si l'enveloppe affine de l'image de X est dense dans B.

Définition 2.3. Un espace métrique polonais (X, d) est linéairement rigide s'il admet (à isométrie près) un unique plongement isométrique linéairement dense dans un espace de Banach. Autrement dit, (X, d) est linéairement rigide si, et seulement si, la seule norme sur $V_0(X)$ compatible avec la distance d est la norme de Kantorovitch.

Notons que, si l'on dénote par $\mathrm{Lip}_0(X, x_0)$ l'espace des fonctions lipschitziennes sur X qui s'annulent en $x_0 \in X$, muni de sa norme usuelle (la constante de Lipschitz), alors $\mathrm{Lip}_0(X, x_0)$ est le dual de E_{X,d,x_0} ; le crochet de dualité est donné par $\langle u, f\rangle = \sum u(x) f(x)$, pour $u \in \mathrm{Lip}_0(X, x_0)$ et $f \in V(X)$. Le choix de x_0 n'a là encore pas d'influence sur le type d'isométrie linéaire de $\mathrm{Lip}_0(X, x_0)$, donc on utilise simplement dans la suite la notation $\mathrm{Lip}_0(X)$. On appelle *application extrémale* sur X tout élément extrémal de la boule unité de $\mathrm{Lip}_0(X)$.

3. Matrices de distance

Dans un espace métrique polonais infini $(\overline{X}, d)$, on peut fixer un sous-ensemble dénombrable dense $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; la matrice de distance $\{d_{i,j}\} = \{\rho(x_i, x_j)\}$ associée à cet ensemble contient toute l'information sur $(\overline{X}, d)$, et on peut s'en servir pour étudier les propriétés de cet espace (cf. [8]). Notons $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble formé par les n premiers points de X.

Définition 3.1. On dit qu'un vecteur $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est admissible pour la matrice de distance $\{d_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ d'un espace métrique fini (X_n, d) si $|a_i - a_j| \leqslant d_{i,j} \leqslant a_i + a_j$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$.

Dans la suite, on pense à X_n comme étant l'espace formé des n premiers points d'une suite X dense dans un métrique polonais $(\overline{X}, d)$; dans ce cas, les vecteur admissibles correspondent aux valeurs possibles pour la $n+1$-ième ligne (et colonne) de la matrice de distance de X. Nous notons Adm_d l'ensemble des vecteurs admissibles pour une matrice de distance finie $d = \{d_{i,j}\}$; un tel vecteur définit une fonction 1-lipschitzienne sur (X_n, d). La réciproque est fausse, mais pour toute fonction 1-lipschitzienne f, il existe $C > 0$ tel que $f + C$ correspond à un vecteur admissible. Un point extrémal de Adm_d est appelé *vecteur admissible extrémal*, et nous appelons *rayon admissible extrémal* un rayon de la forme $\{C + v\colon C \in \mathbb{R}^+\}$, où v est un vecteur admissible extrémal. Chaque vecteur admissible extrémal correspond à une (unique) application extrémale sur X_n.

Rappelons (cf. [7,8]) que P.S. Urysohn a établi l'existence et l'unicité d'un espace métrique polonais (l'espace d'Urysohn) qui soit à la fois *universel* (tout espace métrique polonais s'y plonge isométriquement) et *ultrahomogène* (toute isométrie entre sous-espaces finis s'étend en une isométrie de l'espace entier).

Critère d'universalité. ([8]) Un espace métrique polonais (X, d) est isométrique à l'espace d'Urysohn si, et seulement si, la matrice de distance $\{d_{i,j}\}$ d'un (et donc de tout) sous-ensemble dénombrable dense a la propriété universelle suivante : pout tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\epsilon > 0$, et tout $a \in \mathrm{Adm}(d^n)$ admissible pour la matrice de distance $d^n = \{d_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$, il existe m tel que $|a_j - d_{m,j}| < \epsilon$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Cet énoncé est une reformulation du résultat originel d'Urysohn [7], qui n'utilisait pas les matrices de distance (de même, le critère de rigidité linéaire ci-dessous s'exprime avec ou sans matrices de distance).

4. Critère de rigidité linéaire

Théorème 4.1. *Soit $(\overline{X}, d)$ un espace métrique polonais et $X = (x_n)$ une suite dense dans $\overline{X}$. L'espace $(\overline{X}, d)$ est linéairement rigide si, et seulement si, la matrice de distance $M = \{d_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ de la suite X vérifie la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, tout $n \in \mathbb{N}$, et tout rayon extrémal L dans* $\mathrm{Adm}(d^n)$*, il existe un vecteur $v \in L$ sur ce rayon et un entier m tel que $|v - d_{m,j}| < \epsilon$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.*

La condition ci-dessus n'est pas sans rappeler le critère d'universalité vu à la section précédente ; nous résumons ci-dessous les principales idées de la preuve du Théorème 4.1.

Étape 1. Soit $\overline{X}'$ un sous-espace fini de l'espace métrique $\overline{X}$, et $u \in \mathrm{Lip}_0(\overline{X}')$ une application extrémale. Alors u définit une « face » $F_u = \{f \in V_0(\overline{X}')\colon \langle u, f\rangle = 1, \|f\| = 1\}$ de la boule unité de $V_0(\overline{X}') \subset V_0(\overline{X})$. On peut démontrer que pour tout $x \in \overline{X}'$ il existe $z \in \overline{X}'$ tel que $\bar{e}_{x,z}$ ou $\bar{e}_{z,x}$ appartient à F_u.

Étape 2. Si la distance entre une certaine application extrémale u sur $\overline{X}'$ et l'ensemble des fonctions de la forme $v(x) = d(x, z)$ $(x \in \overline{X}', z \in \overline{X})$ est supérieure à ε alors il existe une combinaison convexe μ de vecteurs $\bar{e}_{a,b} \in F_u$ telle que $(1+\epsilon)\mu$ peut être de norme 1 pour une norme sur V_0 compatible avec la distance sur $\overline{X}$. En particulier, il existe une norme compatible avec la distance sur $\overline{X}$ qui n'est pas la norme de Kantorovitch.

Ceci est suffisant pour établir le résultat : l'étape 2 montre que la condition du Théorème 4.1 est nécessaire pour que $\overline{X}$ soit linéairement rigide. Réciproquement, si $\overline{X}$ est linéairement rigide, et u est une application extrémale sur un sous-espace fini $\overline{X}' \subset \overline{X}$ de la forme $u(x)=d(x,z)$ (où $z \in \overline{X}$), alors un argument similaire à celui de l'étape 2 permet de trouver un certain vecteur $\bar{e}_{y,z}$ (ou $\bar{e}_{z,y}$) appartenant à l'intérieur de F_u. Cela donne un point à l'intérieur de F_u et de norme 1 pour la norme de Kantorovitch $\|\cdot\|_K$; comme tous les sommets de F_u sont aussi de norme 1 pour $\|\cdot\|_K$, ceci entraîne que tous les points de F_u sont en fait de norme 1 pour $\|\cdot\|_K$. Cette norme est maximale, donc on ne peut créer une norme différente de $\|\cdot\|_K$ que si certains points intérieurs à une face F_u ont une norme strictement inférieure à 1, et on voit que sous les hypothèses du Théorème 4.1 ce n'est pas possible. Le même argument permet de vérifier que, si tout fonction extrémale est une limite de vecteurs de la forme $d(z,\cdot)$, alors il n'y a pas de « marge » pour définir des normes distinctes sur $V_0(\overline{X})$ compatibles avec la distance sur $\overline{X}$. On peut pousser plus loin cette analyse du lien entre changement de norme compatible sur $V_0(\overline{X})$ et distance entre applications extrémales et fonctions de type $d(z,\cdot)$. Cela permet d'obtenir une nouvelle preuve du critère de rigidité linéaire ; on peut également l' établir en travaillant dans le dual de $E_{\overline{X}}$ (c'est-à-dire $\mathrm{Lip}_0(\overline{X})$). Ce dernier point de vue peut être vu comme une généralisation des arguments employés par Holmes [4] pour établir que l'espace d'Urysohn $\mathbb{U}$ est linéairement rigide ; ce fait est à l'origine de la notion de rigidité linéaire, mais la preuve elle-même était spécifique à l'espace d'Urysohn.

On peut reformuler le Théorème 4.1 sans utiliser de matrices de distance : un espace métrique (X,d) est linéairement rigide si, et seulement si, pour tout $\varepsilon>0$, tout sous-ensemble métrique fini F de X, et toute application extrémale u définie sur F il existe $z\in X$ et une constante $c\in\mathbb{R}^+$ tels que $|c+u(x)-d(z,x)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $x\in F$. Cette caractérisation a l'avantage d'être vraie sans hypothèse sur le caractère de densité (cardinalité minimale d'un sous-espace dense) de X. En effet, la notion de rigidité linéaire fait sens pour tout espace métrique X, et on peut établir qu'un espace métrique X est linéairement rigide si, et seulement si, tout sous-ensemble fini $F\subset X$ est contenu dans un sous-espace linéairement rigide séparable $Y\subset X$. L'idée sous-jacente est que les combinaisons linéaires finies d'éléments de F forment un espace séparable.

Le critère ci-dessus permet également de fournir de nouveaux exemples d'espaces linéairement rigides ; définissons $\mathbb{ZU}$ (resp. $\mathbb{QU}$) comme étant l'unique (à isométrie près) espace métrique dénombrable ultrahomogène et universel pour la classe des espaces métriques dénombrables à distances entières (resp. à distances non nulles rationnelles et supérieures à 1).

Théorème 4.2. *Les espaces* $\mathbb{ZU}$, $\mathbb{QU}_{\geqslant 1}$ *sont linéairement rigides.*

Pourtant, ces espaces sont discrets : un espace linéairement rigide n'est pas nécessairement « gros » topologiquement ; par contre, il est nécessairement « gros » métriquement, comme l'établit le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Tout espace métrique linéairement rigide* (X,d) *contenant strictement plus de deux points est non borné* (*et donc non compact*).

L'idée de la preuve de ce résultat est que, si (X,d) est linéairement rigide et borné, alors on peut utiliser le critère ci-dessus pour construire, pour tout $a\in X$, un point « diamétralement opposé » a', qui a la propriété que $d(a,x)+d(x,a')=d(a,a')$ pour tout $x\in X$ et $d(a,a')=\sup\{d(a,x)\colon\ x\in X\}$. Alors, on peut arriver à établir qu'il n'existe que deux points a,a' dans X, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

5. Extremalité et propriétés des espaces de Banach–Kantorovich

Il est bien connu (cf. [8]) que l'ensemble des matrices de distance infinies est un cône convexe faibement fermé. Ses rayons extrémaux correspondent aux distances sur $\mathbb{N}$ qui ne peuvent être écrites comme une combinaison convexe de deux distances non proportionnelles. L'espace d'Urysohn $\mathbb{U}$ est *extrémal* en ce sens, ainsi que l'espace $\mathbb{ZU}$. Cela découle de résultats d'Avis [1]. Les auteurs ne savent pas si tout espace linéairement rigide est extrémal.

Notons que $E_{\mathbb{U}}$ est un espace de Banach séparable universel (c'est-à-dire que tout espace de Banach séparable peut y être plongé linéairement isométriquement). Cela découle d'un résultat de Godefroy et Kalton [2], selon lequel si un espace de Banach séparable B se plonge isométriquement dans un espace de Banach B', alors il existe un plongement *linéaire* isométrique de B dans B'. De plus, $E_{\mathbb{U}}$ n'est pas isométrique aux espaces de Banach séparables universels « classiques », entre autres $\mathcal{C}([0,1])$ et l'espace de Guraryi [3]. On ne connaît pas de caractérisation de $E_{\mathbb{U}}$ en tant qu'espace de Banach par une propriété universelle. Il serait intéressant de parvenir à établir une telles caractérisation.

Remerciements

Les auteurs sont reconaissants envers V. Pestov pour d'intéressantes discussions.

Références

[1] D. Avis, On the extreme rays of the metric cone, Canad. J. Math. 32 (1) (1980) 126–144.
[2] G. Godefroy, N. Kalton, Lipschitz-free Banach spaces, Studia Math. 159 (1) (2003) 121–141.
[3] V.I. Gurariy, Spaces of universal placement, isotropic spaces and a problem of Mazur on rotations of Banach spaces, Sibirsk. Mat. Zh. 7 (1966) 1002–1013.
[4] R. Holmes, The universal separable metric space of Urysohn and isometric embeddings thereof in Banach spaces, Fund. Math. 140 (3) (1992) 199–223.
[5] L.V. Kantorovich, On the translocation of masses, Dokl. Akad. Nauk SSSR 37 (7–8) (1942) 227–229.
[6] L.V. Kantorovich, G.Sh. Rubinshtein, On a space of totally additive functions, Vestn. Leningr. Univ. 13 (7) (1958) 52–59.
[7] P.S. Urysohn, Sur un espace metrique universel, Bull. Sci. Math. 51 (1927) 1–28.
[8] A.M. Vershik, Random metric spaces and universality, Russian Math. Surveys 59 (2) (2004) 259–295.