Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 335–340
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Une nouvelle majoration pour le nombre de solutions d'un système d'équations polynomiales

Patrice Philippon [a], Martín Sombra [b,1]

[a] *Institut de mathématiques de Jussieu, UMR 7586 du CNRS, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*
[b] *Departament d'Àlgebra i Geometria, Universitat de Barcelona. Gran Via 585, 08007 Barcelona, Espagne*

Reçu le 20 juin 2007 ; accepté le 26 juillet 2007

Disponible sur Internet le 27 août 2007

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Un théorème de Kušnirenko et Bernštein montre que le nombre de zéros isolés dans le tore d'un système de polynômes est majoré par le volume mixte des polytopes de Newton des polynômes donnés, et que cette borne est génériquement exacte. Nous l'améliorons néanmoins en introduisant de nouveaux invariants combinatoires des polynômes et une généralisation de la notion de volume mixte : l'intégrale mixte de fonctions concaves. ***Pour citer cet article : P. Philippon, M. Sombra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

A new estimate for the number of solutions of a system of polynomial equations. A theorem of Kušnirenko and Bernštein shows that the number of isolated roots in the torus of a system of polynomials is bounded above by the mixed volume of the Newton polytopes of the given polynomials, and that this upper bound is generically exact. We improve on this result by introducing refined combinatorial invariants of polynomials and a generalization of the mixed volume of convex bodies: the mixed integral of concave functions. ***To cite this article: P. Philippon, M. Sombra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

In this Note we announce results on the number of roots of a system of polynomial equations to appear in the forthcoming text [9]. Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field and consider a family of $n+1$ Laurent polynomials $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{K}[s][t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ in the variables $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ with coefficients polynomials in the single variable s. How many isolated solutions $\xi \in \mathbb{K} \times (\mathbb{K}^\times)^n$ are there to the system of equations

$$f_0(\xi) = \cdots = f_n(\xi) = 0?$$

Adresses e-mail : pph@math.jussieu.fr (P. Philippon), sombra@ub.edu (M. Sombra).
[1] Financé par le programme Ramón y Cajal du Ministère Espagnol de la Recherche.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.07.016

Let $P_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ denote the Newton polytope of f_i when regarded as a Laurent polynomial in all of the variables $s, t_1, \dots, t_n$. The classical theorem of Kušnirenko and Bernštein asserts that the number (counting multiplicities) of those isolated points lying in the torus $(\mathbb{K}^\times)^{n+1}$ is bounded above by the mixed volume $\mathrm{MV}_{n+1}(P_0, \dots, P_n)$, with equality when the system is generic with given Newton polytopes $P_0, \dots, P_n$ [6,1]. This result is a cornerstone of toric geometry and polynomial equation solving, *see* for instance [4,12].

For the formulation of our results we introduce some combinatorial invariants associated to the given system of polynomials. Let $f = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j(s)\mathbf{t}^{a_j} \in \mathbb{K}(s)[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ be a non-zero Laurent polynomial and for each $v \in \mathbb{P}^1$ consider the *v-adic Newton polytope of f* defined as the convex hull

$$\mathrm{NP}_v(f) := \mathrm{Conv}\big(\big(a_0, -\mathrm{ord}_v(\alpha_0)\big), \dots, \big(a_N, -\mathrm{ord}_v(\alpha_N)\big)\big) \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

where $\mathrm{ord}_v(\alpha_j)$ denotes the *order of vanishing of α_j at v* viewed as a rational function on $\mathbb{P}^1$. This polytope sits above the usual Newton polytope $\mathrm{NP}(f) := \mathrm{Conv}(a_0, \dots, a_N) \subset \mathbb{R}^n$ of f relative to the variables $\mathbf{t}$, *via* the natural projection $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ which forgets the last coordinate. Consider the *roof function of* $\mathrm{NP}_v(f)$ *above* $\mathrm{NP}(f)$

$$\vartheta_v(f) : \mathrm{NP}(f) \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto \max\big\{z \in \mathbb{R}\colon (u, z) \in \mathrm{NP}_v(f)\big\},$$

defined as the concave and piecewise affine function parameterizing the upper envelope of $\mathrm{NP}_v(f)$ above $\mathrm{NP}(f)$. For $f = 0$ we set for convenience $\mathrm{NP}(f) := \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ and for $v \in \mathbb{P}^1$ we define $\vartheta_v(f) : \{0\} \to \mathbb{R}$ as the zero function. It is worth mentioning that this roof function appears also in tropical geometry as the Legendre–Fenchel dual of the "tropical polynomial": $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, u \mapsto \min_j(\mathrm{ord}_v(\alpha_j) + \langle a_j, u\rangle)$, associated to f with respect to the valuation ord_v, *see* for instance [7].

For concave functions $\rho : Q \to \mathbb{R}$ and $\sigma : R \to \mathbb{R}$ defined on convex sets $Q, R \subset \mathbb{R}^n$ respectively, we consider their *sup-convolution*

$$\rho \boxplus \sigma : Q + R \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto \max\big\{\rho(v) + \sigma(w)\colon v \in Q, w \in R, v + w = u\big\},$$

which is a concave function defined on the Minkowski sum $Q + R$. This operation is dual under the Legendre–Fenchel conjugation to the pointwise sum of concave functions [10] (whence the name 'convolution'[2]), it extends the Minkowski sum to concave functions.

Definition. ([8]) For a family of $n + 1$ concave functions $\rho_0 : Q_0 \to \mathbb{R}, \dots, \rho_n : Q_n \to \mathbb{R}$ defined on convex bodies of $\mathbb{R}^n$, the *mixed integral* is

$$\mathrm{MI}_n(\rho_0, \dots, \rho_n) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \sum_{0 \leqslant i_0 < \cdots < i_j \leqslant n} \int_{Q_{i_0} + \cdots + Q_{i_j}} (\rho_{i_0} \boxplus \cdots \boxplus \rho_{i_j})(u)\, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n.$$

This is the natural extension to concave functions of the mixed volume of convex bodies and as such it satisfies analogous properties: it is symmetric in $\rho_0, \dots, \rho_n$, linear in each variable ρ_i with respect to $\boxplus$ and for a concave function $\rho : Q \to \mathbb{R}$ we have: $\mathrm{MI}_n(\rho, \dots, \rho) = (n + 1)! \int_Q \rho(u)\, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_n$ [8, Prop. IV.5(a,b)]. In [9] we establish further properties, in particular its monotonicity and a decomposition formula expressing the mixed integral in terms of lower dimensional mixed integrals and mixed volumes, analogous to the known decomposition formula for mixed volumes [2, Thm. IV.4.10].

1. Systèmes toriques sur la droite projective

Pour une famille de polynômes de Laurent $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{K}[s][\mathbf{t}^{\pm 1}]$ soit $Z(f_0, \dots, f_n) \subset \mathbb{K} \times (\mathbb{K}^\times)^n$ l'ensemble des solutions du système $f_0 = \cdots = f_n = 0$ et $Z(f_0, \dots, f_n)_0$ l'ensemble des solutions isolées. À chacun de ces points isolés ξ est associée la multiplicité d'intersection $\mathrm{mult}(\xi \,|\, f_0, \dots, f_n)$ de $f_0, \dots, f_n$ en ξ. Par ailleurs, nous disons que f_i est *primitif* s'il n'a pas de facteur non constant dans $\mathbb{K}[s]$.

[2] This notion comes from convex analysis, but since this theory deals mostly with convex functions rather than with concave, the corresponding operation of inf-convolution (usually denoted $\square$) is more common in this context; the connection with our notation reads: $-(\rho \boxplus \sigma) = (-\rho) \square (-\sigma)$.

Théorème 1.1. *Soit $f_0,\dots,f_n\in\mathbb{K}[s][\mathbf{t}^{\pm1}]=\mathbb{K}[s][t_1^{\pm1},\dots,t_n^{\pm1}]$ une famille de polynômes de Laurent primitifs. Pour $0\leqslant i\leqslant n$ et $v\in\mathbb{P}^1$ soit $\vartheta_{i,v}:\mathrm{NP}(f_i)\to\mathbb{R}$ la paramétrisation de l'enveloppe supérieure de $\mathrm{NP}_v(f_i)$ au-dessus de $\mathrm{NP}(f_i)$; alors*

$$\sum_{\xi\in Z(f_0,\dots,f_n)_0}\mathrm{mult}(\xi\,|\,f_0,\dots,f_n)\leqslant\sum_{v\in\mathbb{P}^1}\mathrm{MI}_n(\vartheta_{0,v},\dots,\vartheta_{n,v}).\tag{1}$$

De plus, (1) *est une égalité pour $f_0,\dots,f_n$ génériques de fonctions ($\vartheta_{i,v}$: $0\leqslant i\leqslant n$, $v\in\mathbb{P}^1$) données.*

Dans le cas non mixte l'énoncé se ramène à :

Corollaire 1.2. *Avec les notations du Théorème* 1.1*, soit $Q\subset\mathbb{R}^n$ un polytope contenant $\mathrm{NP}(f_i)$ pour tout i, et pour tout $v\in\mathbb{P}^1$ soit $\vartheta_v:Q\to\mathbb{R}$ une fonction concave telle que $\vartheta_v\geqslant\vartheta_{i,v}$, $i=0,\dots,n$. Alors*

$$\sum_{\xi\in Z(f_0,\dots,f_n)_0}\mathrm{mult}(\xi\,|\,f_0,\dots,f_n)\leqslant(n+1)!\sum_{v\in\mathbb{P}^1}\int_Q\vartheta_v(u)\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

Comme illustration, considérons $k\geqslant1$ et les polynômes

$$f=(s-1)^{2k}+(s-1)^kt-st^2,\qquad g=-3(s-1)^{2k}+(s-1)^kt+st^2\in\mathbb{K}[s,t].$$

Le système $f=g=0$ n'a que la solution $(2,1)$ dans $\mathbb{K}\times\mathbb{K}^\times$. Les théorèmes de Bézout homogène et bi-homogène donnent respectivement les majorations

$$\deg(f)\deg(g)=4k^2\quad\text{et}\quad\deg_s(f)\deg_t(g)+\deg_t(f)\deg_s(g)=8k$$

pour le nombre de points isolés, tandis que le théorème de Kušnirenko–Bernštein prédit au plus $4k+1$ solutions dans $(\mathbb{K}^\times)^2$. D'un autre côté, le Corollaire 1.2 donne la valeur exacte 1, donc ce système est générique par rapport à notre estimation mais pas par rapport à celle de Kušnirenko–Bernštein.

Dans la situation du Théorème 1.1, on remarque que $\vartheta_{i,v}=0$ pour presque toute place v et ainsi le nombre de termes non-nuls dans le membre de droite de (1) est fini. De par la monotonie de l'intégrale mixte, la seule contribution positive dans cette somme vient de $v=\infty$, car $-\mathrm{ord}_\infty(\alpha_{i,j})=\deg(\alpha_{i,j})$, et donc $\vartheta_{i,\infty}\geqslant0$ tandis que pour $v\in\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}$ on a $-\mathrm{ord}_v(\alpha_{i,j})\leqslant0$ et $\vartheta_{i,v}\leqslant0$.

La fonction $\vartheta_{i,\infty}$ (resp. $-\vartheta_{i,0}$) paramétrise l'enveloppe supérieure (resp. inférieure) du polytope de Newton P_i de f_i par rapport aux variables $s,\mathbf{t}$, et on vérifie

$$\mathrm{MI}_n(\vartheta_{0,0},\dots,\vartheta_{n,0})+\mathrm{MI}_n(\vartheta_{0,\infty},\dots,\vartheta_{n,\infty})=\mathrm{MV}_{n+1}(P_0,\dots,P_n).$$

Ceci montre que, dans le cas de polynômes primitifs dans $\mathbb{K}[s][\mathbf{t}^{\pm1}]$, la majoration (1) améliore l'estimation de Kušnirenko et Bernštein, tout en comptant les racines isolées du système dans l'ensemble plus grand $\mathbb{K}\times(\mathbb{K}^\times)^n$. Ces remarques sont encore valables lorsque les f_i ne sont plus primitifs, *voir* à ce propos le Théorème 3.1.

On observera effectivement une discrépance entre ces estimations lorsqu'au moins une des intégrales mixtes correspondant à une place $v\neq0,\infty$ dans (1), est strictement négative. Ceci arrive lorsque des coefficients $\alpha_{i,j}$ ont des zéros communs, comme dans l'exemple ci-dessus, l'amélioration dépendant alors de la configuration précise des $\vartheta_{i,v}$.

2. Conditions d'égalité

Les conditions d'égalité dans le Théorème 1.1 s'explicitent en termes de systèmes d'équations de dimension inférieure. Soit $f\in\mathbb{K}(s)[\mathbf{t}^{\pm1}]$ et $\tau\in\mathbb{R}^n$, pour $v\in\mathbb{P}^1\setminus\{\infty\}$ la *partie initiale relative à τ de f en v* est définie comme le polynôme de Laurent $\mathrm{init}_{v,\tau}(f)\in\mathbb{K}[\mathbf{t}^{\pm1}]$ tel que

$$f(s,s^{-\tau_1}t_1,\dots,s^{-\tau_n}t_n)=(s-v)^c\big(\mathrm{init}_{v,\tau}(f)+\mathrm{o}(1)\big)$$

pour $c\in\mathbb{Z}$ et $o(1)$ tendant vers 0 lorsque s tend vers v, tandis que la *partie initiale relative à τ de f en ∞* est définie comme la partie initiale relative à τ de $f(s^{-1},\mathbf{t})$ en 0.

Proposition 2.1. *Avec les notations du Théorème* 1.1*, si pour tout $v \in \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ et $\tau \neq \mathbf{0}$, et pour $v = \infty$ et tout $\tau \in \mathbb{R}^n$, le système d'équations*

$$\mathrm{init}_{v,\tau}(f_0)(\xi) = \cdots = \mathrm{init}_{v,\tau}(f_n)(\xi) = 0, \quad \xi \in (\mathbb{K}^\times)^n,$$

n'a pas de solution, alors l'estimation (1) *est une égalité.*

Bien que cela ne ressorte pas directement de la formulation, les conditions dans la Proposition 2.1 sont équivalentes à un nombre fini de systèmes d'équations en au plus n variables.

La majoration (1) est aussi clairement une égalité pour tout système de fonctions ($\vartheta_{i,v}$: $0 \leqslant i \leqslant n$, $v \in \mathbb{P}^1$) fixé tel que $\sum_{v\in\mathbb{P}^1} \mathrm{MI}_n(\vartheta_{0,v}, \ldots, \vartheta_{n,v}) = 0$. Cette situation se caractérise en termes de rangs de certains $\mathbb{Z}$-modules.

3. Systèmes toriques sur une courbe

Il est naturel d'étendre le Théorème 1.1 à une base arbitraire (de dimension 1) en lieu et place de $\mathbb{P}^1$. Soit S une courbe lisse et complète, munie de fibrés en droites L_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Notons

$$\Gamma(S; L_i)[\mathbf{t}^{\pm1}] := \Gamma(S; L_i) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\mathbf{t}^{\pm1}] = \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}^n} \Gamma(S; L_i) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbf{t}^a,$$

le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de Laurent à coefficients sections globales de L_i, et pour chaque i considérons un élément $f_i \in \Gamma(S; L_i)[\mathbf{t}^{\pm1}]$. L'ensemble des zéros (resp. zéros isolés) dans $S \times (\mathbb{K}^\times)^n$ d'un tel système est bien défini et nous le notons comme précédemment $Z(f_0, \ldots, f_n)$ (resp. $Z(f_0, \ldots, f_n)_0$). Dans cette situation on a encore les notions de polytope de Newton v-adique $\mathrm{NP}_v(f_i) \subset \mathbb{R}^n$ et de fonction toiture correspondante $\vartheta_v(f_i) : \mathrm{NP}_v(f_i) \to \mathbb{R}$.

Mais, afin de prendre en compte le cas où les coefficients de certains f_i ont des zéros communs, nous introduisons pour $v \in S$ et $i = 0, \ldots, n$ une fonction supplémentaire $\bar{\vartheta}_v(f)$ définie comme la fonction constante égale à $\mathrm{ord}_v(f_i) := \min(\mathrm{ord}_v(\sigma_{i,j}) : 0 \leqslant j \leqslant N_i)$ sur le polytope de Newton du polynôme de Laurent $f_i(v, \cdot) \in \mathbb{K}[\mathbf{t}^{\pm1}]$. Pour $c \in \mathbb{R}$ et Q un ensemble on note $c|_Q$ la fonction constante égale à c sur Q.

Avec ces notations on a la généralisation suivante du Théorème 1.1 :

Théorème 3.1. *Soit S une courbe lisse et complète munie de fibrés en droites L_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Pour chaque i soit $f_i \in \Gamma(S; L_i)[\mathbf{t}^{\pm1}]$ un polynôme de Laurent en les variables $\mathbf{t}$, non nul, à coefficients dans $\Gamma(S; L_i)$.*

Posons $\delta_i := \deg(L_i)$ et pour $v \in S$ soit $\vartheta_v(f_i) : \mathrm{NP}(f_i) \to \mathbb{R}$ la paramétrisation de l'enveloppe supérieure de $\mathrm{NP}_v(f_i)$ au-dessus de $\mathrm{NP}(f_i)$ et $\bar{\vartheta}_v(f_i)$ la fonction constante $\mathrm{ord}_v(f_i)$ sur le polytope $\mathrm{NP}(f_i(v, \cdot))$. Alors, en notant $\boldsymbol{\delta}|_{\mathrm{NP}(\mathbf{f})} = (\delta_0|_{\mathrm{NP}(f_0)}, \ldots, \delta_n|_{\mathrm{NP}(f_n)})$ et $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_n)$, on a

$$\sum_{\xi\in Z(\mathbf{f})_0} \mathrm{mult}(\xi|\mathbf{f}) \leqslant \mathrm{MI}_n(\boldsymbol{\delta}|_{\mathrm{NP}(\mathbf{f})}) + \sum_{v\in S} \big(\mathrm{MI}_n\big(\vartheta_v(\mathbf{f})\big) + \mathrm{MI}_n\big(\bar{\vartheta}_v(\mathbf{f})\big)\big).$$

De plus, on a égalité pour des systèmes $\mathbf{f}$ génériques à fonctions ($\vartheta_{i,v}$: $0 \leqslant i \leqslant n$, $v \in \mathbb{P}^1$) données.

Comme pour le Théorème 1.1, il est possible de donner des conditions explicites pour le cas d'égalité dans cette majoration. En outre, l'hypothèse de lissité de la base S n'est pas nécessaire, le résultat s'étend à une courbe singulière arbitraire à condition de remplacer la somme sur les points de S par une somme sur les places de S.

Par la monotonie de l'intégrale mixte on a

$$-\mathrm{MI}_n(\delta|_{\mathrm{NP}(\mathbf{f})}) \leqslant \mathrm{MI}_n\big(\vartheta_v(\mathbf{f})\big) + \mathrm{MI}_n\big(\bar{\vartheta}_v(\mathbf{f})\big) \leqslant 0$$

car $\vartheta_v(f_i) \leqslant -\mathrm{ord}_v(f_i) \leqslant 0$, $\mathrm{NP}(f_i(v, \cdot)) \subset \mathrm{NP}(f_i)$, et donc la seule contribution positive dans le membre de droite de l'inégalité du Théorème 3.1, qui est globalement positif ou nul, vient du terme $\mathrm{MI}_n(\boldsymbol{\delta}|_{\mathrm{NP}(\mathbf{f})})$.

Par ailleurs, l'intégrale mixte $\mathrm{MI}_n(\bar{\vartheta}_v(\mathbf{f}))$ ne contribue que si v est un point base d'un (et un seul) des f_i, et dans ce cas elle peut s'exprimer comme un volume mixte n-dimensionnel. En particulier, si aucun des f_i n'a de point base, ces fonctions ne contribuent pas du tout. C'est précisément la situation du Théorème 1.1 à cause de l'hypothèse que les polynômes $f_0, \ldots, f_n$ sont primitifs. De fait, appliquant le Théorème 3.1 au cas $S = \mathbb{P}^1$ nous étendons le Théorème 1.1 à des polynômes éventuellement non-primitifs.

Comme exemple d'application, le Théorème 3.1 permet de traiter des systèmes d'équations sur une variété semi-abelienne G, extension $0 \to (\mathbb{K}^\times)^n \to G \to E \to 0$ d'une courbe elliptique E par un tore.

4. Systèmes toriques incomplets

Comme conséquence du Théorème 3.1, on obtient aussi une borne pour le degré de la partie propre de l'intersection de $m+1$ polynômes de Laurent sur $S \times (\mathbb{K}^\times)^n$ avec $m \leqslant n$. Soit $Z \subset S \times (\mathbb{K}^\times)^n$ un cycle de dimension d. Pour $1 \leqslant k \leqslant d$ soit L_k un fibré en droites ample sur S et $g_k = \sum_{j=0}^{N_k} \sigma_{k,j} \mathbf{t}^{a_{k,j}} \in \Gamma(S; L_k)[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ un polynôme de Laurent à coefficients dans $\Gamma(S; L_k)$. Le *degré de Z relatif à $g_1, \ldots, g_k$* est défini comme

$$\deg_{\mathbf{g}}(Z) := \deg\big(Z \cdot \varphi_{g_1}^{-1}(E_1) \cdot \cdots \cdot \varphi_{g_d}^{-1}(E_d)\big),$$

où $\cdot$ désigne le produit d'intersection, φ_{g_k} l'application

$$\varphi_{g_k} : S \times (\mathbb{K}^\times)^n \to \mathbb{P}^{N_k}, \qquad (s, \mathbf{t}) \mapsto \big(\sigma_{k,0}(s)\mathbf{t}^{a_{k,0}} : \cdots : \sigma_{k,N_k}(s)\mathbf{t}^{a_{k,N_k}}\big),$$

et E_k est un hyperplan générique de $\mathbb{P}^{N_k}$.

Corollaire 4.1. *Soit S une courbe lisse et complète, munie de fibrés en droites $L_0, \ldots, L_n$ et $m \leqslant n$. Pour $0 \leqslant i \leqslant m$ et $m+1 \leqslant k \leqslant n$ soient $f_i \in \Gamma(S; L_i)[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ non nul et $g_k \in \Gamma(S; L_k)[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ tels que le lieu base de chaque g_k dans S soit vide.*

Notons $\delta_i := \deg(L_i)$, $\boldsymbol{\delta} := (\delta_0, \ldots, \boldsymbol{\delta}_n)$, $\mathbf{f} := (f_0, \ldots, f_m)$ et $\mathbf{g} := (g_{m+1}, \ldots, g_n)$. Soit $Z(\mathbf{f})_{n-m}$ la partie de dimension $n-m$ du cycle intersection $\mathrm{div}(f_0) \cdot \ldots \cdot \mathrm{div}(f_m)$ *dans $S \times (\mathbb{K}^\times)^n$, alors*

$$\deg_{\mathbf{g}}\big(Z(\mathbf{f})_{n-m}\big) \leqslant \mathrm{MI}_n(\boldsymbol{\delta}|_{\mathrm{NP}(\mathbf{f})}, \boldsymbol{\delta}|_{\mathrm{NP}(\mathbf{g})}) + \sum_{v \in S} \big(\mathrm{MI}_n\big(\vartheta_v(\mathbf{f}), \vartheta_v(\mathbf{g})\big) + \mathrm{MI}_n\big(\bar{\vartheta}_v(\mathbf{f}), \bar{\vartheta}_v(\mathbf{g})\big)\big).$$

La démonstration de ces résultats repose sur la théorie de l'intersection appliquée à une compactification adéquate de l'espace ambiant $S \times (\mathbb{K}^\times)^n$. Le système de polynômes $f_i \in \Gamma(S; L_i)[\mathbf{t}^{\pm 1}]$ est naturellement associé à un système linéaire sur une variété torique multiprojective X sur la courbe S. Ces variétés s'apparentent aux variétés toriques sur des anneaux de valuation discrète étudiées par A.L. Smirnov dans un contexte semblable [11]. Elles sont naturellement munies d'une famille de fonctions concaves, affines par morceaux, $\Theta_X := (\vartheta_{i,v} : Q_i \to \mathbb{R}\colon 0 \leqslant i \leqslant n, v \in S)$ qui jouent pour ces variétés le rôle des polytopes pour les variétés toriques projectives sur un corps.

Nous montrons que la géométrie de X s'explicite en termes de Θ_X, en particulier sa dimension, la structure de ses fibres et leurs degrés mixtes. La majoration du nombre de zéros se déduit du calcul d'un degré mixte privilégié, tandis que les conditions de généricité sont obtenues grâce à une étude fine de la structure des fibres sur S. Cette méthode est à rapprocher de celle de B. Teissier dans [13], *voir* aussi [3], pour une démonstration du théorème de Kušnirenko–Bernštein.

Partant d'une version préliminaire de notre texte [9], M.I. Herrero a proposé une approche alternative intéressante, plus proche de celle du travail de Bernštein [1]. De cette façon elle a obtenu une autre démonstration du Théorème 1.1 pour le cas de deux polynômes en deux variables [5].

Dans la pratique, le calcul de la majoration (1) peut se simplifier substantiellement avec quelques observations. Suppons le système $\mathbf{f}$ défini sur un *corps effectif*, par exemple $\mathbb{Q}$. Pour calculer les fonctions $\vartheta_{i,v}$, il suffit de calculer des factorisations de la forme

$$\alpha_{i,j}(s) = \lambda_{i,j} \prod_{p \in P} p(s)^{e_p(i,j)} \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant N_i,$$

pour un ensemble fini $P \subset \mathbb{Q}[s]$ de polynômes deux à deux premiers entre eux, $e_p(i,j) \in \mathbb{N}$ et $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Q}^\times$. Ceci ne demande que des calculs de pgcd. En particulier, il n'est pas nécessaire de calculer les racines des $\alpha_{i,j}$, ni même de les factoriser sur $\mathbb{Q}(s)$. De plus, les intégrales mixtes dans (1) peuvent se calculer avec une formule de décomposition analogue à celle connue pour les volumes mixtes [2, Thm. IV.4.10], ce qui évite le coûteux calcul des sup-convolutions.

Références

[1] D.N. Bernštein, The number of roots of a system of equations, Funk. Anal. Priloz. 9 (1975) 1–4 (en russe) ; traduction anglaise dans Anal. Appl. 9 (1975) 183–185.

[2] G. Ewald, Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry, Springer, 1996.

[3] W. Fulton, Introduction to Toric Varieties, Ann. Math. Stud., vol. 131, Princeton Univ. Press, 1993.

[4] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants, Birkhäuser, 1994.
[5] M.I. Herrero, Sobre la cantidad de soluciones de sistemas de ecuaciones polinomiales ralas, Master thesis, Universidad de Buenos Aires, 2007. Disponible à http://cms.dm.uba.ar/lic/tesis/2007.html.
[6] A.G. Kušnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math. 32 (1976) 1–31.
[7] G. Mikhalkin, Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry, in: Different Faces of Geometry, Int. Math. Ser., vol. 3, Kluwer, 2004, pp. 257–300.
[8] P. Philippon, M. Sombra, Hauteur normalisée des variétés toriques projectives, à paraître dans J. Inst. Math. Jussieu, e-print math.NT/0406476, 38 pp.
[9] P. Philippon, M. Sombra, A refinement of the Kušnirenko–Bernštein's estimate, tapuscript, 44 pp.
[10] R.T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton Univ. Press, 1970.
[11] A.L. Smirnov, Torus schemes over a discrete valuation ring, Algebra i Analiz 8 (1996) 161–172 (en russe); Traduction anglaise dans St. Petersburg Math. J. 8 (1997) 651–659.
[12] B. Sturmfels, Solving Systems of Polynomial Equations, CBMS Regional Conference Series in Math., vol. 97, Amer. Math. Soc., 2002.
[13] B. Teissier, Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques, C. R. Acad. Sci. Paris 288 (1979) 287–289.