Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 435–438
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités

Théorème de renouvellement pour chaînes de Markov fortement ergodiques : application aux modèles itératifs lipschitziens

Denis Guibourg

I.N.S.A-I.R.M.A.R., UMR-CNRS 6625, Institut national des sciences appliquées de Rennes, 20, avenue des Buttes de Couësmes, CS 14 315, 35043 Rennes cedex, France

Reçu le 14 mai 2007 ; accepté après révision le 7 février 2008

Disponible sur Internet le 7 mars 2008

Présenté par Marc Yor

Résumé

Soient Q une probabilité de transition sur un espace mesurable E et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov stationnaire associée à Q. Soit $\xi : E \to \mathbb{R}$ mesurable. Sous une condition de moment d'ordre $1+\varepsilon$ sur ξ et des hypothèses fonctionnelles sur l'action de Q et des noyaux de Fourier associés à (Q,ξ), sur un certain espace de Banach, nous démontrons un théorème de renouvellement pour $(\xi(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ en utilisant des techniques de transformée de Fourier et une méthode de perturbation d'opérateurs fondée sur un résultat de Keller–Liverani. Nous proposons une application aux modèles itératifs lipschitziens. ***Pour citer cet article : D. Guibourg, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Renewal theorem for strongly ergodic Markov chains: application to Lipschitz iterative models. Let Q be a transition probability on a measurable space E. Let $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a stationary Markov chain associated to Q. Let $\xi : E \to \mathbb{R}$ measurable. Under a moment condition of order $1+\varepsilon$ on ξ and under functional hypotheses on the action of Q and the Fourier kernels associated to (Q,ξ), on a certain Banach space, we establish a renewal theorem for $(\xi(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. We use Fourier techniques and a perturbation operator method based on a result by Keller–Liverani. An application to Lipschitz iterative models is given. ***To cite this article: D. Guibourg, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Introduction

Soient $(E,\mathcal{E})$ un espace mesurable et Q une probabilité de transition sur $(E,\mathcal{E})$, admettant une probabilité invariante, notée ν. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E, associée à Q, de loi initiale ν. Soit ξ une fonction réelle mesurable sur E. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \xi(X_k),\ n \in \mathbb{N}^*$.

Sous une hypothèse d'ergodicité forte de Q sur un certain espace $\mathcal{B}$, nous nous proposons d'établir un théorème de renouvellement pour la marche aléatoire $(S_n)_n$ en améliorant la méthode introduite dans [7], puis reprise dans [2,4] et synthétisée dans [9], qui utilise des techniques usuelles de transformée de Fourier [3] et une méthode de perturbation

Adresse e-mail : Denis.Guibourg@ens.insa-rennes.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.02.010

d'opérateurs. Plus précisément, dans ces travaux, la théorie standard de perturbations d'opérateurs, appliquée aux noyaux de Fourier de (Q,ξ), requiert que les noyaux $\xi(y)Q(x,\mathrm{d}y)$ et $\xi(y)^2Q(x,\mathrm{d}y)$ opèrent continûment sur $\mathcal{B}$, ce qui en pratique restreint l'étude à des fonctions ξ bornées ou nécessite alors des conditions très fortes sur Q. Pour lever ces restrictions, nous appliquerons le théorème de perturbation de [14]. Des hypothèses plus faibles sur les noyaux de Fourier, comparables à celles de [11,12], nous permettront alors d'obtenir un théorème de renouvellement sous une condition de moment d'ordre $1+\varepsilon$ sur ξ. Cette condition est presque optimale ; en effet, dans le cas indépendant, le théorème de renouvellement est établi sous une hypothèse de moment d'ordre 1, voir [5,3].

Sous des hypothèses assez différentes, d'autres résultats généralisant le théorème de Blackwell ont été obtenus : citons par exemple le travail de [1] effectué sur des chaînes Harris-récurrentes et celui de [15] où les hypothèses, assez techniques, sont bien adaptées aux produits de matrices aléatoires positives. D'un certain point de vue, notre étude est plus restrictive puisqu'elle requiert une condition d'ergodicité forte mais il faut noter d'une part que l'on n'y suppose pas $(X_n)_n$ Harris-récurrente et d'autre part que les hypothèses ci-dessous font appel à des notions usuelles en probabilités (inégalités de Doeblin–Fortet, quasi-compacité). Ceci est illustré dans l'application aux modèles itératifs présentée au § 4.

2. Hypothèses et énoncé du théorème

Soient $Q(t)(x,\mathrm{d}y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi(y)}Q(x,\mathrm{d}y)$ $(x\in E,\ t\in\mathbb{R})$ les noyaux de Fourier associés à (Q,ξ). On suppose l'existence d'un espace de Banach réticulé $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$, composé de fonctions complexes mesurables sur E, contenant 1_E, s'injectant continûment dans $\mathbb{L}^1(\nu)$, et sur lequel $Q(t)$ opère continûment. La première hypothèse est une condition dite d'ergodicité forte sur $\mathcal{B}$, selon [2] :

(H1) *Il existe* $\kappa_0\in\,]0,1[$ *et* $C>0$ *tels que* : $\forall n\geqslant 1, \forall f\in\mathcal{B}, \|Q^nf-\nu(f)1_E\|\leqslant C\kappa_0^n\|f\|$.

Les trois hypothèses suivantes permettent principalement d'appliquer [14] à $Q(t)$ avec la semi-norme $\nu(|\cdot|)$ sur $\mathcal{B}$:

Il existe un intervalle ouvert I centré en 0 *tel que* :

(H2) *Il existe* $K>0$ *et* $\beta>0$ *tels que* : $\forall M>0, \forall t\in I, \forall f\in\mathcal{B}, \nu(1_{[|\xi|\geqslant M]}|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}-1)f|)\leqslant\frac{K}{M^\beta}|t|\|f\|$.

(H3) *Il existe* $\kappa\in\,]0,1[$ *et* $m>0$ *tels que* $\forall t\in I, \forall n\geqslant 1, \forall f\in\mathcal{B}, \|Q(t)^nf\|\leqslant\kappa^n\|f\|+m\nu(|f|)$.

(H4) $\forall t\in I$, *le rayon spectral essentiel de* $Q(t)$ *est inférieur ou égal à* κ.

La dernière hypothèse est une condition usuelle de non-arithméticité :

(H5) *Pour tous réels a et b,* $0<a<b$, *il existe* $\rho\in\,]0,1[$ *tel que* $\sup\{\|Q(t)^n\|, a\leqslant|t|\leqslant b\}=\mathrm{O}(\rho^n)$.

Supposons que $\nu(|\,\xi\,|^{1+\varepsilon})<+\infty$ pour un certain $\varepsilon>0$ et que $\nu(\xi)>0$. Sous les hypothèses (H1)–(H5), on peut énoncer le théorème de renouvellement suivant :

Théorème. *On définit une mesure de Radon U_a $(a\in\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ en posant, pour g continue à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,* $U_a(g)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(g(S_n-a))$, *et l'on a* : $\lim_{a\to-\infty}U_a(g)=0$ *et* $\lim_{a\to+\infty}U_a(g)=\frac{\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\mathrm{d}x}{\nu(\xi)}$.

La définition et les propriétés relatives à la notion de rayon spectral essentiel sont détaillées dans le chapitre XIV de [9]. Concernant la vérification pratique des hypothèses (H1)–(H5), on trouvera dans [11–13] des remarques générales ; certaines seront explicitées dans l'application proposée (cf. § 4). Précisons uniquement que dans le cadre d'application du théorème standard de perturbation et sous des conditions assez générales sur $\mathcal{B}$, la condition (H5) est équivalente à la suivante (voir par exemple [9], Prop. V.2) :

(H5$'$) *Il n'existe pas de nombre réel* $t\neq 0$, *ni de nombre complexe* λ *de module* 1, *ni de partie* E_0 Q*-invariante telle que* $\nu(E_0)=1$ $(E_0\in\mathcal{E})$, *ni enfin de fonction bornée* $f\in\mathcal{B}$, *de module constant non nul sur* E_0, *satisfaisant l'égalité* : $\forall x\in E_0$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi(y)}f(y)=\lambda f(x)Q(x,\mathrm{d}y)$ *presque sûrement.*

On peut prouver que cette équivalence subsiste si la famille $\{Q(t),\ t\in\mathbb{R}\}$ vérifie au voisinage de tout réel les hypothèses de [14], avec éventuellement une semi-norme autre que $\nu(|\cdot|)$ (cf. [11,13]).

Notre résultat se généralise comme dans [11,12] au cas non-stationnaire, puis par une adaptation naturelle des hypothèses, à la suite $(X_n,S_n)_n$ et plus généralement aux marches aléatoires markoviennes comme dans [7,2,4], et enfin aux sommes de Birkhoff dans le cadre des systèmes dynamiques, en reportant les hypothèses sur l'opérateur de Perron–Frobenius (cf. [9]). En particulier, notre méthode devrait permettre d'étendre les possibilités d'applications en géométrie ergodique, comme par exemple dans [4] pour l'étude du comportement asymptotique de fonctions orbitales de certains groupes discrets. Par ailleurs, en utilisant [14], les théorèmes de renouvellement multi-dimensionnels de [2] peuvent être également améliorés [6].

3. Esquisse de la démonstration du théorème

Le point de départ de la méthode est la formule : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tS_n}) = \nu(Q(t)^n 1_E)$, voir par exemple [9] (p. 23).

3.1. Un résultat de perturbation

L'hypothèse (H2), la continuité de l'injection canonique de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{L}^1(\nu)$ et la Q-invariance de ν nous donnent : $\exists D > 0$, $\forall f \in \mathcal{B}$, $\forall t \in I$, $\nu(|Q(t)f - Qf|) \leqslant D|t|\|f\|$. Cette propriété de continuité faible et les conditions (H1), (H3), (H4) permettent alors de justifier, grâce à [14] que, pour $|t|$ petit, $Q(t)$ admet une valeur propre (simple) dominante, notée $\lambda(t)$, et d'établir une propriété de type (H1) pour $Q(t)$ (cf. [11,12]) : soit $0 < \tau < 1$ et $\max(\kappa_0, \kappa) < R < 1$. Il existe un intervalle ouvert $J \subset I$, centré en 0, une constante $C > 0$ et des applications λ, v, ϕ à valeurs respectivement dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ (le dual topologique de $\mathcal{B}$) tels que, pour $t \in J$, on ait :

$$\forall n \geqslant 1, \forall f \in \mathcal{B}, \quad \left\| Q(t)^n f - \lambda(t)^n \phi(t)(f) v(t) \right\| \leqslant C R^n \|f\|,$$

avec λ continue sur J ($\lambda(0) = 1$), v bornée sur J, puis $\nu(v(t)) = 1$, et $|\phi(t)(1_E) - 1| + \nu(|v(t) - 1|) \leqslant C\,|t|^\tau$.

3.2. Techniques de transformée de Fourier

• Dans le cas i.i.d. λ est la fonction caractéristique commune des v.a.r. $\xi(X_n)$, et la condition $\xi \in \mathbb{L}^{1+\varepsilon}(\nu)$ donne le développement limité $\lambda(t) = 1 + \mathrm{i}\nu(\xi)t + \mathrm{o}(|t|^{1+\varepsilon})$ en $t = 0$, d'où l'intégrabilité au voisinage de 0 de la fonction $\chi(t) = \frac{\lambda(t) - 1 - \mathrm{i}\nu(\xi)t}{t^2}$. De ces dernières propriétés, on peut déduire le théorème de renouvellement en s'inspirant par exemple de [3].
• Nous suivons ici la démarche de [9] (Chap. VII), fondée aussi sur l'intégrabilité en 0 de χ, alors définie avec la valeur propre dominante $\lambda(t)$ de $Q(t)$, mais comme nous n'avons pas utilisé en 3.1 le théorème standard de perturbation, des difficultés supplémentaires, liées à l'absence de régularité (a priori) des éléments propres perturbés, se présentent. En effet, [14] ne donne aucun renseignement de régularité sur λ, autre que sa continuité sur J. Le développement limité d'ordre 2 établi dans [11] nous permettrait de conclure, mais sous deux conditions ($\xi \in \mathbb{L}^2(\nu)$, $(\xi(X_n))_n$ vérifie le théorème central limite) que nous n'avons pas a priori ici. Nous procédons alors comme suit. Puisque $Q(t)v(t) = \lambda(t)v(t)$ et que ν est Q-invariante, on a :

$$\forall t \in J, \quad \lambda(t) = \nu\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi} v(t)\big) = \nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}) + \nu\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}\big(v(t) - 1\big)\big) = \nu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi}) + \nu\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\xi} - 1)\big(v(t) - 1\big)\big).$$

L'intérêt de l'hypothèse (H2), outre celui vu au § 3.1, est alors de déduire de $\nu(|\xi|^{1+\varepsilon}) < +\infty$ et de l'inégalité $\nu(|\,v(t) - 1\,|) \leqslant C\,|t|^\tau$ du § 3.1, un développement limité pour $\lambda(t)$ analogue à celui du cas i.i.d.

4. Application aux modèles itératifs lipschitziens

Soit (E, d) un espace métrique, de tribu borélienne $\mathcal{E}$, dans lequel toute boule fermée est compacte. On désigne par G un semi-groupe de transformations lipschitziennes de E et par $\mathcal{G}$ une tribu sur G. On suppose l'existence d'une action mesurable de G sur E, c'est-à-dire que l'application Ψ définie par : $\forall (g, x) \in G \times E$, $\psi(g, x) = gx$, est mesurable de $(G \times E, \mathcal{G} \otimes \mathcal{E})$ dans $(E, \mathcal{E})$; $\mathcal{G} \otimes \mathcal{E}$ désignant la tribu sur $G \times E$, produit des tribus $\mathcal{G}$ et $\mathcal{E}$. Pour $g \in G$, on note $c(g) = \sup\{\frac{d(gx, gy)}{d(x, y)} \mid x, y \in E, x \neq y\}$ et l'on suppose que $c(g) < +\infty$.

Soit $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, à valeurs dans G, de loi commune π. Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E, de loi μ_0, indépendante de la suite (Y_n). On considère la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $X_n = \Psi(Y_n, X_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Il est bien connu que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov sur E, de probabilité de transition Q sur $(E, \mathcal{E})$ définie pour toute fonction f mesurable bornée de E dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in E$, $(Qf)(x) = \int_G f(gx)\,\mathrm{d}\pi(g)$.

4.1. Existence et unicité de la probabilité invariante

Soit $\varepsilon > 0$, $x_0 \in E$ fixé, puis $q = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, et $\gamma > 1$ tel que $\frac{\gamma + 1}{q} = 1 + \varepsilon$, c'est-à-dire $\gamma = 2 + \varepsilon + \frac{2}{\varepsilon}$. Sous les conditions

$$(\mathrm{C}_1)\quad \int_G \big(1+c(g)+d(gx_0,x_0)\big)^{\frac{\gamma+1}{q}}\,\mathrm{d}\pi(g)<+\infty,\quad (\mathrm{C}_2)\quad \int_G c(g)^{\frac{1}{q}}\max\big(1,c(g)\big)^{\frac{\gamma}{q}}\,\mathrm{d}\pi(g)<1,$$

Q admet une unique probabilité invariante, ν, et $\nu(d(x_0,\cdot)^{1+\varepsilon})<+\infty$ (appliquer [10], Th. I avec $d(x,y)^{\frac{1}{q}}$).

Outre (C_1)–(C_2), on suppose désormais qu'il existe $C\geqslant 0$ telle que : $\forall(x,y)\in E^2$, $|\xi(x)-\xi(y)|\leqslant Cd(x,y)$.

On observera que $\nu(|\xi|^{1+\varepsilon})<+\infty$.

4.2. *Définition de l'espace B_γ et vérification de* (H2)

Soit $\alpha=\frac{1}{q^2}$, $p(x)=1+d(x_0,x)$, et B_γ l'espace des applications f de E dans $\mathbb{C}$ telles que : $m_\gamma(f):=\sup\{\frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)^\alpha p(x)^{\alpha\gamma}p(y)^{\alpha\gamma}}\mid x,y\in E, x\neq y\}<+\infty$. Enfin posons $|f|_\gamma=\sup_{x\in E}|f(x)|p(x)^{-\alpha(\gamma+1)}$. Alors B_γ, muni de la norme $\|\cdot\|$: $\|f\|=m_\gamma(f)+|f|_\gamma$, est un espace de Banach et en utilisant les conditions (C_1)–(C_2), on peut voir que B_γ s'injecte continuement dans $\mathbb{L}^q(\nu)$. En utilisant deux fois l'inégalité de Hölder, on peut en déduire (H2) avec $\mathcal{B}=B_\gamma$.

4.3. *Étude des hypothèses* (H1)–(H3)–(H4)

Sous les conditions

$$(\mathrm{C}_3)\ \int_G \max\big(1,c(g)\big)^{\frac{1}{q^2}}\big(1+c(g)+d(gx_0,x_0)\big)^{\frac{2\gamma}{q^2}}\,\mathrm{d}\pi(g)<+\infty,\quad (\mathrm{C}_4)\ \int_G c(g)^{\frac{1}{q^2}}\max\big(1,c(g)\big)^{\frac{2\gamma}{q^2}}\,\mathrm{d}\pi(g)<1,$$

l'hypothèse (H1) est satisfaite ([10], Th. 5.5 appliqué avec $d(x,y)^{\frac{1}{q^2}}$). La propriété (H3) s'établit en utilisant le même type de majorations que dans [12] (Lemme III.2). La boule unité de B_γ étant relativement compacte dans $(B_\gamma,\nu(|\cdot|)$ ([10] Lemme. 5.4), la propriété (H4) résulte alors de (H3) et du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu dans la version généralisée due à H. Hennion [8]. On notera que les conditions (H3)–(H4) sont valables uniquement au voisinage de 0. Pour pouvoir appliquer le critère (H5′), on procède alors comme indiqué au § 2 en utilisant la semi-norme $|\cdot|_{\tilde{\gamma}}$ avec $\tilde{\gamma}=2\gamma-1$ (cf. [10], Lemma 9-1′). D'où :

Corollaire. *Sous les conditions* (C_1)–(C_4), *et* (H5′) *relativement à B_γ, si ν est la loi de X_0 et si $\nu(\xi)>0$, alors $(\xi(X_n))_n$ vérifie le théorème de renouvellement du* § 2. *Dans le cas particulier où $c(g)<1$ π-p.s. les conditions* (C_1)–(C_4) *se réduisent à* $\int_G d(gx_0,x_0)^{1+\varepsilon}\,\mathrm{d}\pi(g)<+\infty$.

Références

[1] G. Alsmeyer, On the Markov renewal theorem, Stochastic Process. Appl. (1994) 50 (1994) 37–56.
[2] M. Babillot, Théorie du renouvellement pour des chaînes semi-markoviennes transientes, Ann. I. H. Poincaré, Sect. B 24 (4) (1988) 507–569.
[3] L. Breiman, Probability, Classic in Applied Mathematics, SIAM, 1993.
[4] F. Dal'bo, M. Peigné, Comportement asymptotique du nombre de géodésiques fermées sur la surface modulaire en courbure non constante. Études spectrales d'opérateurs de transfert et applications, Astérisque 238 (1996) 111–177.
[5] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II, John Wiley and Sons, New York, 1971.
[6] D. Guibourg, L. Hervé, A renewal theorem for strongly ergodic Markov chains in dimension $d\geqslant 3$ and in the centered case, in preparation.
[7] Y. Guivarc'h, J. Hardy, Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov, Ann. Inst. H. Poincaré 24 (1) (1988) 73–98.
[8] H. Hennion, Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (2) (1993) 627–634.
[9] H. Hennion, L. Hervé, Limit Theorems for Markov Chains and Stochastic Properties of Dynamical Systems by Quasi-compactness, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1766, Springer, 2001.
[10] H. Hennion, L. Hervé, Central limit theorems for iterated random Lipschitz mappings, Ann. Probab. 32 (3A) (2004) 1934–1984.
[11] L. Hervé, Théorème local pour chaînes de Markov de probabilité de transition quasi-compacte. Applications aux chaînes V-géométriquement ergodiques et aux modèles itératifs, Ann. I. H. Poincaré Probab. Statist. 41 (2005) 179–196.
[12] L. Hervé, Vitesse de convergence dans le théorème limite central pour chaînes de Markov fortement ergodiques, Ann. I.H. Poincaré (2008), in press.
[13] L. Hervé, F. Pène, Nagaev method via Keller–Liverani theorem, 2008, submitted for publication, voir hal-00203408.
[14] G. Keller, C. Liverani, Stability of the spectrum for transfer operators, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) XXVIII (1999) 141–152.
[15] H. Kesten, Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space, Ann. Probab. 2 (3) (1974).