Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 341–344
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités

Sur l'interversion de l'ordre entre deux opérations sur les tribus

Irene Crimaldi [a], Giorgio Letta [b], Luca Pratelli [c]

[a] *Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta San Donato 5, 40126 Bologna, Italie*
[b] *Dipartimento di Matematica, Largo B. Pontecorvo 5, 56127 Pisa, Italie*
[c] *Accademia Navale, Viale Italia 72, 57100 Livorno, Italie*

Reçu le 15 décembre 2006 ; accepté le 26 juillet 2007

Disponible sur Internet le 27 août 2007

Présenté par Paul Malliavin

Résumé

On caractérise les espaces probabilisables $(\Omega, \mathcal{A})$ tels que, pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ et toute famille filtrante décroissante $(\mathcal{F}_t)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{F}_t \downarrow \mathcal{F}_\infty$, on ait $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G} \downarrow \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}$. On en déduit une caractérisation des espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tels que, pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ et toute suite décroissante $(\mathcal{F}_n)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_\infty$, on ait $\bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}) \sim \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G} \pmod P$. ***Pour citer cet article : I. Crimaldi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Exchanging the order of two operations on sigma-fields. We characterize the measurable spaces $(\Omega, \mathcal{A})$ such that, for each sub-σ-field $\mathcal{G}$ of $\mathcal{A}$ and each decreasing filtered family $(\mathcal{F}_t)$ of sub-σ-fields of $\mathcal{A}$, with $\mathcal{F}_t \downarrow \mathcal{F}_\infty$, we have $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G} \downarrow \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}$. It follows a characterization of the probability spaces $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ such that, for each sub-σ-field $\mathcal{G}$ of $\mathcal{A}$ and each decreasing sequence $(\mathcal{F}_n)$ of sub-σ-fields of $\mathcal{A}$, with $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_\infty$, we have $\bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}) \sim \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G} \pmod P$. ***To cite this article: I. Crimaldi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

1. Introduction et énoncé des résultats principaux

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Posons $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \mathcal{F}_n$. Un exemple dû à Barlow et Perkins (voir [2], § 2.5, ex. 4, p. 29) montre que l'inclusion évidente

$$\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G} \subset \bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G})$$

peut être stricte. En d'autres termes, dans le treillis formé par les sous-tribus de $\mathcal{A}$, il n'est pas toujours permis d'inverser l'ordre entre l'opération d'intersection d'une suite décroissante de tribus et l'opérateur de *grossissement* $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ associé à une tribu $\mathcal{G}$ fixée. Un cas particulièrement simple est celui où $\mathcal{G}$ coïncide avec la tribu $\mathcal{N}_P$ engendrée par la classe des événements négligeables pour une loi de probabilité P donnée sur $\mathcal{A}$. Dans ce cas, il est

Adresses e-mail : crimaldi@dm.unibo.it (I. Crimaldi), letta@dm.unipi.it (G. Letta), pratel@mail.dm.unipi.it (L. Pratelli).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.07.020

bien connu (et facile à prouver) que l'interversion de l'ordre est toujours permise. En d'autres termes, on a toujours l'égalité

$$\bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{N}_P) = \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{N}_P. \tag{1}$$

En dehors de ce cas simple, on connaît un certain nombre de situations importantes, assez variées, qui conduisent à des cas particuliers du cadre décrit ci-dessus et dans lesquelles un rôle décisif est joué par le problème d'établir si l'interversion est permise ou non. Dans de telles situations, plusieurs auteurs ont donné des conditions suffisantes (ou même *nécessaires et suffisantes*) pour que l'inversion soit permise (voir [3–6]). Dans la présente Note, on se pose un problème un peu différent (moins important du point de vue des applications, mais non dépourvu d'un certain intérêt théorique) : le problème de caractériser les espaces probabilisables $(\Omega, \mathcal{A})$ tels que, pour *toute* sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ et *toute* famille filtrante décroissante $(\mathcal{F}_t)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, on ait (en posant $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_t \mathcal{F}_t$)

$$\bigcap_t (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}) = \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}. \tag{2}$$

(On remarquera que, dans ce problème, les suites décroissantes sont remplacées par les *familles filtrantes* décroissantes de tribus.) La réponse est fournie par le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Pour un espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{A})$*, on a l'alternative suivante.*

(a) *Si la tribu* $\mathcal{A}$ *est engendrée par une partition dénombrable de* Ω*, alors, pour toute sous-tribu* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{A}$ *et toute famille filtrante décroissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{A}$*, on a l'égalité* (2) *(avec* $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_t \mathcal{F}_t$*).*
(b) *Dans le cas contraire, étant donnée sur* $\mathcal{A}$ *une loi* P *non dégénérée, on peut toujours construire une sous-tribu* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{A}$*, non dégénérée, et une famille filtrante décroissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*, de telle manière que l'on ait*

$$\mathcal{F}_t \sim \mathcal{F} \ (\mathrm{mod}\ P) \quad \textit{pour tout}\ t, \qquad \bigcap_t \mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}. \tag{3}$$

(On remarquera que la partie (b) de ce théorème entraîne notamment que l'égalité (1) *n'est plus valable*, en général, si on y remplace une suite décroissante par une famille filtrante décroissante de tribus.)

On se pose ensuite un problème concernant les suites décroissantes de tribus : le problème de caractériser les espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tels que, pour *toute* sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ et *toute* suite décroissante $(\mathcal{F}_n)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{F}_n \downarrow \mathcal{F}_\infty$, on ait

$$\bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}) \sim \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G} \ (\mathrm{mod}\ P). \tag{4}$$

La réponse est fournie par le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Pour un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, avec* P *non dégénérée, on a l'alternative suivante.*

(a) *Si la loi* P *est purement atomique, alors, pour toute sous-tribu* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{A}$ *et toute suite décroissante* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{A}$*, on a toujours la relation* (4) *(avec* $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \mathcal{F}_n$*).*
(b) *Dans le cas contraire, on peut toujours construire deux sous-tribus* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *de* $\mathcal{A}$ *et une suite décroissante* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*, de telle manière que l'on ait*

$$\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G} = \mathcal{F} \quad \textit{pour tout}\ n, \qquad \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G} \not\sim \mathcal{F} \ (\mathrm{mod}\ P). \tag{5}$$

Comme application de la partie (b) du Théorème 1.1, on expose, à la fin de la Note, un petit complément au théorème sur la convergence d'une martingale inverse filtrante.

2. Résultats préliminaires

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{A})$ sera un espace probabilisable fixé. Les éléments de $\mathcal{A}$ seront appelés *événements*, ou bien ensembles *mesurables*. Chacune des classes d'équivalence suivant la relation d'équivalence dans Ω définie par

$\omega \sim \omega' \iff (I_A(\omega))_{A\in\mathcal{A}} = (I_A(\omega'))_{A\in\mathcal{A}}$ sera appelée un $\mathcal{A}$-*atome*. Par contre, si P est une loi sur $\mathcal{A}$, on appellera P-*atome* un événement H, non négligeable pour P, tel que la loi $P_H = P(\cdot \mid H)$ soit dégénérée. On dira que P est *dépourvue d'atomes* s'il n'existe aucun P-atome. Par contre, on dira que P est *purement atomique* si Ω est une réunion de P-atomes. Étant donné un couple $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, on écrira $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ (mod P) pour indiquer que l'on a $\mathcal{F} \vee \mathcal{N}_P = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}_P$.

Proposition 2.1. *Soit P une loi sur la tribu $\mathcal{A}$. Supposons qu'il existe un événement B, non dégénéré, et une famille filtrante décroissante $(B_t)_{t\in T}$ d'événements contenus dans B et équivalents à B (mod P), dont l'intersection ne contienne aucun événement différent de $\emptyset$.*

On peut alors construire une sous-tribu $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$, non dégénérée, et une famille filtrante décroissante $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, de telle manière que les relations (3) *soient vérifiées.*

Démonstration. Posons $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{A}\colon\ A \subset B\}$, $\mathcal{J}_t = \{A \in \mathcal{A}\colon\ A \subset B_t\}$. Alors $(\mathcal{J}_t)_{t\in T}$ est une famille filtrante décroissante de parties de $\mathcal{J}$ et, si l'on désigne par $\mathcal{J}_\infty$ l'intersection des classes $\mathcal{J}_t$, on a $\mathcal{J}_\infty = \{\emptyset\}$. Posons $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{J})$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{J}_t)$, $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_t \mathcal{F}_t$. On a alors $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. En outre, la première des relations (3) est vérifiée, car tout élément A de $\mathcal{J}$ est équivalent (mod P) à $A \cap B_t$ (élément de $\mathcal{J}_t$). On voit aisément que les éléments de $\mathcal{F}_t$ sont exactement les éléments de $\mathcal{J}_t$ et leurs complémentaires : en d'autres termes, en désignant par φ l'involution de $\mathcal{P}(\Omega)$ définie par $\varphi(A) = A^c$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{J}_t \cup \varphi(\mathcal{J}_t)$. Il en résulte $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{J}_\infty \cup \varphi(\mathcal{J}_\infty) = \{\emptyset, \Omega\}$. □

Corollaire 2.2. *Soit P une loi sur la tribu $\mathcal{A}$. La conclusion de la proposition précédente a lieu notamment lorsque l'une quelconque des trois conditions suivantes est remplie* :

(a) *Il existe un $\mathcal{A}$-atome K, non mesurable, avec* $0 < P^*(K) < 1$.
(b) *Il existe un événement E, non dégénéré, qui est une réunion d'événements négligeables.*
(c) *Il existe un $\mathcal{A}$-atome K, mesurable et non dégénéré, et un ensemble G, non mesurable, qui est une intersection d'événements négligeables.*

Démonstration. Dans le cas (a), il suffit de prendre B égal à un couvercle mesurable de K et de remarquer que l'intersection des événements contenus dans B et équivalents à B (mod P) est égale à K. Dans le cas (b), il suffit de prendre B égal à E^c et de remarquer que l'intersection des événements contenus dans B et équivalents à B (mod P) est vide. Enfin, dans le cas (c), si l'on considère la tribu $\mathcal{A}_0$ engendrée par $\{A \in \mathcal{A}\colon\ A \supset K \cup G\}$ et l'on désigne par P_0 la restriction de P à $\mathcal{A}_0$, il suffit de remarquer que, dans l'espace $(\Omega, \mathcal{A}_0, P_0)$, l'ensemble $K \cup G$ est un $\mathcal{A}_0$-atome, non mesurable, avec $P_0^*(K \cup G) = P(K)$. □

3. Démonstration du Théorème 1.1

Plaçons nous d'abord dans les hypothèses de la partie (a) du Théorème 1.1. La tribu $\mathcal{A}$ est donc engendrée par une partition dénombrable de Ω (nécessairement identique à l'ensemble des $\mathcal{A}$-atomes). Cette propriété (qui entraîne notamment la stabilité pour les réunions de cardinalité quelconque) a lieu aussi pour toute sous-tribu de $\mathcal{A}$. Par conséquent, si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont deux sous-tribus de $\mathcal{A}$, la tribu $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ est constituée par les événements A tels que, pour tout $\mathcal{G}$-atome K, l'événement $A \cap K$ appartienne à la trace de $\mathcal{F}$ sur K. Soient maintenant $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ une famille filtrante décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Soit A un élément de $\bigcap_t (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G})$ et prouvons que l'on a $A \in \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G}$ (où $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_t \mathcal{F}_t$). Étant donné un $\mathcal{G}$-atome K, il existe, pour tout t, un élément A_t de $\mathcal{F}_t$ tel que l'on ait $A \cap K = A_t \cap K$. Posons $B = \liminf_t A_t$. On a alors $A \cap K = B \cap K$, $B \in \mathcal{F}_\infty$. Cela suffit pour conclure.

Plaçons nous maintenant dans les hypothèses de la partie (b) du Théorème 1.1. Soit P une loi non dégénérée sur $\mathcal{A}$ et désignons par $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{K}$) l'ensemble des $\mathcal{A}$-atomes de mesure extérieure nulle (resp. non nulle). On a alors $0 < P^*(K) < 1$ pour tout élément K de $\mathcal{K}$. On pourra supposer $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ (car, dans le cas contraire, la condition (a) du Corollaire 2.2 est remplie). La réunion des éléments de $\mathcal{K}$ est alors un événement. Désignons par E son complémentaire, c'est-à-dire la réunion des éléments de $\mathcal{H}$. Puisque chacun de ces éléments possède un couvercle mesurable contenu dans E, l'ensemble E est une réunion d'événements négligeables. On pourra supposer $P(E) = 0$ (car, dans le cas contraire, la condition (b) du Corollaire 2.2 est remplie). On pourra enfin supposer $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ (car, dans le cas contraire, la condition (c) du Corollaire 2.2 est remplie). Si $\mathcal{H}$ était dénombrable, la tribu $\mathcal{A}$ serait engendrée par la partition dénombrable $\mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ de Ω. L'ensemble $\mathcal{H}$ est donc non dénombrable. Considérons la tribu $\mathcal{A}_0$ engendrée par $\mathcal{H} \cup \mathcal{K}$ et désignons par P_0 la restriction de P a $\mathcal{A}_0$. Soit $\mathcal{G}$ une partie non dénombrable de $\mathcal{H}$, avec $\mathcal{H} \setminus \mathcal{G}$ non dénombrable. Alors l'ensemble $G = \bigcup_{H \in \mathcal{G}} H$ est une partie de E qui n'appartient pas à $\mathcal{A}_0$, mais qui est une intersection d'éléments de $\mathcal{A}_0$ négligeables pour la loi P_0. Il ne reste plus qu'à appliquer le Corollaire 2.2 à l'espace $(\Omega, \mathcal{A}_0, P_0)$ pour obtenir la conclusion.

4. Démonstration du Théorème 1.2

Plaçons nous d'abord dans les hypothèses de la partie (a) du Théorème 1.2. Il existe alors une partition dénombrable $\mathcal{H}$ de Ω, constituée de P-atomes. Désignons par $\mathcal{A}_0$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{H}$. En outre, pour tout événement A, désignons par $\varphi(A)$ la réunion des éléments H de $\mathcal{H}$ tels que l'on ait $P(A \cap H) \neq 0$ ou, ce qui revient au même, $P(A \cap H) = P(H)$. On voit aisément que $\varphi(A)$ est un élément de $\mathcal{A}_0$ équivalent à A (mod P). En outre, l'application $A \mapsto \varphi(A)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}_0$ est un homomorphisme de σ-algèbres de Boole. Soient $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Pour prouver la relation (4), il suffira de montrer que, pour tout élément A de $\bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G})$, l'événement $\varphi(A)$ appartient à la tribu $\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G} \vee \mathcal{N}_P$. À cet effet, il suffit de remarquer que l'on a

$$
\begin{aligned}
\varphi(A) \in \bigcap_n \varphi(\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}) &= \bigcap_n \big(\varphi(\mathcal{F}_n) \vee \varphi(\mathcal{G})\big) \\
&= \Big(\bigcap_n \varphi(\mathcal{F}_n)\Big) \vee \varphi(\mathcal{G}) \subset \Big(\bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{N}_P)\Big) \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{N}_P) = \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{G} \vee \mathcal{N}_P,
\end{aligned}
$$

où la deuxième égalité est obtenue en appliquant à l'espace $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ la partie (a) du Théorème 1.1, tandis que l'égalité finale découle de (1).

Plaçons nous maintenant dans les hypothèses de la partie (b) du Théorème 1.2. Il existe alors un événement H, non négligeable, tel que la loi P_H soit dépourvue d'atomes. Par conséquent, il existe sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_H)$ une variable aléatoire uniformément distribuée sur [0, 1] (voir, par ex., [1], Theorem 3.1), donc aussi une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et symétriques. Posons, à la manière de Barlow et Perkins, $\mathcal{F} = \sigma(X_j\colon\ j \geqslant 1)$, $\mathcal{G} = \sigma(X_j\colon\ j \geqslant 2)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\prod_{i=1}^{j} X_i\colon\ j \geqslant n)$. On a alors $\sigma(X_1) \subset \mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}$ et, grâce à la Loi 0–1, la tribu $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ est dégénérée pour P_H. On en déduit les relations (5).

5. Application aux martingales inverses filtrantes

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ une famille filtrante décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$ et posons $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_t \mathcal{F}_t$. Soient P une loi sur $\mathcal{A}$ et X un élément de $\mathcal{L}^1(P)$. Choisissons une version V_∞ de $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_\infty]$ et, pour tout t, une version V_t de $\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$. Il est bien connu que la martingale inverse filtrante $(V_t)_{t\in T}$ converge en moyenne. On sait aussi qu'elle converge en moyenne vers V_∞ si $\mathcal{F}_\infty \supset \mathcal{N}_P$. Voilà un petit complément à ce dernier résultat : sans l'hypothèse $\mathcal{F}_\infty \supset \mathcal{N}_P$, on ne peut même pas assurer la convergence *en loi* de $(V_t)_{t\in T}$ vers V_∞. En effet, si, après avoir choisi P, $\mathcal{F}$ et $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ comme dans la partie (b) du Théorème 1.1, on prend X $\mathcal{F}$-mesurable et non dégénérée, alors V_∞ est la constante $\mathrm{E}[X]$, tandis que, pour tout t, on a $V_t \sim X$ (mod P).

Références

[1] P. Berti, L. Pratelli, P. Rigo, Skorohod representation on a given probability space, Probab. Theory Related Fields 137 (2007) 277–288.
[2] L. Chaumont, M. Yor, Exercises in Probability, Cambridge University Press, 2003.
[3] T. Lindvall, L.C.G. Rogers, Coupling of multidimensional diffusions by reflection, Ann. Probab. 14 (1986) 860–872.
[4] H.V. Weizsäcker, Exchanging the order of taking suprema and countable intersections of σ-algebras, Ann. Inst. H. Poincaré XIX (1) (1983) 91–100.
[5] M. Yor, De nouveaux résultats sur l'équation de Tsirelson, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 309 (1989) 511–514.
[6] M. Yor, Tsirelson equation in discrete time, Probab. Theory Related Fields 91 (1992) 135–152.