Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1033–1038
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Théorie de Burnside–Frobenius tordue pour les groupes virtuellement polycycliques

Alexander Fel'shtyn [a], Evgenij Troitsky [b,1]

[a] *Instytut Matematyki, Uniwersytet Szczecinski, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin, Poland*
[b] *Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, 119992 GSP-2 Moscow, Russia*

Reçu le 1er juin 2006 ; accepté après révision le 28 juillet 2008

Disponible sur Internet le 20 septembre 2008

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

On démontre que, pour une large classe de groupes, le nombre de Reidemeister d'un automorphisme ϕ est égal au nombre de points fixes de dimension finie de $\hat{\phi}$ sur le dual unitaire, si l'un de ces nombres est fini. Ce théorème est une généralisation naturelle aux groupes infinis du théorème classique de Burnside–Frobenius. Il a des conséquences importantes en dynamique topologique. ***Pour citer cet article : A. Fel'shtyn, E. Troitsky, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Twisted Burnside–Frobenius theory for virtually polycyclic groups. It is proved for a wide class of groups that the Reidemeister number of an automorphism ϕ is equal to the number of finite-dimensional fixed points of $\hat{\phi}$ on the unitary dual, if one of these numbers is finite. This theorem is a natural generalization to infinite groups of the classical Burnside–Frobenius theorem. It has important consequences in Topological Dynamics. ***To cite this article: A. Fel'shtyn, E. Troitsky, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

Let G be a countable discrete group and $\phi : G \to G$ an endomorphism. Two elements $x, x' \in G$ are said to be *ϕ-conjugate* or *twisted conjugate,* if there exists $g \in G$ with $x' = gx\phi(g^{-1})$.

The number of ϕ-conjugacy classes (or Reidemeister classes) is called the *Reidemeister number* of an endomorphism ϕ and is denoted by $R(\phi)$. If ϕ is the identity map then the ϕ-conjugacy classes are the usual conjugacy classes in the group G.

Adresses e-mail : felshtyn@mpim-bonn.mpg.de, felshtyn@diamond.boisestate.edu (A. Fel'shtyn), troitsky@mech.math.msu.su, troitsky@mpim-bonn.mpg.de (E. Troitsky).

URL : http://mech.math.msu.su/~troitsky.

[1] Partially supported by RFBR Grant 07-01-00046-a, Grant RFBR-DFG 07-01-91555 and Grant "Universities of Russia".

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.09.003

If G is a finite group, then the classical Burnside–Frobenius theorem says that the number of classes of irreducible representations is equal to the number of conjugacy classes of elements of G. Let $\hat{G}$ be the *unitary dual* of G i.e. the set of equivalence classes of unitary irreducible representations of G. If $\phi : G \to G$ is an automorphism, it induces a map $\hat{\phi} : \hat{G} \to \hat{G}$, $\hat{\phi}(\rho) = \rho \circ \phi$. Therefore, by Burnside–Frobenius theorem, if ϕ is the identity automorphism of any finite group G, then we have $R(\phi) = \#\mathrm{Fix}(\hat{\phi})$. This statement remains true for $\phi \neq \mathrm{Id}$ and finite G [3, p. 645], [8, Theorem 6.32].

In the original formulation by Fel'shtyn and Hill [3] the conjecture about twisted Burnside–Frobenius theorem asserts an equality of $R(\phi)$ and the number of fixed points of $\hat{\phi}$ on $\hat{G}$. This conjecture was proved in [3,5] for f.g. type I groups. But in [6] a counterexample was found. This leads to a new formulation, where only finite-dimensional fixed points are under consideration. The new conjecture is proved in the present paper for a wide class of f.g. groups. On the other hand this counterexample led to a new (weak) formulation which was proved in [14] for any discrete group.

In the present Note we introduce the property RP for a countable discrete group (Definition 2.3): there is an epimorphism onto a finite group, which respects the automorphism under consideration and induces a bijection of ϕ-conjugacy classes. Then we prove that RP respects some extensions (Theorem 2.5) and that virtually polycyclic groups are RP-groups. Twisted Burnside–Frobenius theorem is valid for them (Theorems 3.2, 4.6) in the following formulation: $R(\phi)$ coincides with the number $S_f(\phi)$ of fixed points of $\hat{\phi}$ on the finite-dimensional part of $\hat{G}$, if one of $R(\phi)$ and $S_f(\phi)$ is finite. Nevertheless for the groups with extreme properties (some infinite groups with a finite number of conjugacy classes) from Section 4 even the modified conjecture is not true.

1. Introduction

Définition 1.1. Soient G un groupe dénombrable discret et $\phi : G \to G$ un endomorphisme. Deux éléments $x, x' \in G$ sont dits *ϕ-conjugués* s'il existe $g \in G$ tel que $x' = gx\phi(g^{-1})$. Nous écrirons $\{x\}_\phi$ pour la classe de *ϕ-conjugaison* ou classe de *conjugaison tordue* d'un $x \in G$. Le nombre de classes de ϕ-conjugaison (ou classes de Reidemeister) est appelé le *nombre de Reidemeister* de l'endomorphisme ϕ et est noté $R(\phi)$. Lorsque ϕ est l'identité, le nombre de classes de ϕ-conjugaison est le nombre usuel de classes de conjugaison dans le groupe G.

Si G est un groupe fini, un théorème classique de Burnside–Frobenius dit que le nombre de classes de représentations irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison dans G. Soit $\hat{G}$ le *dual unitaire* de G, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G. Si $\phi : G \to G$ est un automorphisme, il induit une application $\hat{\phi} : \hat{G} \to \hat{G}$, $\hat{\phi}(\rho) = \rho \circ \phi$. Ainsi, par le théorème de Burnside–Frobenius, si ϕ est l'identité d'un groupe G fini, alors $R(\phi) = \#\mathrm{Fix}(\hat{\phi})$. Ce résultat reste vrai pour $\phi \neq \mathrm{Id}$ et G fini [3], [8, Theorem 6.32].

L'idée de généraliser ce théorème au cas d'automorphismes distincts de l'identité et de groupes infinis est motivée par des questions de dynamique et a fait l'objet d'une série d'articles [3,1,5,6]. Dans sa formulation originale par Fel'shtyn et Hill [3], la conjecture pour un théorème de Burnside–Frobenius tordu affirme que $R(\phi)$ et le nombre de points fixes de $\hat{\phi}$ sur $\hat{G}$ sont égaux. Cette conjecture a été démontrée dans [3,5] pour les groupes de type fini de type I. Mais un contre-exemple à cet énoncé général a été donné dans [6] et a amené une formulation utilisant seulement les points fixes de dimension finie. Dans le présent article, nous démontrons cette nouvelle conjecture pour une large classe de groupes de type fini. Par ailleurs, le contre-exemple a donné lieu à une autre version (faible) qui a été démontrée dans [14] pour tout groupe discret.

Dans cette Note, nous introduisons la propriété RP pour un groupe dénombrable discret (Définition 2.3). Nous montrons ensuite la compatibilité de RP avec certaines extensions (Théorème 2.5) et le fait que les groupes virtuellement polycycliques sont des RP-groupes. Le théorème de Burnside–Frobenius tordu est valide pour ces groupes (Théorèmes 3.2, 4.6) si l'on considère seulement la partie de dimension finie de $\hat{G}$. Cependant, pour les groupes pathologiques de la Section 4 la conjecture même modifiée n'est pas vraie.

Des exemples de groupes et d'automorphismes de nombre de Reidemeister fini ont été obtenus et étudiés dans [1,7,6]. Pour les conséquences en dynamique et théorie des nombres, nous renvoyons à [1,5]. Par ailleurs, pour les groupes hyperboliques de Gromov, les groupes de Baumslag–Solitar et certaines généralisations, il a été démontré que le nombre de Reidemeister est toujours infini (cf. [2,10,4,9]). Une des conséquences immédiates du théorème de Burnside–Frobenius tordu est la formule de congruence $\sum_{d|n} \mu(d) \cdot R(\phi^{n/d}) \equiv 0 \bmod n$, où μ est la fonction de Möbius, très importante notamment pour les problèmes de réalisation en dynamique topologique [1].

L'intérêt pour les relations de conjugaison tordue vient, en particulier, de la théorie du point fixe de Nielsen–Reidemeister, de la théorie de Selberg et de la géométrie algébrique.

Nous terminons cette introduction par quelques résultats préliminaires.

Soit $\tau_g : G \to G$ l'automorphisme $\tau_g(\tilde{g}) = g\tilde{g}\,g^{-1}$ pour $g \in G$. Sa restriction à un sous-groupe normal sera également notée τ_g.

Lemme 1.2. $\{g\}_\phi k = \{g\,k\}_{\tau_{k^{-1}} \circ \phi}$.

Corollaire 1.3. $R(\phi) = R(\tau_g \circ \phi)$.

Pour un groupe abélien G, $H := \{e\}_\phi$ est un sous-groupe et $\{g\}_\phi = gH$.

La construction suivante établit un lien entre les classes de ϕ-conjugaison et certaines classes de conjugaison d'un autre groupe. Ce résultat a été obtenu dans un contexte topologique par Boju Jiang et Laixiang Sun. Soit une action de $\mathbb{Z}$ sur G, i.e. un homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(G)$, $n \mapsto \phi^n$ et soit Γ le produit semi-direct $\Gamma = G \rtimes \mathbb{Z}$. En termes de générateurs et relations, $\Gamma := \langle G, t \mid tgt^{-1} = \phi(g)\rangle$, où t est un générateur de $\mathbb{Z}$. Le groupe G est un sous-groupe normal de Γ. En tant qu'ensemble, Γ est de la forme : $\Gamma = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} G \cdot t^n$, où $G \cdot t^n$ est la classe à droite de Γ modulo G contenant t^n. Toute classe de conjugaison de Γ est contenue dans un $G \cdot t^n$. En effet, $gg't^ng^{-1} = gg'\phi^n(g^{-1})t^n$ et $tg't^nt^{-1} = \phi(g')t^n$.

Lemme 1.4. *Deux éléments x, y de G sont ϕ-conjugués si, et seulement si, xt et yt sont conjugués au sens usuel dans Γ. De plus, $g \mapsto g \cdot t$ est une bijection de l'ensemble des classes de ϕ-conjugaison de G sur l'ensemble des classes de conjugaison de Γ contenues dans $G \cdot t$.*

2. Extensions et classes de Reidemeister

Soit une extension de groupes respectant l'homomorphisme ϕ :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi'"'] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\phi"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "p"] & G/H \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{1}$$

où H est un sous-groupe normal de G. L'argument ci-dessous, en particulier pour ce qui concerne les points fixes, a une intersection avec [7].

D'abord, notons que l'image par p de toute classe de ϕ-conjugaison de G est une classe de $\bar{\phi}$-conjugaison de G/H. En effet, $p(\tilde{g})p(g)\bar{\phi}(p(\tilde{g}^{-1})) = p(\tilde{g}g\phi(\tilde{g}^{-1}))$. Supposons que $R(\phi) < \infty$. La remarque précédente implique alors $R(\bar{\phi}) < \infty$. Considérons une classe $D = \{h\}_{\tau_g\phi'}$, où $\tau_g(h) := ghg^{-1}$, $g \in G$, $h \in H$. La relation d'équivalence correspondante est $h \sim \tilde{h}hg\phi'(\tilde{h}^{-1})g^{-1}$. Puisque H est normal, l'automorphisme $\tau_g : H \to H$ est bien défini. Nous noterons également D l'image iD. La translation Dg de D est un sous-ensemble de Hg caractérisé par $hg \sim \tilde{h}(hg)\phi'(\tilde{h}^{-1})$. Par conséquent, c'est un sous-ensemble de $\{hg\}_\phi \cap Hg$ et la partition $Hg = \cup(\{h\}_{\tau_g\phi'})g$ est une sous-partition de $Hg = \cup(Hg \cap \{hg\}_\phi)$.

Lemme 2.1. *Supposons que dans* (1), $\#\,\mathrm{Fix}\,\bar{\phi} = k < \infty$ *et* $R(\phi) < \infty$. *Alors* $R(\phi') < \infty$.

Un groupe dont toutes les classes de conjugaison sont finies, est appelé un FC-*groupe*. Dans un FC-groupe, les éléments d'ordre fini forment un sous-groupe caractéristique avec un groupe facteur abélien localement infini. Un FC-groupe de type fini contient dans son centre un groupe abélien libre d'indice fini dans le groupe en entier.

Lemme 2.2. *Un automorphisme ϕ d'un* FC-*groupe G de type fini avec $R(\phi) < \infty$ a un nombre fini de points fixes. Ce résultat vaut également pour $\tau_x \circ \phi$. Par conséquent, le nombre d'éléments $g \in G$ pour lesquels il existe un $x \in G$ tel que $gx\phi(g^{-1}) = x$, est aussi fini.*

Définition 2.3. On dit qu'un groupe G possède la propriété RP si pour tout automorphisme ϕ tel que $R(\phi) < \infty$, les fonctions caractéristiques f des classes de Reidemeister (par conséquent, toutes les fonction ϕ-centrales) sont périodiques, i.e. il existe un groupe fini K, un automorphisme ϕ_K et un épimorphisme $F : G \to K$ tel que (1) $\phi_K \circ F = F \circ \phi$ et (2) $f = F^* f_L$, où f_L est la fonction caractéristique du sous-ensemble L. En particulier, F induit une bijection des classes de Reidemeister. Si cette propriété est vraie pour un automorphisme ϕ particulier, nous indiquerons cela par RP(ϕ).

Lemme 2.4. *Supposons que G est de type fini et que $R(\phi) < \infty$. Alors, les fonctions caractéristiques des classe de ϕ-conjugaison sont périodiques* (*i.e. G possède la propriété* RP(ϕ)) *si, et seulement si, le décalage* (*shift*) *à gauche engendre un espace de dimension finie.*

Théorème 2.5. *Supposons que dans l'extension* (1) *H possède la propriété RP et que G/H est un* FC-*groupe de type fini. Alors G possède la propriété* RP*(ϕ).*

Démonstration. On a $R(\bar{\phi}) < \infty$ et, par conséquent, $\#\operatorname{Fix}(\bar{\phi}) < \infty$ d'après le Lemme 2.2 et $\#\operatorname{Fix}(\tau_z\bar{\phi}) < \infty$ pour tout $z \in G/H$. Ainsi, par le Lemme 2.1, $R(\tau_g\phi') < \infty$ pour tout $g \in G$. Soient $g_1, \ldots, g_s$, $s = R(\bar{\phi})$ des éléments de G qui sont envoyés par p sur des classes de Reidemeister distinctes. On peut supposer que H possède la propriété RP et trouver un sous-groupe caractéristique $H_K := \operatorname{Ker} F \subset H$ d'indice fini tel que $F : H \to K$ définisse une bijection pour les classes de Reidemeister de chaque $\tau_{g_i} \circ \phi'$, $i = 1, \ldots, s$; de plus, il est contenu dans le stabilisateur de chaque classe d'équivalence tordue de chacun de ces automorphismes. En particulier, il est normal dans G. On peut alors considérer le quotient par H_K de l'extension (1) : $K \hookrightarrow G_1 := G/H_K \to \Gamma := G/H$. Le passage au quotient $F_1 : G \to G/H_K$ envoie $\{g\}_\phi$ sur $\{g\}_\phi$ et c'est la seule classe avec cette propriété (on conserve les notations e, g, ϕ pour les objets du quotient).

Par le Lemme 2.4 (appliqué à G_1 et à l'automorphisme concret ϕ), si l'on veut trouver une application $F_2 : G_1 \to K_1$ comme dans la Définition 2.3, il suffit de vérifier que les décalages (shifts) de $\{h\}_\phi \subset G_1$ forment une collection finie de sous-ensembles de G_1. Alors, la composition $G \xrightarrow{F_1} G_1 \xrightarrow{F_2} K_1$ complète la preuve du théorème.

Nous pouvons appliquer le Lemme 2.4 car le groupe G_1 est de type fini : on peut prendre comme générateurs tous les éléments de K et certaines pré-images $s(z_i) \in G_1$ par p d'un système fini de générateurs z_i de Γ. Montrons que l'espace mentionné des décalages est de dimension finie. Par le Lemme 1.2, ces décalages de $\{h\}_\phi \subset G_1$ forment une sous-collection de $\{x\}_{\tau_y \circ \phi}$, $x, y \in G_1$. Il s'ensuit, par le Corollaire 1.3, qu'il est suffisant de vérifier que le nombre d'automorphismes distincts $\tau_y : G_1 \to G_1$ est fini et cela découle du fait que G_1 est de type fini et de la propriété FC pour Γ. □

3. Théorème de Burnside–Frobenius tordu pour les RP-groupes

Définition 3.1. On note $\hat{G}_f$ le sous-ensemble de $\hat{G}$ formé des représentations de dimension finie.

Théorème 3.2 *(Théorème de Burnside–Frobenius tordu pour les RP-groupes). Soit G un RP-groupe, ϕ un automorphisme de G tel que $R(\phi) < \infty$ et $S_f(\phi)$ le nombre de points fixes de $\hat{\phi}$ sur $\hat{G}_f$. Alors $R(\phi) = S_f(\phi)$.*

Démonstration. Les coefficients des représentations de dimension finie irréductibles et non équivalentes sont linéairement indépendants par le théorème de Frobenius–Schur.

La preuve résulte des trois assertions suivantes : (1) Si $R(\phi) < \infty$, alors chaque fonction d'une ϕ-classe est une combinaison linéaire finie de fonctionnelles *tordue-invariantes* qui sont des coefficients de points de $\operatorname{Fix} \hat{\phi}_f$. (2) Si $\rho \in \operatorname{Fix} \hat{\phi}_f$, il existe (à un facteur multiplicatif près) une et une seule fonctionnelle *tordue-invariante* sur $\rho(C^*(G))$ (c'est une algèbre de matrices finie et pleine). Ceci provient de [5, Sect. 3]. (3) Pour différents ρ, les fonctions des ϕ-classes sont linéairement indépendantes. Ceci s'ensuit de la remarque faite en début de preuve.

Notons que la propriété RP implique en particulier que les fonctions ϕ-centrales (pour ϕ tel que $R(\phi) < \infty$) sont des fonctionnelles sur $C^*(G)$ et pas seulement sur $L^1(G)$, i. e., elles sont dans l'algèbre de Fourier–Stieltjes $B(G)$.

4. Exemples, contre-exemples, raffinements

En appliquant inductivement le Théorème 2.5, on peut montrer que tout groupe virtuellement polycycliques est un RP-groupe et, par conséquent :

Théorème 4.1. *Le nombre de Reidemeister de tout automorphisme ϕ d'un groupe virtuellement polycyclique avec $R(\phi) < \infty$ est égal au nombre de points fixes de dimension finie de $\hat{\phi}$ sur le dual unitaire du groupe.*

Soit G un groupe discret infini ayant un nombre fini de classes de conjugaisons. Les groupes HNN (voir par exemple [13]), les groupes d'Ivanov et d'Osin [11] en sont des exemples. Alors la fonction caractéristique de l'élément unité n'est pas presque-périodique et l'argument ci-dessus n'est plus valide. De plus, ces groupes donnent lieu à des contre-exemples à ce théorème. Par exemple, pour un groupe d'Osin, le nombre de Reidemeister $R(\mathrm{Id})$ est égal 2 alors qu'il n'existe qu'une seule représentation triviale de dimension finie (de dimension 1).

Un groupe G est dit séparé pour la conjugaison si pour toute paire g, h d'éléments non conjugués dans G, il existe un quotient fini de G dans lequel ces éléments ne sont pas conjugués. Les groupes quotients de groupes polycycliques par des groupes finis sont séparés pour la conjugaison. (cf. [12, Ch. 4]).

Définition 4.2. Un groupe G est dit *séparé pour la ϕ-conjugaison* pour un automorphisme $\phi : G \to G$ si pour toute paire g, h d'éléments non ϕ-conjugués dans G, il existe un quotient fini de G respectant ϕ dans lequel ces éléments ne sont pas $\bar{\phi}$-conjugués.

Théorème 4.3. *On suppose que $R(\phi) < \infty$. Alors G est séparé pour la ϕ-conjugaison si, et seulement si, G est* $\mathrm{RP}(\phi)$.

Théorème 4.4. *Soit $F : \Gamma \to K$ un homomorphisme sur un groupe fini K qui sépare deux classes de conjugaisons de Γ dans $G \cdot t$. Alors, la restriction $F_G := F|_G : G \to \mathrm{Im}(F|_G)$ sépare les classes de ϕ-conjugaison correspondantes dans G (par la bijection du Lemme* 1.4*).*

Théorème 4.5. *Soit une classe de groupes séparés pour la conjugaison, stable pour les produits semi-directs par $\mathbb{Z}$. Alors, cette classe est constituée de groupes séparés pour la ϕ-conjugaison. En particulier, tout groupe virtuellement polycyclique est un groupe séparé pour la ϕ-conjugaison.*

Théorème 4.6 *(Théorème de Burnside–Frobenius tordu pour les groupes séparés pour la ϕ-conjugaison). Soit G un groupe séparé pour la ϕ-conjugaison. Alors, $R(\phi) = S_f(\phi)$ si l'un de ces nombres est fini.*

Remerciements

Ce travail de recherche fait partie d'un Programme de Recherches en liaison avec le Max-Planck-Institut für Mathematik (MPI) à Bonn que nous remercions chaleureusement pour son aide et son accueil qui ont permis de terminer la rédaction de cet article. Les auteurs remercient M.B. Bekka, E. Fieux, R. Hill, V. Manuilov, A. Mishchenko, M. Sapir, A. Shtern, L. Vainerman, A. Vershik pour d'utiles conversations.

Les résultats des Sections 1 et 4 ont été obtenus dans un travail en commun des deux auteurs et ceux des Sections 2 et 3 sont dûs à E. Troitsky.

Références

[1] A. Fel'shtyn, Dynamical zeta functions, Nielsen theory and Reidemeister torsion, Mem. Amer. Math. Soc. 147 (699) (2000) xii+146.

[2] A.L. Fel'shtyn, The Reidemeister number of any automorphism of a Gromov hyperbolic group is infinite, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 279 (6) (2001) 229–240, 250 (Geom. i Topol.).

[3] A. Fel'shtyn, R. Hill, Trace formulae, Zeta functions, congruences and Reidemeister torsion in Nielsen theory, Forum Math. 10 (6) (1998) 641–663.

[4] A. Fel'shtyn, D. Gonçalves, Reidemeister numbers of Baumslag–Solitar groups, Algebra Discrete Math. 3 (2006) 36–48.

[5] A. Fel'shtyn, E. Troitsky, A twisted Burnside theorem for countable groups and Reidemeister numbers, in: K. Consani, M. Marcolli, Yu. Manin (Eds.), Proc. Workshop Noncommutative Geometry and Number Theory, Bonn, 2003, Vieweg, Braunschweig, 2006, pp. 141–154, Preprint MPIM2004-65.
[6] A. Fel'shtyn, E. Troitsky, A. Vershik, Twisted Burnside theorem for type II_1 groups: an example, Math. Res. Lett. 13 (5) (2006) 719–728.
[7] D. Gonçalves, P. Wong, Twisted conjugacy classes in exponential growth groups, Bull. London Math. Soc. 35 (2) (2003) 261–268.
[8] I.M. Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press, 1976.
[9] G. Levitt, On the automorphism group of generalised Baumslag–Solitar groups, E-print arxiv: math.GR/0511083, 2005.
[10] G. Levitt, M. Lustig, Most automorphisms of a hyperbolic group have very simple dynamics, Ann. Sci. École Norm. Sup. 33 (2000) 507–517.
[11] D. Osin, Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems, arxiv e-print math.GR/0411039, 2004.
[12] D. Segal, Polycyclic Groups, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 82, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
[13] J.-P. Serre, Trees, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation.
[14] E. Troitsky, Noncommutative Riesz theorem and weak Burnside type theorem on twisted conjugacy, Funct. Anal. Appl. 40 (2) (2006) 117–125.