Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1087–1091
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie analytique

Morphismes géométriquement plats et faisceaux dualisants

Mohamed Kaddar

Université Henri-Poincaré, Institut Elie-Cartan, BP 239, 54506 Vandoeuvre-les-Nancy cedex, France

Reçu le 18 janvier 2008 ; accepté après révision le 2 septembre 2008

Disponible sur Internet le 10 octobre 2008

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Soient n un entier et S un espace complexe réduit de dimension pure finie. Notons $\mathcal{E}(S,n)$ (resp. $\mathcal{G}(S,n)$) l'ensemble des morphismes $\pi : X \to S$ n-équidimensionnels et ouverts avec X dénombrable à l'infini (resp. les morphismes géométriquement plats, c'est-à-dire les élément de $\mathcal{E}(S,n)$ muni d'un cycle poids induisant des multiplicités convenables sur les fibres pour en faire une famille analytique de cycles au sens de Barlet). Après avoir montré que tout élément π de $\mathcal{E}(S,n)$ porte naturellement un faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent ω_π^n possédant bon nombre de propriétés fonctorielles, nous établissons le résultat principal de cette Note disant que π appartient à $\mathcal{G}(S,n)$ si et seulement si il existe un morphisme canonique $\Omega_{X/S}^n \to \omega_\pi^n$ stable par changement de bases entre espaces complexes réduits, vérifiant *la propriété de la trace relative* et donnant, dans la situation plongée, la classe fondamentale relative construite par Barlet (1980). On constate, par ailleurs, que π est géométriquement plat si et seulement si ω_π^n est caractérisé par la propriété de la trace relative ; ce qui généralise à ce cadre, la construction des formes méromorphes régulières de Kunz–Waldi (1988) faite par Kersken (1983) dans le cadre des algèbres analytiques plates. ***Pour citer cet article : M. Kaddar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Geometrically flat map and dualizing sheaves. Let n be an integer, S a reduced pure dimensional complex analytic space. Let $\mathcal{E}(S,n)$ (resp. $\mathcal{G}(S,n)$) be the set of morphisms $\pi : X \to S$ from an countable at infinity analytic complex space X to S which are n-equidimensional and open (resp. the set of geometrically flat map that is the element of $\mathcal{E}(S,n)$ endowed with cycle of $X \times S$ which induce a good multiplicity on the fibers such that $(\pi^{-1}(s))_{s\in S}$ become an analytic family of cycles in the sense of Barlet). After showing that each π of $\mathcal{E}(S,n)$ is endowed with a canonical $\mathcal{O}_X$-coherent analytic sheaf ω_π^n with many functorial properties, we state the main result of this Note which says that π is in $\mathcal{G}(S,n)$ if and only if there exists a canonical morphism (called a relative fundamental class of π) $\Omega_{X/S}^n \to \omega_\pi^n$, compatible with any base change between reduced finite pure dimensional complex spaces, which satisfies the *relative trace property* and gives, in the local setting, the relative fundamental class of Barlet constructed in 1980. From this, we deduce that π belong to $\mathcal{G}(S,n)$ if and only if ω_π^n is stable by base change and is characterized by the relative trace property; that means precisely that the relative Kunz–Waldi (1988) sheaf of regular differential forms constructed for flat analytic algebra by Kersken (1983) exists in this setting. ***To cite this article: M. Kaddar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : kaddar@iecn.u-nancy.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.09.012

Abridged English version

Let X, S be complex analytic spaces of finite dimension with S reduced and X countable at infinity. Let $\pi : X \to S$ be a morphism.

Question. Can we endow the (set-theoretic) fibers of π with appropriate and well-defined multiplicities such that the family $(\pi^{-1}(s))_{s\in S}$ becomes (or is induced by) an analytic family of cycles of X in the sense of [4]?

Easy examples show us that for general π there is a negative answer and a reasonable treatment requires necessarily the equidimensionality and the openness of the morphism; however, these are not sufficient conditions.

As the morphism is not necessarily proper and the base space S is only assumed to be reduced and pure dimensional, the use of a cycle space (we restrict ourselves to the set of pure dimensional cycles of X) is not recommended here because this space is only a Hausdorff and first-countable topological space, and not a complex space!

The main result of this Note is to show that there is only one class of morphisms for which the question admits a positive answer. Such morphisms are called *geometrically flat* (cf. [8]) and are endowed with a cycle of $X \times S$ which induces good multiplicities on the fibers such that the $(\pi^{-1}(s))_{s\in S}$ behave like an analytic family of cycles in the sense of [4].

Let n be an integer and $\pi : X \to S$ an n-equidimensional and open morphism from a countable at infinity analytic complex space X to a reduced complex space S. Then we show that π is geometrically flat if, and only if, one of these equivalent conditions is satisfied:

(i) There is an unique *integration map* $\int_\pi \colon \mathbb{R}^n\pi_!\Omega^n_{X/S} \to \mathcal{O}_S$, compatible with any base change between reduced complex spaces, and gives the usual integration for the absolute case.
(ii) There is a canonical morphism of coherent sheaves $\mathcal{C}_\pi : \Omega^n_{X/S} \to \omega^n_\pi$, compatible with any base change between reduced complex spaces, satisfying the so-called *relative trace property*, which gives, in the local setting, the relative, fundamental class of [7] and induces a morphism of graduated complex of coherent sheaves $\mathcal{C}^\bullet_\pi : \Omega^\bullet_{X/S} \to \omega^\bullet_\pi$.

The sheaf ω^n_π, which is unique up to a canonical isomorphism and heavily attached to relative analytic duality theory, satisfies many nice functorial properties and requires only the equidimensionality of π for its definition. From this, we deduce that π is geometrically flat if and only if ω^n_π is stable by base change and is characterized by the relative trace property; this means precisely that the relative Kunz–Waldi [15] sheaf of regular differential forms constructed for a flat analytic algebra by Kerken [13] exists in this setting. The proof of the main result uses intensively the theory of cycle space [4], the Reiffen lemma [16], and other technical results, as in [6,9] and [12].

1. Introduction

Soient n un entier et S un espace analytique complexe réduit de dimension pure. Notons $\mathcal{E}(S,n)$ (resp. $\mathcal{G}(S,n)$) l'ensemble des morphismes $\pi : X \to S$ n-équidimensionnels et ouverts avec X dénombrable à l'infini (resp. les morphismes géométriquement plats c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{E}(S,n)$ munis d'un cycle poids induisant des multiplicités convenables sur les fibres pour en faire une famille analytique de cycles au sens de [4,8]). L'ensemble $\mathcal{G}(S,n)$ forme une classe de morphismes particulièrement intéressante puisqu'elle contient les morphismes plats et plus généralement ceux de Tor-dimension finie, elle est stable par changement de base entre espaces complexes réduits et de nature locale sur X et S. De plus, tout morphisme géométriquement plat se factorise (par rapport à l'une quelconque de ses fibres) en un morphisme fini et géométriquement plat suivi d'une projection lisse sur S. Remarquons au passage que si π est de Tor-dimension finie, le morphisme fini intervenant dans la décomposition est encore de Tor-dimension finie, mais si π est supposé seulement plat, le morphisme fini n'est généralement jamais plat car sinon les fibres seraient de Cohen–Macaulay ! Signalons que cette classe de morphismes n'est pas stable par composition en général ; ce qui représente une obstruction de taille à l'élaboration d'une théorie de l'intersection dans ce cadre.

L'objet de cette Note est de donner une caractérisation simple de $\mathcal{G}(S,n)$. Pour cela, on montre, tout d'abord, que tout élément π de $\mathcal{E}(S,n)$ porte naturellement un faisceau ω^n_π, $\mathcal{O}_X$-cohérent, de profondeur au moins deux, fibre par fibre sur S, et munissant π d'une flèche mystérieuse $\mathbb{R}^n\pi_!\omega^n_\pi \to \mathcal{O}_S$, émanant de la théorie de la dualité analytique relative ; cet aspect ne sera pas abordé ici mais dans une Note ultérieure consacrée à la notion de paire dualisante analytique (notion introduite par Kleiman [14] dans le cadre algébrique sous certaines conditions). En géométrie algébrique et en caractéristique nulle, ω_π^n coincide avec le n-ème faisceau d'homologie du complexe $\pi^!(\mathcal{O}_S)$ si π est un morphisme n-équidimensionnel. Cela est encore vrai pour un morphisme propre d'espaces analytiques complexes, grâce à la théorie de la dualité analytique relative de Ramis–Ruget–Verdier [17].

On prouve, principalement, qu'un élément π de $\mathcal{E}(S,n)$ est dans $\mathcal{G}(S,n)$ si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(i) il existe un unique morphisme d'intégration $\int_\pi : \mathbb{R}^n\pi_!\Omega^n_{X/S} \to \mathcal{O}_S$, stable par changement de base réduit et donnant l'intégration usuelle dans le cas absolu ;
(ii) il existe un unique morphisme de faisceaux cohérents $\mathcal{C}_\pi : \Omega^n_{X/S} \to \omega^n_\pi$, compatible aux changement de base réduit, vérifiant *la propriété de la trace relative*, donnant la classe fondamentale relative de Barlet construite dans [7] et induisant un morphisme de complexes gradués $\mathcal{C}^\bullet_\pi : \Omega^\bullet_{X/S} \to \omega^\bullet_\pi$.

Une conséquence importante de ce résultat est qu'un morphisme n-équidimensionnel et ouvert est géométriquement plat si et seulement si le faisceau ω^n_π est stable par changement de base et caractérisé par la propriété de la trace relative ; ce qui revient à dire que le faisceau des formes méromorphes régulières de Kunz–Waldi [15], construit dans le cadre des algèbres analytiques plates par Kersken dans [13], existe dans une situation relative donnée par un élément π de $\mathcal{E}(S,n)$ si et seulement si π est géométriquement plat.

Pour mener à bien ce programme, on dispose de deux ingrédients essentiels à savoir :

(a) le théorème de Reiffen [16] ou une de ses variantes assurant l'annulation des faisceaux de cohomologie $\mathbb{R}^k\pi_!\mathcal{F}$, en tout degré $k > n$, et dont une conséquence est le lemme du découpage (cf. [6,9] ou [12]) ;
(b) une connaissance chirurgicale de l'intégration sur les cycles ou opération de Andréotti–Norguet (cf. [1,9] ou [12]) et quelques techniques propre à l'espace des cycles.

Alors, la localisation sur X permet, grâce aux techniques de découpage des classes de cohomologie et l'installation locale du morphisme relativement à des écailles (ou cartes), de nous ramener au cas où π est factorisé en un plongement σ dans Z lisse sur S de dimension relative $n + p$, suivi d'une projection lisse sur S (ou bien d'un morphisme fini sur un espace lisse sur S suivi d'une projection sur S). Dans une telle configuration locale où X est plongé avec la codimension p fibre par fibre dans Z, cette intégration fournit naturellement un morphisme $\mathcal{C}^\sigma_\pi : \sigma_*\Omega^n_{X/S} \to \mathrm{Ext}^p(\mathcal{O}_X, \Omega^{n+p}_{Z/S})$, vérifiant les propriétés de (ii). Par ailleurs, [7] nous dit que, dans cette situation locale (avec la pondération standard), π définit une famille analytique de cycles si et seulement si la famille génériquement holomorphe $(\pi^{-1}(\{s\}))_{s\in S}$ est représentée par une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^p_{|X|}(Z, \Omega^p_{Z/S})$, induisant la classe fondamentale de X_s pour chaque s fixé. Mais il est facile de voir qu'un tel objet caractérise et est caractérisé par la donnée d'un morphisme $\mathcal{C}^\sigma_{X/S} : \sigma_*\Omega^n_{X/S} \to \mathcal{H}^p_{|X|}(\Omega^{n+p}_{Z/S})$ compatible aux changements de bases entre espaces complexes réduits et possédant la fameuse propriété de la trace. On vérifie, sans peine, que $\mathcal{C}^\sigma_\pi$ est un relèvement naturel de $\mathcal{C}^\sigma_{X/S}$.

Un procédé de recollement permet alors de produire un morphisme global $\Omega^n_{X/S} \to \omega^n_\pi$ ayant toutes les propriétés voulues.

En adaptant convenablement à ce cadre la construction de [10] et [3], il n'est pas difficile de montrer que, si π est plat, on récupère la classe fondamentale relative qui y est construite. Il est bon de signaler au lecteur que notre approche ne nécessite pas la connaissance d'un quelconque complexe dualisant relatif dont l'existence, en dehors du cas propre, n'est pas du tout évidente en géométrie analytique complexe.

Dans ce qui suit, nous conservons les notations introduites dans l'introduction.

Théorème 1. *Soit $\pi \in \mathcal{E}(S,n)$. Alors, il existe un unique faisceau ω^n_π, de $\mathcal{O}_X$-modules vérifiant :*

(i) *Si* $X \xrightarrow{\sigma} Z \xrightarrow{q} S$ *est une factorisation locale de π dans laquelle σ est un plongement local dans Z lisse sur S et de dimension relative $n+p$, q étant lisse, alors*

$$\omega^n_\pi \simeq \sigma^*\,\mathrm{Ext}^p\big(\sigma_*\mathcal{O}_X, \Omega^{n+p}_{Z/S}\big)\,;$$

(ii) *il est $\mathcal{O}_X$ cohérent, de profondeur au moins deux fibres par fibres sur S* ;
(iii) *ω_π^n et $\Omega_{X/S}^n$ coincident canoniquement sur la partie régulière du morphisme π* ;
(iv) *si S est un point, il coincide avec le faisceau dualisant de Golovin, de Andréotti–Kaas ou de Grothendieck* :

$$\omega_\pi^n \simeq \mathcal{H}_n(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}^n(\mathcal{O}_X) = \omega_X^n.$$

Remarques 1. Par construction, ω_π^n est de nature locale sur X et S (i.e. compatible aux restrictions ouvertes sur X et S en un sens évident). Dans le cadre de la géométrie algébrique et en caractéristique nulle, on a $\omega_\pi^n = \mathcal{H}^{-n}(\pi^!(\mathcal{O}_S))$, qui garde encore un sens si π est un morphisme propre d'espaces analytiques complexes, grâce à la théorie de la dualité analytique relative de Ramis–Ruget–Verdier [17].

Corollaire 1. *Soit k un entier naturel et $\pi \in \mathcal{E}(S,n)$. Alors, il existe un unique faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent ω_π^k vérifiant les propriétés suivantes* :

(i) *pour toute factorisation locale de π (cf. Théorème 1), on a*

$$\omega_\pi^k := \sigma^*\bigl(\mathrm{Ext}^p\bigl(\sigma_*\Omega_{X/S}^{n-k}, \Omega_{Z/S}^{n+p}\bigr)\bigr)\,;$$

(ii) *on a des isomorphismes canoniques*

$$\omega_\pi^k \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\bigl(\Omega_{X/S}^{n-k}, \omega_\pi^n\bigr)\,;$$

(iii) *ω_π^k est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent de profondeur au moins 2 sur X* ;
(iv) *si S est un point, ces faisceaux coincident avec les dualisés de Kaas–Andréotti–Golovin* [2,11] *des faisceaux Ω_X^{n-k} qui s'identifient aux faisceaux introduits par Barlet* [5]*, Kersken* [13]*, dans le cadre analytique ou Kunz–Waldi* [15] *dans le cadre algébrique.*

Rappelons qu'un sous faisceau $\mathcal{F}$ de $j_*j^*\Omega_{X/S}^n$ satisfait la *propriété de la trace relative* si pour toute section ξ de $\mathcal{F}$, tout polydisque ouvert relativement compact U de $\mathbb{C}^n$, toute S-paramétrisation locale $f : X \to S \times U$ (définissant un revêtement ramifié générique de branches locales $(f_j(s,t))_{j\in\{1,\dots,k\}}$), la trace $\mathcal{T}_f^n(\xi) = \sum_{j=1}^{j=k} f_j^*(\xi)$, définie en dehors de la ramification ou sur les points normaux de S, se prolonge S-analytiquement sur $S \times U$, prolongeant naturellement la trace usuelle $f_*f^*\Omega_{S\times U/S}^n \to \Omega_{S\times U/S}^n$.

Caractérisations des morphismes géométriquement plats :

Théorème 2. *Soit $\pi \in \mathcal{E}(S,n)$. Alors, on a les équivalences* :

(i) $\pi \in \mathcal{G}(S,n)$;
(ii) *il existe un unique morphisme $\mathcal{O}_S$-linéaire continu*[1]

$$\int_\pi : \mathbb{R}^n\pi_!\Omega_{X/S}^n \to \mathcal{O}_S$$

de formation compatible à tout changement de base entre espace complexes réduits et donnant l'intégration usuelle dans le cas où S est un point ;
(iii) *le morphisme naturel $j_*j^*\Omega_{X/S}^n \to j_*j^*\omega_\pi^n$ se prolonge en un unique morphisme de faisceaux cohérents sur X,*

$$\mathcal{C}_\pi : \Omega_{X/S}^n \to \omega_\pi^n$$

[1] On entend par là, une continuité topologique au niveau des groupes des sections globales munis de leurs structures d'espaces vectoriels topologiques **F.S** ou **Q.F.S**.

vérifiant la propriété de la trace relative, stable par changement de base quelconque entre espaces complexes réduits et induisant un (*unique*) *morphisme gradué de complexes*[2]

$$\mathcal{C}_\pi^\bullet : \Omega_{X/S}^\bullet \to \omega_\pi^\bullet .$$

La flèche $\mathcal{C}_\pi$ sera appelée *morphisme classe fondamentale relative* de π.

Théorème 3. *Soit $\pi \in \mathcal{E}(S,n)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\pi \in \mathcal{G}(S,n)$;
(ii) *l'ensemble des sections de $j_* j^* \Omega_{X/S}^n$ vérifiant la propriété de la trace relative constitue un faisceau cohérent $\omega_{X/S}^n$ s'identifiant canoniquement à ω_π^n sur X.*

Corollaire 2. *La construction des formes méromorphes régulières au sens de Kunz–Waldi* [15] *faite par Kersken* [13] *dans le cadre des algèbres analytiques* plates *s'étend aux éléments π de $\mathcal{E}(S,n)$ si et seulement si π appartient à $\mathcal{G}(S,n)$.*

Remarques 2. Il est facile de déduire de ce qui précède que la platitude géométrique est aussi équivalente au fait que le faisceau $\mathcal{O}_X$-cohérent ω_π^0 soit stable par changement de base quelconque entre espaces complexes réduits, muni d'un morphisme canonique $\mathcal{O}_X \to \omega_\pi^0$ et d'un morphisme trace. D'autre part, si X_1 est l'ensemble des points de X en lesquels π est géométriquement plat, S_1 son image dans S, π_1 la restriction de π à X_1 et $\mathcal{C}_{\pi_1} : \Omega_{X_1/S_1}^n \to \omega_{\pi_1}^n$ le morphisme classe fondamentale donné par le Théorème 2, alors, π est géométriquement plat si et seulement si le morphisme $\mathcal{C}_{\pi_1}$ se prolonge sur X tout entier avec les mêmes propriétés.

Références

[1] A. Andreotti, F. Norguet, La convexité holomorphe dans l'espace analytique des cycles d'une variété algébrique, Ann. Sc. Norm. Pisa 21 (1965) 811–842.
[2] A. Andreotti, A. Kaas, Duality on complex spaces, Ann. Sc. Norm. Pisa 27 (1973) 187–263.
[3] B. Angéniol, F. Elzein, La classe fondamentale relative d'un cycle, Bull. Soc. Math. France Mém. 58 (1978) 63–93.
[4] D. Barlet, Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique réduit, in : Sém. F. Norguet, in : Lecture Notes in Mathematics, vol. 482, Springer-Verlag, 1975, pp. 1–158.
[5] D. Barlet, Faisceau $\omega_X^\cdot$ sur un espace analytique de dimension pure, in : Sém. F. Norguet, in : Lecture Notes in Mathematics, vol. 670, Springer-Verlag, 1978, pp. 187–204.
[6] D. Barlet, Convexité au voisinage d'un cycle, in : Sém. François Norguet, in : Lecture Notes in Mathematics, vol. 807, Springer-Verlag, 1977, pp. 102–121.
[7] D. Barlet, Famille analytique de cycles et classe fondamentale relative, in : Sém. F. Norguet, in : Lecture Notes in Mathematics, vol. 807, Springer-Verlag, 1980, pp. 1–24.
[8] D. Barlet, J. Magnusson, Integration de classes de cohomologie méromorphes et diviseur d'incidence, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31 (6) (1998) 811–842.
[9] D. Barlet, J. Varouchas, Fonctions holomorphes sur l'espace des cycles, Bull. Soc. Math. France 117 (1989) 329–341.
[10] F. Elzein, Complexe dualisant et applications à la classe fondamentale d'un cycle, Bull. Soc. Math. France Mém. 58 (1978).
[11] V.D. Golovin, On the homology theory of analytic sheaves, Math. USSR-Izv. 16 (2) (1981) 239–260.
[12] M. Kaddar, Intégration d'ordre supérieure sur les cycles en géométrie analytique complexe, Ann. Sc. Norm. Pisa Cl. Sci. (4) 29 (2000) 187–263.
[13] M. Kersken, Der Residuencomplex in der lokalen algebraischen und analytischen Geometrie, Math. Ann. 265 (1983) 423–455.
[14] S.L. Kleiman, Relative duality for quasicoherent sheaves, Compositio Math. 41 (1) (1980) 39–60.
[15] E. Kunz, R. Waldi, Regular Differential Forms, Contemporary Math., vol. 79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
[16] H.J. Reiffen, Riemmansche Hebbartkeitssätze für Kohomologieklassen mit kompactem Träger, Math. Ann. 164 (1966) 272–279.
[17] J.P. Ramis, G. Ruget, J.L. Verdier, Dualité relative en géométrie analytique complexe, Invent. Math. 13 (1971) 261–283.

[2] Ce n'est pas un morphisme d'algèbres car $\omega_\pi^\bullet$ n'en est pas une puisque l'on a pas de produit interne. Cette lacune est déjà présente dans le cas absolu comme on peut le voir sur $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \colon x^2 - y^3 = 0\}$. En effet, la fonction méromorphe $\frac{y}{x}$ (resp. la forme $\frac{\mathrm{d}x}{y}$) définit une section de ω_X^0 (resp. ω_X^1) mais leur produit $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ ne définit pas une section de ω_X^1 ! Cependant, ce produit est interne si X est normal.