

Géométrie différentielle

Formes fermées et feuilletages 2-isotropes

Francisco-Javier Turiel

Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Campus de Teatinos, 29071 Málaga, Espagne

Reçu le 22 octobre 2007 ; accepté le 31 octobre 2007

Disponible sur Internet le 3 décembre 2007

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Dans cette Note on introduit, pour une forme fermée de degré quelconque, la notion de feuilletage 2-isotrope, qui joue un rôle analogue à celle de feuilletage lagrangien pour une forme symplectique. Après avoir construit une structure affine sur ses feuilles, on décrit le voisinage tubulaire d'une transversale «lagrangienne». **Pour citer cet article :** *F.-J. Turiel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Closed forms and 2-isotropic foliations. In this Note we introduce, for a closed form of any degree, the notion of 2-isotropic foliation, which plays the same role as that of the Lagrangian foliation in the symplectic case. After constructing an affine structure on its leaves we describe the tubular neighborhood of a 'Lagrangian' transverse section. **To cite this article :** *F.-J. Turiel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Toutes les structures considérées sont réelles et de classe C^∞ . Dans ce travail on introduit, pour une forme fermée de degré quelconque, la notion de feuilletage 2-isotrope en adaptant celle de feuilletage lagrangien de manière qu'il existe encore une structure affine naturelle sur ses feuilles. Après avoir décrit localement ces feuilletages, on prouve, pour les sous-variétés lagrangiennes transverses, un théorème analogue à celui de Weinstein (voir [3]). On fait donc un nouveau pas dans l'étude de la géométrie des r -formes, encore peu connue.

Considérons un $\lambda \in \Lambda^r V^*$ où V est un m -espace vectoriel. On dira qu'un sous-espace vectoriel W de V est *isotrope* si la restriction $\lambda|_W$ est nulle, et *lagrangien* lorsqu'il est maximal pour cette propriété ; dans ce dernier cas $\text{Ker } \lambda \subset W$. À remarquer que W est lagrangien si et seulement s'il est isotrope et que l'application linéaire $\bar{v} \in (V/W) \rightarrow (i_v \lambda)|_W \in \Lambda^{r-1} W^*$ est injective. On dira que W est *2-isotrope* si $i_w i_u \lambda = 0$ pour tout $u, w \in W$ ou si $r \leq 1$; bien sûr 2-isotrope entraîne isotrope.

Dans la suite M sera une variété de dimension m et ω une r -forme fermée sur M . Une sous-variété N de M sera appelée *isotrope* (respectivement *lagrangienne*) si chaque $T_p N$, $p \in N$, l'est par rapport à $(T_p M, \omega(p))$. On dira que N est *presque-lagrangienne* si $T_p N$ est lagrangien presque partout pour la topologie de N comme variété. Il est clair que presque-lagrangienne entraîne isotrope. Considérons maintenant un feuilletage \mathcal{F} sur M , de dimension ℓ ,

Adresse e-mail : turiel@agt.cie.uma.es.

dont le fibré tangent sera noté $T\mathcal{F}$ et où $X \in T\mathcal{F}$ voudra dire que X est tangent au feuilletage. Le feuilletage \mathcal{F} sera appelé *2-isotrope* si chaque $T_p\mathcal{F}$, $p \in M$, est 2-isotrope, $\text{Ker}\omega(p) \cap T_p\mathcal{F} = \{0\}$ pour presque tout $p \in M$, et que pour tout couple de champs de vecteurs $X, Y \in T\mathcal{F}$ il existe un troisième champ de vecteurs $Z \in T\mathcal{F}$ tel que $L_X i_Y \omega = i_Z \omega$ (autrement dit le module des $(r-1)$ -formes $i_Y \omega$, $Y \in T\mathcal{F}$, est invariant par glissement le long des feuilles); à remarquer que Z est unique. La troisième condition imposée revient à dire que pour toute base locale X_1, \dots, X_ℓ de $T\mathcal{F}$ il existe des 1-formes λ_{jk} , $j, k = 1, \dots, \ell$, telles que $(d(i_{X_j} \omega) - \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_{jk} \wedge i_{X_k} \omega)(T\mathcal{F}, \quad) = 0$ pour chaque $j = 1, \dots, \ell$; bien sûr pour chaque point $p \in M$ il suffit de vérifier cette dernière condition pour quelque base locale de $T\mathcal{F}$ définie autour de ce point.

Il va de soi que si ω est symplectique tout feuilletage lagrangien est 2-isotrope; de façon plus générale un feuilletage isotrope et symplectiquement complet est 2-isotrope. On va donner deux autres exemples. Rappelons d'abord que la $(r-1)$ -forme de Liouville λ_0 de $\Lambda^{r-1}T^*N$, où N est une n -variété quelconque, est définie de la manière suivante: si $v_1, \dots, v_{r-1} \in T_\alpha(\Lambda^{r-1}T^*N)$, alors $\lambda_0(v_1, \dots, v_{r-1}) = \alpha(\tilde{\pi}_* v_1, \dots, \tilde{\pi}_* v_{r-1})$, où $\tilde{\pi}_*: \Lambda^{r-1}T^*N \rightarrow N$ est la projection canonique, tandis que $\lambda = d\lambda_0$ est la r -forme de Liouville de $\Lambda^{r-1}T^*N$. Considérons maintenant un fibré vectoriel $\pi: E \rightarrow N$ dont la dimension de la fibre soit $\leq \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}$. Par le théorème de transversalité il existe un morphisme $\varphi: E \rightarrow \Lambda^{r-1}T^*N$ tel que $\varphi: \pi^{-1}(x) \rightarrow \Lambda^{r-1}T_x^*N$ soit injectif pour presque tout $x \in N$. Alors $\pi: E \rightarrow N$ est une fibration 2-isotrope pour $\omega = \varphi^* \lambda$. Pour le second exemple on considère un feuilletage 2-isotrope \mathcal{F}' sur (M', ω') et une sous-variété fermée et plongée P réunion de feuilles de \mathcal{F}' . Soit $f: M \rightarrow M'$ l'éclatement de P ; alors le feuilletage \mathcal{F} éclaté de \mathcal{F}' est 2-isotrope pour $\omega = f^* \omega'$.

Un calcul montre que si on pose $\nabla_X Y = Z$, où $X, Y \in T\mathcal{F}$ et où $L_X i_Y \omega = i_Z \omega$, on obtient une structure affine sur les feuilles de \mathcal{F} . Par conséquent, au voisinage de chaque point $p \in M$, il existe une base locale $\{Y_1, \dots, Y_\ell\}$ de $T\mathcal{F}$ formée de champs de vecteurs parallèles; en particulier ils commuteront. Donc si T est une transversale passant par p il existe toujours des coordonnées (x, y) telles que pour chaque j on ait $Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$ et que la trace de T soit donnée par $y_1 = \dots = y_\ell = 0$. D'où :

Théorème 1. *Au voisinage de chaque point p de M il existe des coordonnées $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\ell)$ avec $m = n + \ell$ telles que $\omega = \sum_{j=1}^{\ell} (dy_j \wedge \alpha_j + y_j d\alpha_j) + \Omega$, où \mathcal{F} est défini par $dx_1 = \dots = dx_n = 0$ et où $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \Omega$ sont basiques avec $d\Omega = 0$.*

En particulier un champ de vecteurs $X \in T\mathcal{F}$ est parallèle si et seulement si $i_X \omega$ est basique. En outre, si par p passe une transversale isotrope, on peut choisir les coordonnées précédentes de manière que $\Omega = 0$.

Exemples. (a) Considérons sur $M = \mathbb{R}^m - \{0\}$ une r -forme à coefficients constants ω , avec $\text{Ker}\omega = 0$, et le champ de vecteurs $\xi = \sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial}{\partial u_j}$. Alors ξ définit un feuilletage 2-isotrope car $L_\xi \omega = r\omega$. En outre si pour toute 1-forme non nulle μ , à coefficients constants, $\mu \wedge \omega \neq 0$, alors la forme α_1 du théorème 1 ne sera jamais fermée.

(b) Supposons maintenant ω de degré $r \geq 3$ en dimension $m = 2r - 1$, avec $\text{Ker}\omega = 0$, et que \mathcal{F} est 2-isotrope de dimension $\ell = r - 1$ (la plus grande possible pour des raisons algébriques). Il existe alors un ouvert dense $M' \subset M$ tel que, au voisinage de chaque $p \in M'$, on puisse trouver des coordonnées $(x, y) = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{r-1})$ dans lesquelles $p \equiv 0$,

$$\omega = \left(dx_r + \sum_{i=1}^k x_{2i-1} dx_{2i} \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{r-1} dy_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_{r-1} \right),$$

avec k constant sur chaque composante connexe de M' et $\leq (r-1)/2$, tandis que \mathcal{F} est défini par $dx_1 = \dots = dx_r = 0$.

En effet, dans le théorème précédent $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ sont cette fois-ci des $(r-1)$ -formes en r variables, linéairement indépendantes en chaque point; par suite les noyaux des α_j engendrent un champ d'hyperplans. Par le théorème de Darboux, et sur un ouvert dense, on peut choisir les coordonnées x de façon que $\rho = dx_r + \sum_{i=1}^k x_{2i-1} dx_{2i}$ définisse le dit champ d'hyperplans; ceci entraîne que $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ sont des combinaisons fonctionnelles de

$$\rho \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_{r-1}, \quad j = 1, \dots, r-1.$$

Maintenant rien n'empêche de prendre, au départ, les champs de vecteurs parallèles Y_1, \dots, Y_{r-1} de manière que

$$i_{Y_j} \omega = -\rho \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_{r-1}.$$

Le reste est un calcul direct.

(c) On considère sur \mathbb{C}^r deux polynômes homogènes complexes non nuls P et Q , le second non constant, et la r -forme holomorphe $\Omega = P dz_1 \wedge \dots \wedge dz_r$. Alors $N = Q^{-1}(1)$ est une sous-variété presque-lagrangienne de $\omega = \text{Re}\Omega$, de codimension réelle 2, transverse au feuilletage 2-isotrope défini, sur $\mathbb{C}^r - \{0\}$, par les droites complexes qui passent par l'origine (il suffit de remarquer que $L_\xi \Omega = k\Omega$ où $\xi = \sum_{j=1}^r z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$).

Revenons au cas général. Un sous-faisceau \mathcal{H} du faisceau de $(r - 1)$ -formes sur une n -variété P sera appelé *admissible* si, au voisinage de chaque point $p \in P$, il existe des sections $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ de \mathcal{H} , linéairement indépendantes presque partout comme $(r - 1)$ -formes, telles que toute autre section α avec le même domaine s'écrive $\alpha = \sum_{j=1}^\ell f_j \alpha_j$. Bien sûr chaque f_j est unique; on dira donc que $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ est une base locale (des sections) de \mathcal{H} . Il est bien connu que \mathcal{H} peut être identifié au faisceau des sections d'un fibré vectoriel $\pi : E_{\mathcal{H}} \rightarrow P$ de dimension ℓ , unique à isomorphisme près. Plus exactement si $(A, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ est une base locale de \mathcal{H} , l'application $(q, v) \rightarrow \sum_{j=1}^\ell v_j \alpha_j(q)$, lorsque $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sont regardées comme sections de E au-dessus de A , est un isomorphisme entre $A \times \mathbb{R}^\ell$ et $\pi^{-1}(A)$, ce qui permet de considérer $A \times \mathbb{R}^\ell$ comme une carte de $\pi : E_{\mathcal{H}} \rightarrow P$. En outre, il existe un morphisme $\varphi : E_{\mathcal{H}} \rightarrow \Lambda^{r-1} T^*P$ qui, dans la carte précédente, s'écrit $\varphi(q, v) = \sum_{j=1}^\ell v_j \alpha_j(q)$, où cette fois-ci $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sont regardées comme $(r - 1)$ -formes sur P , et qui est un monomorphisme sur presque toutes les fibres. Maintenant si on fait $\omega_{\mathcal{H}} = \varphi^* \lambda$, où λ est la r -forme de Liouville de $\Lambda^{r-1} T^*P$, alors $\pi : E_{\mathcal{H}} \rightarrow P$ est une fibration 2-isotrope et P , identifiée à la section zéro, est presque-lagrangienne. En effet, dans la carte $A \times \mathbb{R}^\ell$ on a $\omega_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^\ell (dv_j \wedge \alpha_j + v_j d\alpha_j)$.

Lorsque N est une sous-variété presque-lagrangienne de (M, ω) , les $(r - 1)$ -formes $i_X \omega$ restreintes à TN , où X est une section de TM définie sur un ouvert de N , sont les sections d'un sous-faisceau \mathcal{H} du faisceau de $(r - 1)$ -formes sur N , qui est admissible (à rappeler que $(i_X \omega)|_{TN} = 0$ si X est tangent à N). De façon analogue au théorème de Weinstein pour les sous-variétés lagrangiennes [3] on a (dans le cas symplectique \mathcal{H} est le faisceau des 1-formes sur N) :

Théorème 2. *Soit N une sous-variété presque-lagrangienne et plongée de (M, ω) . Supposons qu'il existe, au voisinage de N , un feuilletage 2-isotrope transverse à N . Alors il existe un difféomorphisme $f : A \rightarrow B$ entre un ouvert A de M contenant N et un ouvert B de $(E_{\mathcal{H}}, \omega_{\mathcal{H}})$ contenant N identifiée à la section zéro tel que $f|_N = \text{Id}$ et que $f^* \omega_{\mathcal{H}} = \omega$, où le faisceau \mathcal{H} est défini comme précédemment.*

Démonstration. Soit \mathcal{F} un feuilletage 2-isotrope autour de N et transverse à cette sous-variété. En associant à chaque $v \in T_p \mathcal{F}$, lorsque p est un point lagrangien de N , la restriction de $i_v \omega(p)$ à $T_p N$, on obtient un isomorphisme entre $T_p \mathcal{F}$ et $E_{\mathcal{H}}(p)$ ce qui induit, à son tour, un isomorphisme de fibrés vectoriels $\varphi : (T\mathcal{F})|_N \rightarrow E_{\mathcal{H}}$. D'un autre côté, il existe un voisinage ouvert \tilde{B} de la section zéro de $(T\mathcal{F})|_N$ et une submersion $g : \tilde{B} \rightarrow M$ tels que $g(v)$, pour tout $v \in (T_p \mathcal{F})|_N \cap \tilde{B}$ et tout $p \in N$, est l'exponentielle du vecteur v par rapport à la connexion affine naturelle de la feuille de \mathcal{F} qui passe par p . Comme N est une sous-variété plongée, on peut rapetisser \tilde{B} pour que g devienne injectif et donc un difféomorphisme sur l'image $A = g(\tilde{B})$.

Pour finir il suffit de prendre $B = \varphi(\tilde{B})$ et $f = \varphi \circ g^{-1}$. En effet, au voisinage de chaque $p \in N$, on peut trouver des coordonnées $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\ell)$, dont le domaine est un produit $U \times V$, telles que la trace de N est donnée par $y_1 = \dots = y_\ell = 0$, \mathcal{F} est défini par $dx_1 = \dots = dx_n = 0$ et $\omega = \sum_{j=1}^\ell (dy_j \wedge \alpha_j + y_j d\alpha_j)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sont basiques (cette fois-ci on peut éliminer le terme Ω car N est presque-lagrangienne). En particulier $(U, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ est une base locale de \mathcal{H} et par rapport à la carte $U \times \mathbb{R}^\ell$ de $E_{\mathcal{H}}$, munie des coordonnées (x, v) , $f(x, y) = (x, y)$ et $\omega_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^\ell (dv_j \wedge \alpha_j + v_j d\alpha_j)$, donc le théorème est prouvé. \square

Remarque. Il y a des sous-variétés presque-lagrangiennes qui n'admettent aucun feuilletage 2-isotrope transverse. Par exemple la sous-variété de \mathbb{R}^5 définie par $u_2 = u_4 = 0$ et la 3-forme $\omega = (du_1 + u_2 du_3 + u_4 du_5) \wedge (du_2 \wedge du_3 - du_4 \wedge du_5)$, car son modèle ne correspond pas à celui de l'exemple (b) (voir [2]).

Cependant on peut donner un critère pour l'existence d'un tel feuilletage dans certains cas. Plus précisément, si N est presque-lagrangienne et plongée et qu'il existe, autour de celle-ci, un champ de vecteurs Y tel que $L_Y \omega = \omega$ et que $Y|_N = 0$, alors il existe un feuilletage 2-isotrope transverse à N (un tel Y existe toujours lorsque ω est symplectique, voir [4]). En effet, un calcul élémentaire montre qu'en les points lagrangiens de N la partie linéaire de Y transverse à cette sous-variété est l'identité. Par continuité la même chose arrive dans tout point de N . Il existe donc, autour de chaque point de N , des coordonnées $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\ell)$ telles que $Y = \sum_{j=1}^\ell y_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ et que la trace de N

soit donnée par $y_1 = \dots = y_\ell = 0$ (voir [1]); ceci interdit les termes du type $dy_i \wedge dy_j \wedge \beta$ et au-delà dans l'expression de ω car $L_Y \omega = \omega$. D'où $\omega = \sum_{j=1}^{\ell} (dy_j \wedge \alpha_j + y_j d\alpha_j)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ sont basiques pour le feuilletage défini par $dx_1 = \dots = dx_n = 0$, qui d'ailleurs est 2-isotrope et transverse à N . Ce feuilletage devient global, sur un voisinage de N , en définissant chaque feuille comme l'ensemble des points qui ont la même α -limite pour les courbes intégrales de Y .

Réciproquement, si une sous-variété presque-lagrangienne et plongée N admet un feuilletage 2-isotrope transverse, il existe alors un champ de vecteurs Y comme précédemment, car le champ position sur les fibres de $E_{\mathcal{H}}$ a ces propriétés et il suffit d'appliquer le théorème 2. Dans ces conditions, si $f: \tilde{M} \rightarrow M$, est l'éclatement d'un point de N et que $\tilde{\omega} = f^* \omega$, alors la sous-variété \tilde{N} de \tilde{M} éclatée de N , qui est presque-lagrangienne et plongée, admet aussi un feuilletage 2-isotrope transverse puisque $L_{\tilde{Y}} \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ et $\tilde{Y}|_{\tilde{N}} = 0$, où \tilde{Y} est l'éclaté de Y .

Références

- [1] R. Roussarie, Modèles locaux de champs et de formes, *Asterisque* 30 (1975).
- [2] F.-J. Turiel, Modèles locaux de 3-formes fermées sur une variété de dimension 5 ; cas transitif, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* (1978).
- [3] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Adv. Math.* 6 (1971) 329–346.
- [4] A. Weinstein, Lectures on Symplectic Manifolds, *CBMS Regional Conf. Ser. in Math.*, vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.