Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1083–1086
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Réalisation de Betti des motifs de Voevodsky

Florence Lecomte

Institut de recherche mathématique avancée, ULP et CNRS UMR7501, 7, rue René-Descartes, 676084 Strasbourg cedex, France

Reçu le 1er février 2008 ; accepté après révision le 17 septembre 2008

Disponible sur Internet le 11 octobre 2008

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Pour tout sous-corps k du corps des complexes $\mathbf{C}$ nous construisons un foncteur de réalisation de Betti de la catégorie $\mathbf{DM}^-(k)$ des complexes motiviques sur k de Voevodsky dans la catégorie des groupes abéliens gradués. Si X est un schéma de type fini sur k, l'image par ce foncteur du complexe motivique associé à X est la cohomologie singulière $\bigoplus_{p\geqslant 0} H^p(X(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$ de la variété des points complexes de X. ***Pour citer cet article : F. Lecomte, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Betti realization of Voevodsky motives. For any subfield k of the field of complex numbers $\mathbf{C}$, we construct a Betti realization functor from the category $\mathbf{DM}^-(k)$ of Voevodsky motivic complexes over k to the category of graded abelian groups. If X is a scheme of finite type over k, the image of the associated motive through this functor is the singular cohomology $\bigoplus_{p\geqslant 0} H^p(X(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$ of the variety $X(\mathbf{C})$ of complex points. ***To cite this article: F. Lecomte, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Introduction

Issue d'une volonté de réaliser les motifs de Voevodsky à l'aide de foncteurs cohomologiques, cette note présente la construction de la réalisation de Betti. Les autres réalisations, obtenues avec Nathalie Wach, sont présentées en [4] et [5].

Pour un sous-corps k du corps des complexes $\mathbf{C}$ nous construisons un foncteur cohomologique de la catégorie $\mathbf{DM}^-(k)$ des complexes motiviques de Voevodsky dans la catégorie Ab des groupes abéliens, foncteur qui associe à tout motif d'un schéma X lisse sur k, la suite de cohomologie singulière de la variété topologique $X(\mathbf{C})$ des points complexes de X.

La méthode est inspirée des travaux de Suslin et Voevodsky [7] qui montrent que les faisceaux représentables avec transferts $\mathbf{Z}_{tr}(X)$ (notés $L(X)$ dans l'article original de Voevodsky [8]) sont représentés dans la catégorie $\mathrm{Sch}(k)$ des schémas de type fini sur k par le groupe associé au monoïde des puissances symétriques de X. Le théorème de Dold–Thom assure que le faisceau obtenu par prolongement à la topologie usuelle de la variété $X(\mathbf{C})$ calcule l'homologie

Adresse e-mail : lecomte@math.u-strasbg.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.09.018

singulière de cette variété. La cohomologie singulière est obtenue par dualité. Cette construction s'étend aux faisceaux avec transferts de Voevodsky et se dérive pour obtenir le théorème suivant

Théorème 1.1. *Soit k un sous-corps de* $\mathbf{C}$. *Il existe un foncteur de réalisation topologique des complexes motiviques*

$$t_k : \mathbf{DM}^-(k) \to D(Ab)$$

tel que le foncteur cohomologique

$$H_B(\ ,\mathbf{Z}) : \mathbf{DM}^-(k) \to Ab, \qquad \mathbf{M} \mapsto \mathrm{Hom}_{D(Ab)}\big(t_k(\mathbf{M}), \mathbf{Z}\big)$$

généralise le foncteur de cohomologie singulière des variétés des points complexes des schémas lisses et quasi-projectifs et que le foncteur rationnel $H_B = H_B(\ ,\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$ restreint à la catégorie des motifs géométriques coïncide avec la composante singulière du foncteur de réalisation d'Annette Huber.

En [4], nous avons construit un complexe motivique de De Rham qui permet de définir la réalisation de De Rham. En [5], nous construisons, pour un corps de nombres, outre les réalisations de De Rham, Betti et l-adique avec leurs filtrations et actions de Galois respectives, des morphismes de comparaison, et nous retrouvons, en nous restreignant à la catégorie des motifs géométriques et tensorisant avec le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, les résultats d'Annette Huber [3].

Tous nos schémas sont supposés séparés localement de type fini sur un corps. Suivant les conventions de SGA4 [2], pour un site C, nous notons $\widetilde{C}$ (resp. $\widetilde{C}_{Ab}$) le topos (resp. topos abélien) des faisceaux (resp. faisceaux en groupes abéliens) associé. En ce qui concerne les complexes motiviques de Voevodsky définis en [8], nous nous référons à [6], où est construite la catégorie $\mathbf{DM}^-$.

2. Réalisation topologique des motifs sur C

Soient $\mathrm{Sm}\,\mathbf{C}$ le site des schémas lisses sur le corps des complexes $\mathbf{C}$, muni de la topologie de Nisnevich et CW le site des espaces topologiques admettant une triangulation, muni de la topologie des homéomorphismes locaux.

Le foncteur $\theta : \mathrm{Sm}\,\mathbf{C} \to CW$ qui, à un schéma X associe la variété $X(\mathbf{C})$ des points complexes, est continu. Cela signifie que le foncteur θ fournit entre les catégories de faisceaux un couple de foncteurs adjoints (θ^s, θ_s), le foncteur $\theta^s : \widetilde{\mathrm{Sm}\,\mathbf{C}} \to \widetilde{CW}$ prolongeant θ.

Ce foncteur continu se factorise à travers le site $\mathrm{Sch}(k)$ des schémas sur k. Suslin et Voevodsky [7] ont montré que pour tout schéma quasi-projectif X sur k et tout schéma normal et connexe S, le faisceau en monoïdes des correspondances effectives de S à X se représente par le monoïde (pour l'union disjointe) des puissances symétriques $S^d(X)$ de X, ce qui se traduit par l'isomorphisme

$$\mathbf{Z}_{tr}(X)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}\,k}\left(S, \coprod_{d \geqslant 0} S^d(X)\right)^+$$

où pour tout monoïde M, on désigne par M^+ le groupe associé.

Par construction, le foncteur θ^s préserve les faisceaux représentables et envoie le faisceau représenté par le schéma lisse X (resp. X^d) sur le faisceau représenté par $X(\mathbf{C})$ (resp. $X(\mathbf{C})^d$). Comme par ailleurs le foncteur θ^s commute aux colimites, et donc aussi aux quotients, il envoie le faisceau représenté dans la catégorie $\mathrm{Sch}(k)$ par $\coprod_{d \geqslant 0} S^d X$ sur le faisceau représenté par $\coprod_{d \geqslant 0} S^d X(\mathbf{C})$. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Si X est un schéma lisse quasi-projectif sur* $\mathbf{C}$, *l'image $\theta^s(\mathbf{Z}_{tr}(X))$ est le faisceau*

$$U \mapsto \mathrm{Hom}\left(U, \coprod_{d \geqslant 0} S^d X(\mathbf{C})\right)^+.$$

Composant le foncteur θ^s avec le foncteur oubli des transferts, nous obtenons un foncteur exact à droite qui se factorise dans les faisceaux en groupes abéliens en un foncteur monoïdal Φ de la catégorie $\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}\,\mathbf{C})$ de faisceaux de Nisnevich avec transferts vers le topos abélien $\widetilde{CW}_{Ab}$.

Cette construction s'étend aux préfaisceaux et en considérant d'abord le foncteur complexe de Suslin $\underline{C}_*(F) = F(- \times \Delta^n)$ où F est un préfaisceau et $\Delta^\bullet$ est suivant le cas le schéma cosimplicial affine ($\Delta^n \simeq \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}}$) ou l'espace cosimplicial standard, nous obtenons un foncteur toujours exact à droite $\Phi \circ \underline{C}_*$ de la catégorie des préfaisceaux avec transferts $\mathrm{PST}(\mathbf{C})$ vers la catégorie des complexes de faisceaux abéliens $K^-(\widetilde{CW}_{Ab})$.

Suslin et Voevodsky [7] (Section 8) ont montré l'existence de quasi-isomorphismes $\Phi \circ \underline{C}_* \simeq \underline{C}_* \circ \Phi \simeq C_* \circ \Phi$, où C_* associe à tout faisceau F le complexe de groupes abéliens $C_n(F) = F(\Delta_n)$. On en déduit un foncteur $\Psi : \mathrm{PST}(\mathbf{C}) \to D^-(Ab)$, avec $\Psi(F) = \Gamma(pt, \underline{C}_* \circ \Phi(F))$.

Tout préfaisceau avec transferts admet une résolution par des sommes de projectifs $\mathbf{Z}_{tr}(X_\alpha)$, X_α schémas quasi-projectifs lisses sur $\mathbf{C}$. Cette résolution permet de dériver le foncteur Ψ en

$$L\Psi : D^-\big(\mathrm{PST}(\mathbf{C})\big) \to D(Ab).$$

Les théorèmes de Dold–Puppe et Dold–Thom se traduisent en

Proposition 2.2. *Si X est un schéma lisse quasi-projectif sur $\mathbf{C}$, l'image $\Psi(\mathbf{Z}_{tr}(X))$ est quasi-isomorphe au complexe des chaînes singulières $\mathrm{Sing}_\bullet(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ de la variété topologique $X(\mathbf{C})$.*

Pour vérifier que si F est un préfaisceau avec transfert tel que le faisceau de Nisnevich associé F_{Nis} soit nul, l'image $L\Psi(F)$ est acyclique, on se ramène au lemme suivant :

Lemme 2.3. *Si $U = \coprod_i U_i \to X$ est un recouvrement de Nisnevich d'un schéma X lisse quasi-projectif sur $\mathbf{C}$, alors l'image par le foncteur Ψ du complexe $\mathbf{Z}_{tr}(NU) \to \mathbf{Z}_{tr}(X)$ est acyclique, où $\mathbf{Z}_{tr}(NU)$ est le complexe de Cech*

$$\cdots \mathbf{Z}_{tr}(U \times_X U \times_X U) \to \mathbf{Z}_{tr}(U \times_X U) \to \mathbf{Z}_{tr}(U).$$

Démonstration. Par dualité il est équivalent de montrer que le bicomplexe de cochaines $\mathrm{Sing}^\bullet((NU)(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to \mathrm{Sing}^\bullet(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est acyclique. On recouvre chaque ouvert $U_i(\mathbf{C})$ par des ouverts contractiles convexes qui permettent de construire des recouvrements contractiles de tous les ouverts $V = U_{i_1} \times \cdot \times U_{i_k}(\mathbf{C})$ intervenant dans le complexe $NU(\mathbf{C})$. Remplaçant dans chaque colonne les $\mathrm{Sing}_\bullet(V, \mathbf{Z})$ par les complexes de Cech $\check{C}(V, \mathbf{Z})$ [1], on remplace $\mathrm{Sing}_\bullet(NU(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ par un bicomplexe quasi-isomorphe dont le complexe total est le complexe de Cech $\check{C}(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ associé à un recouvrement ouvert contractile de $X(\mathbf{C})$ et qui calcule la cohomologie singulière de $X(\mathbf{C})$. □

Nous en déduisons un foncteur $\mathbf{L}\Psi : D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}\,\mathbf{C})) \to D(Ab)$ qui est compatible au produit, d'après le théorème d'Eilenberg–Zilber, et se factorise via le foncteur C_* à travers la catégorie des complexes motiviques effectifs. L'image du motif de Tate étant inversible, le foncteur $\mathbf{L}\Psi$ induit un foncteur de réalisation topologique

$$t_{\mathbf{C}} : \mathbf{DM}^-(\mathbf{C}) \to D(Ab)$$

où Ab est la catégorie des groupes abéliens. Nous avons montré

Théorème 2.4. *Si le motif $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X)$ est le motif associé à un schéma X quasi-projectif lisse sur $\mathbf{C}$, sa réalisation topologique $t_{\mathbf{C}}(\mathbf{M}(X))$ est le complexe de chaînes $\mathrm{Sing}_\bullet(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ de $X(\mathbf{C})$. En particulier la cohomologie singulière de $X(\mathbf{C})$ est représentable*

$$H^p\big(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}\big) = \mathrm{Hom}_{D^-(Ab)}\big(t_{\mathbf{C}}\big(\mathbf{M}(X)\big), \mathbf{Z}[p]\big).$$

3. Réalisation de Betti des motifs

A toute extension de corps $k \hookrightarrow K$, une construction similaire à celle du produit permet d'associer un foncteur d'extension des scalaires $\mathbf{DM}^-(k) \to \mathbf{DM}^-(K)$. Pour tout sous-corps $k \hookrightarrow \mathbf{C}$ du corps des complexes, l'extension des scalaires à $\mathbf{C}$ composée avec le foncteur de réalisation topologique définie ci-dessus fournit un foncteur

$$\begin{aligned} t_k : \mathbf{DM}^-(k) &\to D(Ab), \\ \mathbf{M} &\mapsto \mathbf{M}(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

Définition 3.1. Pour tout complexe motivique $\mathbf{M}$ de $\mathbf{DM}^-(k)$ la réalisation entière (resp. réalisation) de Betti $H_B(\mathbf{M}, \mathbf{Z})$ (resp. $H_B(\mathbf{M})$) est le groupe abélien (resp. $\mathbf{Q}$-espace vectoriel) gradué sur $\mathbf{Z}$

$$H_B^p(\mathbf{M}, \mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}_{D(Ab)}\big(\mathbf{M}(\mathbf{C}), \mathbf{Z}[p]\big),$$
$$H_B^p(\mathbf{M}) = H_B^p(\mathbf{M}, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}.$$

Si le complexe motivique $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X)$ est le motif d'un schéma X quasi-projectif lisse sur k, la réalisation de Betti coïncide avec la cohomologie singulière de la variété $X(\mathbf{C})$ des points complexes.

La catégorie des motifs géométriques sur k est la sous-catégorie triangulée de $\mathbf{DM}^-(k)$ engendrée par les motifs des schémas lisses et projectifs sur k. Restreignant notre foncteur H_B aux motifs géométriques, nous obtenons un foncteur dans la catégorie des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie. Il est aisé de montrer qu'il coïncide avec la composante singulière du foncteur de réalisation d'Annette Huber [3].

Remerciements

Merci à Nathalie Wach avec qui c'est un plaisir de collaborer et découvrir le monde motivique. Ce travail a bénéficié de conversations avec Andrei Suslin, Pierre Baumann et Frédéric Déglise ; ce dernier m'a aidée à simplifier la démonstration de la Proposition 2.1.

Références

[1] R. Godement, Théorie des faisceaux, Herman, Paris, 1958.
[2] A. Grothendieck, M. Artin, J.-L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), Lecture Notes in Math., vols. 269, 270, 305, Springer, Heidelberg, 1972–1973.
[3] A. Huber, Realization of Voevodsky's motives, J. Algebraic Geometry 9 (4) (2000) 755–799.
[4] F. Lecomte, N. Wach, Le complexe motivique de De Rham, preprint, 2007.
[5] F. Lecomte, N. Wach, Réalisation des complexes motiviques de Voevodsky, preprint, 2008.
[6] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lecture Notes on Motivic Cohomology, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, Amer. Math. Soc. / Clay Mathematics Institute, Providence, RI / Cambridge, MA, 2006.
[7] A. Suslin, V. Voevodsky, Singular homology of abstract algebraic varieties, Invent. Math. 123 (1996) 63–94.
[8] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field, in [9], pp. 188–238.
[9] V. Voevodsky, A. Suslin, E.M. Friedlander, Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, Annals of Mathematics Studies, vol. 143, Princeton University Press, 2000.