Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 9–13

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes

Yves Benoist [a], Jean-François Quint [b]

[a] CNRS – Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France
[b] CNRS – Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 2 septembre 2008 ; accepté le 30 octobre 2008

Disponible sur Internet le 28 novembre 2008

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Soient G un groupe de Lie réel simple, Λ un réseau de G et Γ un sous-groupe Zariski dense de G. On montre que toute orbite de Γ dans le quotient $X = G/\Lambda$ est finie ou dense. Soit μ une probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous-groupe Zariski dense de G. On montre que toute probabilité μ-stationnaire et μ-ergodique sur X est de support fini ou est G-invariante. ***Pour citer cet article : Y. Benoist, J.-F. Quint, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces. Let G be a real simple Lie group, Λ be a lattice of G and Γ be a Zariski dense subgroup of G. We prove that every Γ-orbit in the quotient $X = G/\Lambda$ is either finite or dense. Let μ be a probability measure on G whose support is compact and generates a Zariski dense subgroup of G. We prove that every μ-ergodic μ-stationary probability measure on X either has finite support or is G-invariant. ***To cite this article: Y. Benoist, J.-F. Quint, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

The aim of this Note is to present a new tool for studying stationary probability measures on homogeneous spaces that we call the “exponential drift”.

We use it to prove the following result:

Theorem 0.1. *Let G be a simple real Lie group, Λ be a lattice of G and μ be a probability measure on G whose support is compact and generates a Zariski dense semigroup of G. Then every μ-ergodic μ-stationary probability measure on G/Λ either has finite support or is the Haar probability measure.*

Ratner’s theory, in [15,16] or [13], describes the Γ-invariant probability measures and the Γ-invariant closed subsets of the quotient $X = G/\Lambda$ when Γ is a connected group generated by unipotent elements. We obtain here an extension of Ratner’s theory to the Zariski dense semigroups Γ. More precisely:

Adresses e-mail : yves.benoist@math.u-psud.fr (Y. Benoist), quint@math.univ-paris13.fr (J.-F. Quint).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.11.001

Corollary 0.2. *Let G be a simple real Lie group, Λ a lattice of G, and Γ a Zariski dense semigroup of G. Every Γ-ergodic Γ-invariant probability measure on X either has finite support or is the Haar measure. Every Γ-invariant infinite closed subset of X is equal to X.*

The simplest example to which this theorem and its corollary apply is $G = \mathrm{PSL}(d, \mathbb{R})$, $\Lambda = \mathrm{PSL}(d, \mathbb{Z})$ with $d \geqslant 2$, $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{g_1} + \delta_{g_2})$ and Γ the semigroup generated by g_1 and g_2 as soon as it is Zariski dense. The space X is then the space of covolume one lattices in $\mathbb{R}^d$. Even for $d = 2$ and this probability measure, these statements are new. Our corollary extends a result of Eskin and Margulis in [6] which states that the discrete Γ-invariant subsets of X are finite.

Our approach allows us to extend Bourgain, Furman, Lindenstrauss and Mozes' recent result in [2]:

Theorem 0.3. *Let Γ be a sub-semigroup of $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ whose action on $\mathbb{R}^d$ is strongly irreducible. Every Γ-ergodic Γ-invariant probability measure on the torus $\mathbb{T}^d$ either has finite support or is the Haar measure.*

More generally, let μ be a probability measure on $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ whose support is finite and generates Γ. Every μ-ergodic μ-stationary probability measure on $\mathbb{T}^d$ either has finite support or is the Haar measure.

The result in [2] supposes the existence of proximal elements in Γ.

Notice that the description of the closed Γ-invariant subsets of $\mathbb{T}^d$ is due to Muchnik in [14] and Guivarc'h, Starkov in [10].

Since our approach does not use harmonic analysis we are able to extend our results to more general homogeneous spaces.

1. Introduction

Le but de cette Note est d'introduire un nouvel outil dans l'étude des probabilités stationnaires sur les espaces homogènes que nous appelons la « dérive exponentielle ».

Nous l'utiliserons ici pour montrer le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soient G un groupe de Lie réel simple, Λ un réseau de G et μ une probabilité sur G dont le support est compact et engendre un sous-semigroupe Zariski dense de G. Toute probabilité μ-stationnaire et μ-ergodique ν sur $X = G/\Lambda$ est à support fini ou est la probabilité de Haar.*

Rappelons qu'une probabilité ν sur X est dite μ-stationnaire si on a $\mu * \nu = \nu$. Elle est dite μ-ergodique si elle est extrémale parmi les probabilités μ-stationnaires.

La théorie de Ratner, dans [15,16] ou [13], décrit les probabilités et les fermés Γ-invariants du quotient $X = G/\Lambda$ lorsque Γ est un groupe connexe engendré par des éléments unipotents. Dans [18] p. 232, N. Shah parle des extensions de cette théorie à des groupes non connexes comme d'un « challenging problem ». Dans [12] p. 162, G. Margulis signale que les extensions de cette théorie à des groupes non connexes « look extremely difficult » à cause de l'absence même de conjecture. Nous obtenons ici une extension de la théorie de Ratner à des groupes Γ Zariski denses. Plus précisément :

Corollaire 1.2. *Soient G un groupe de Lie réel linéaire simple connexe, Λ un réseau de G, $X = G/\Lambda$ et Γ un sous-semigroupe Zariski dense de G. Toute probabilité Γ-invariante et Γ-ergodique sur X est à support fini ou est la probabilité de Haar. Tout fermé Γ-invariant infini de X est égal à X.*

Rappelons qu'un fermé F de X est dit Γ-invariant si, pour tout γ dans Γ, on a $\gamma F \subset F$.

L'exemple le plus simple auquel s'appliquent ce théorème et son corollaire est bien sûr $G = \mathrm{PSL}(d, \mathbb{R})$, $\Lambda = \mathrm{PSL}(d, \mathbb{Z})$ avec $d \geqslant 2$, $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{g_1} + \delta_{g_2})$ et Γ le semigroupe engendré par g_1 et g_2 lorsque celui-ci est Zariski dense. L'espace X est alors l'espace des réseaux de $\mathbb{R}^d$ de covolume 1. Nos énoncés sont nouveaux même pour $d = 2$ et pour cette probabilité. Notre corollaire généralise un résultat d'Eskin et Margulis dans [6] qui affirme que les parties discrètes Γ-invariantes de X sont finies.

Notre méthode permet aussi de généraliser un résultat récent de Bourgain, Furman, Lindenstrauss et Mozes dans [2] :

Théorème 1.3. *Soit Γ un sous-semigroupe de* $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ *dont l'action sur* $\mathbb{R}^d$ *est fortement irréductible. Toute probabilité Γ-invariante et Γ-ergodique sur le tore $\mathbb{T}^d$ est à support fini ou est la probabilité de Haar.*

Plus généralement, soit μ une probabilité sur $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ *dont le support est fini et engendre Γ. Alors toute probabilité μ-stationnaire et μ-ergodique sur le tore $\mathbb{T}^d$ est à support fini ou est la probabilité de Haar.*

Rappelons qu'une action sur $\mathbb{R}^d$ est dite fortement irréductible s'il n'existe pas de réunion finie non triviale de sous-espaces de $\mathbb{R}^d$ qui soit Γ-invariante.

Le résultat de [2] suppose l'existence d'éléments proximaux dans Γ.

Dans nos deux théorèmes, l'hypothèse de compacité du support de μ peut très probablement être assouplie en une hypothèse de moment comme dans [2].

On retrouve ainsi le résultat suivant dû à Muchnik dans [14] et Guivarc'h et Starkov dans [10] : *tout fermé infini du tore $\mathbb{T}^d$ qui est invariant par un sous-semigroupe de* $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ *dont l'action sur* $\mathbb{R}^d$ *est fortement irréductible est égal à $\mathbb{T}^d$.*

L'approche de [2] est basée sur une étude subtile des coefficients de Fourier. Notre approche est purement ergodique. C'est pourquoi elle s'étend à des espaces homogènes plus généraux.

Expliquons uniquement les grandes lignes de la démonstration du Théorème 1.1 car le Théorème 1.3 se montre de façon analogue.

On garde désormais les notations du Théorème 1.1. On suppose G non compact et ν de support infini.

2. Probabilités limites

On note S le support de μ et $\Gamma \subset G$ le sous-groupe fermé engendré par S. Il est Zariski dense dans G. Soit P un sous-groupe parabolique minimal de G. D'après un résultat classique de Furstenberg et de Gol'dsheid-Margulis, il existe sur la variété drapeau $X_0 := G/P$ une unique probabilité borélienne μ-stationnaire notée ν_0. On note $(B,\mathcal{B},\beta,T)$ le système de Bernoulli unilatère d'alphabet (S,μ). C'est-à-dire que $B = S^{\mathbb{N}}$, que $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne complétée pour la probabilité produit $\beta := \mu^{\otimes\mathbb{N}}$ et que T est le décalage à droite, donné par $(Tb)_i = b_{i+1}$ pour tout $b = (b_0, b_1, \ldots)$ dans B et i dans $\mathbb{N}$.

Pour β-presque tout b, on note $\xi(b)$ l'élément de X_0 tel que $\lim_{p\to\infty}(b_0\cdots b_p)_*\nu_0 = \delta_{\xi(b)}$. On a l'égalité, pour β-presque tout b dans B, $\xi(b) = b_0\xi(Tb)$. En outre, on a l'égalité $\xi_*(\beta) = \nu_0$.

Ecrivons $P = ZU$ où U est le radical unipotent de P et Z est un sous-groupe réductif maximal de P. Choisissons une involution de Cartan de G qui laisse stable Z, notons K le sous-groupe compact maximal de G formé des points fixes de cette involution de Cartan et $M = Z \cap K$. Soit A le sous-espace de Cartan de G inclus dans Z de sorte que $Z = MA$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, χ le plus grand poids de A dans $\mathfrak{g}$ pour l'ordre associé au choix de P et $V_0 = \mathfrak{g}_\chi$ l'espace poids associé. On a donc $PV_0 \subset V_0$. On note, pour β-presque tout b dans B, V_b l'image de V_0 par un élément g de G tel que $\xi(b) = gP$.

Soit $X = G/\Lambda$ et $\mathcal{X}$ sa tribu borélienne. Pour β-presque tout b dans B, on note ν_b la probabilité borélienne sur X obtenue comme limite $\nu_b := \lim_{p\to\infty}(b_0\cdots b_p)_*\nu$. On note T^X la transformation de $B^X := B \times X$ définie par $T^X(b,x) = (Tb, b_0^{-1}x)$. Soit β^X la probabilité sur $(B^X, \mathcal{B}\otimes\mathcal{X})$ définie par $\beta^X = \int_B \delta_b \otimes \nu_b \,\mathrm{d}\beta(b)$. Cette probabilité β^X est invariante par la transformation T^X. On note $\mathcal{B}^X$ la tribu complétée de $\mathcal{B}\otimes\mathcal{X}$ pour la mesure β^X.

Pour β-presque tout b dans B, on note $\mathcal{M}_1(\exp V_b)$ l'espace des mesures de Radon non nulles sur le groupe $\exp V_b$ modulo normalisation. Pour ν_b-presque tout x dans X, on note $\sigma_{b,x} \in \mathcal{M}_1(\exp V_b)$ la mesure conditionnelle en x de ν_b pour l'action sur X du groupe $\exp V_b$ (voir [11] ou [5]).

Nous déduisons le Théorème 1.1 de la proposition suivante grâce au théorème de Ratner et à des idées de [7] :

Proposition 2.1. *Pour β-presque tout b dans B, pour ν_b-presque tout x dans X, le stabilisateur dans* $\exp V_b$ *de $\sigma_{b,x}$ n'est pas discret.*

La démonstration de cette proposition est basée sur la construction d'une suspension du système dynamique $(B^X, \mathcal{B}^X, \beta^X, T^X)$ et sur l'étude de ses propriétés ergodiques.

3. Construction d'un système dynamique

Soient Z_Γ le plus petit sous-groupe fermé de Z contenant tous les éléments de Z conjugués sous G à un élément loxodromique de Γ. D'après [9], Z_Γ est un sous-groupe ouvert de Z.

Soit $s : X_0 \to K$ une application borélienne telle que, pour ν_0-presque tout x_0 dans X_0, on a $x_0 = s(x_0)P$. On note $\sigma : G \times X_0 \to Z$ le cocycle donné par, pour μ-presque tout g dans G et ν_0-presque tout x_0 dans X_0, $gs(x_0)U = s(gx_0)\sigma(g, x_0)U$. D'après [9] on peut choisir s de sorte que σ prenne $\mu \otimes \nu_0$-presque sûrement ses valeurs dans Z_Γ.

On note $\theta : B \to Z_\Gamma$, $\theta_{\mathbb{R}} : B \to \mathbb{R}$ et, pour $p \geqslant 0$, $\theta_{\mathbb{R},p} : B \to \mathbb{R}$ les fonctions données par, pour β-presque tout b dans B, $\theta(b) = \sigma(b_0^{-1}, \xi(b))$, $\theta_{\mathbb{R}}(b) := -\log|\chi(\theta(b))|$ et $\theta_{\mathbb{R},p}(b) = \theta_{\mathbb{R}}(b) + \cdots + \theta_{\mathbb{R}}(T^{p-1}b)$.

D'après [8], l'intégrale λ_1 de la fonction bornée $\theta_{\mathbb{R}}$ est strictement positive. Soit ε_0 un réel tel que $0 < \varepsilon_0 < \lambda_1$. Introduisons les fonctions $\tau_{\mathbb{R}}$ et φ sur B données, pour β-presque tout b dans B, par $\tau_{\mathbb{R}}(b) = \max(0, \min_{p\geqslant 1}(\theta_{\mathbb{R},p}(b) - p\varepsilon_0)) + \varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_0$ et par $\varphi(b) = -\min_{p\geqslant 0}(\theta_{\mathbb{R},p}(b) - p\varepsilon_0) \geqslant 0$ de sorte que $\theta_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}} + \varphi \circ T - \varphi$. Autrement dit $\tau_{\mathbb{R}}$ est une fonction minorée par ε_0 qui est cohomologue à $\theta_{\mathbb{R}}$ via la fonction positive φ.

Notons $H := Z_\Gamma \cap M$ et $\tau = (\tau_{\mathbb{R}}, \tau_H) : B \to \mathbb{R} \times H$ la fonction $\mathcal{B}$-mesurable dont la composante dans H est la composante dans H de θ. Notons $\mathrm{d}k$ et $\mathrm{d}h$ les mesures de Haar sur $\mathbb{R}$ et H.

Posons $B^\tau = \{c = (b, k, h) \in B \times \mathbb{R} \times H \mid 0 \leqslant k < \tau_{\mathbb{R}}(b)\}$, $\mathcal{B}^\tau$ la restriction à B^τ de la tribu produit complétée, β^τ la mesure finie sur $(B^\tau, \mathcal{B}^\tau)$ restriction de $\beta \otimes \mathrm{d}k \otimes \mathrm{d}h$, et, pour $\ell \geqslant 0$, T_ℓ^τ la transformation de B^τ donnée, pour β^τ-presque tout $c = (b, k, h)$, par $T_\ell^\tau(c) = (T^{p_\ell(c)}b, k + \ell - \tau_{\mathbb{R},\ell}(c), \tau_{H,\ell}(c)h)$ où $p_\ell(c)$ est le plus grand entier p tel que $k + \ell - \tau_{\mathbb{R},p}(b) \geqslant 0$, où $\tau_{\mathbb{R},\ell}(c) = \tau_{\mathbb{R}}(b) + \cdots + \tau_{\mathbb{R}}(T^{p_\ell(c)-1}b)$ et où $\tau_{H,\ell}(c) = \tau_H(T^{p_\ell(c)-1}b) \cdots \tau_H(b)$. Ces transformations T_ℓ^τ préservent la mesure finie β^τ. On note $\nu_c = \nu_b$ et $V_c = V_b$.

De même, pour $\ell \geqslant 0$, on note $T_\ell^{\tau,X}$ la transformation de $B^{\tau,X} := B^\tau \times X$ définie par $T_\ell^{\tau,X}(c, x) = (T_\ell^\tau c, \rho_\ell(c)x)$ où $\rho_\ell(c) = b_{p_\ell(c)-1}^{-1} \cdots b_0^{-1}$. Elle préserve la mesure $\beta^{\tau,X}$ sur $(B^{\tau,X}, \mathcal{B}^\tau \otimes \mathcal{X})$ définie par $\beta^{\tau,X} = \int_{B^\tau} \delta_c \otimes \nu_c \, \mathrm{d}\beta^\tau(c)$. On note $\mathcal{B}^{\tau,X}$ la tribu complétée de $\mathcal{B}^\tau \otimes \mathcal{X}$ pour la mesure $\beta^{\tau,X}$ et $\mathcal{Q}_\infty^{\tau,X} = \bigcap_{\ell\geqslant 0}(T_\ell^{\tau,X})^{-1}\mathcal{B}^{\tau,X}$ la tribu queue du système dynamique $(B^{\tau,X}, \mathcal{B}^{\tau,X}, \beta^{\tau,X}, T^{\tau,X})$.

4. La dérive exponentielle

On appellera *flot horocyclique* l'action Φ de V_0 sur $B^{\tau,X}$ donnée par l'égalité, pour tout v dans V_0, β^τ-presque tout $c = (b, k, h)$ dans B^τ et tout x dans X, $\Phi_v(c, x) = (c, \exp(D_c(v))x)$, où $D_c(v)$ est l'élément de V_c donné par $D_c(v) = \mathrm{e}^{k-\varphi(b)}s(\xi(b))hv$. Géométriquement, ce flot Φ « translate chaque point (c, x) dans la direction de V_c ». Signalons qu'à ce stade du raisonnement, on ne sait pas si ce flot préserve la probabilité $\beta^{\tau,X}$: nous ne le saurons qu'après avoir démontré le Théorème 1.1. Cette difficulté est bien sûr au coeur du sujet.

Notons encore $\mathcal{M}_1(V_0)$ l'espace des mesures de Radon non nulles sur V_0 modulo normalisation. Pour $\beta^{\tau,X}$-presque tout (c, x) dans $B^{\tau,X}$, on note $\sigma(c, x) \in \mathcal{M}_1(V_0)$ la mesure conditionnelle en (c, x) de $\beta^{\tau,X}$ pour l'action du flot horocyclique. On veut montrer que, pour (c, x) en dehors d'un ensemble de $\beta^{\tau,X}$-mesure nulle, le stabilisateur de $\sigma(c, x)$ dans V_0 est non discret. Un outil clef pour cela est la proposition suivante.

Proposition 4.1. *L'application $\sigma : B^{\tau,X} \to \mathcal{M}_1(V_0)$ est $\mathcal{Q}_\infty^{\tau,X}$-mesurable.*

L'invariance de σ résultera alors facilement de la proposition suivante.

Proposition 4.2. *Soient $f : B^{\tau,X} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{Q}_\infty^{\tau,X}$-mesurable et $E \subset B^{\tau,X}$, un ensemble $\mathcal{B}^{\tau,X}$-mesurable avec $\beta^{\tau,X}(E^c) = 0$. Alors, pour $\beta^{\tau,X}$-presque tout (c, x) dans $B^{\tau,X}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément v non nul de V_0 de norme au plus ε et un élément (c', x') de E tels que $\Phi_v(c', x')$ est aussi dans E et tels que*

$$f\big(\Phi_v(c', x')\big) = f(c', x') = f(c, x).$$

La démonstration de cette Proposition 4.2 est basée sur un argument de *dérive exponentielle*, reposant sur une adapatation des idées de [3] pour la démonstration de théorèmes ergodiques pour les actions de groupes libres. Cet argument consiste, grosso modo, à partir de points (c, y) très proches de (c, x) mais hors de la même « feuille stable » et sur lesquels f prend des valeurs proches. On considère alors deux « horosphères symboliques » de grand rayon

ℓ passant respectivement par les points (c, x) et (c, y). Lorsque ℓ est bien ajusté, la distance entre « presque tous » les points correspondants de ces deux horosphères a une taille macroscopique contrôlée. A la limite on obtient des couples de points distincts qui sont sur le même horocycle et sur lesquels f prend les même valeurs qu'en (c, x).

Cet argument de dérive utilise la proposition suivante ; fixons une distance d sur X :

Proposition 4.3. *Pour β^X-presque tout (b, x) dans B^X, la variété stable*

$$W_b(x) := \left\{ y \in X \mid \lim_{p\to\infty} d\big(b_p^{-1}\cdots b_0^{-1}x, b_p^{-1}\cdots b_0^{-1}y\big) = 0 \right\}$$

est de ν_b-mesure nulle.

La démonstration de cette proposition est basée sur un phénomène de récurrence hors de la diagonale similaire au phénomène de récurrence de [6].

Signalons pour finir la proposition suivante :

Proposition 4.4. *Le système dynamique $(B^{\tau,X}, \mathcal{B}^{\tau,X}, \beta^{\tau,X}, T^{\tau,X})$ vérifie la loi du* $0-1$.

Autrement dit la tribu queue $\mathcal{Q}_\infty^{\tau,X}$ est triviale.

La démonstration reprend des idées de [1,4,9] et surtout de [17].

Les détails seront publiés ailleurs.

Remerciements

Nous remercions Y. Hu, F. Ledrappier, R. Spatzier et J.-P. Thouvenot pour d'intéressantes discussions sur ce sujet.

Références

[1] F. Blanchard, K-flots et théorème de renouvellement, Z. Wahrsch. verw. Gebiete 36 (1976) 345–358.
[2] J. Bourgain, A. Furman, E. Lindenstrauss, S. Mozes, Invariant measures and stiffness for non-abelian groups of toral automorphisms, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 737–742.
[3] A. Bufetov, Convergence of spherical averages for actions of free groups, Ann. of Math. 155 (2002) 929–944.
[4] J.-P. Conze, Extensions de systèmes dynamiques par des groupes compacts, Ann. Inst. H. Poincaré 8 (1972) 33–66.
[5] M. Einsiedler, A. Katok, E. Lindenstrauss, Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture, Ann. of Math. 164 (2006) 513–560.
[6] A. Eskin, G. Margulis, Recurrence properties of random walks on finite volume homogeneous manifolds, in: Random Walks and Geometry, W. de Gruiter, 2004, pp. 431–444.
[7] A. Eskin, S. Mozes, N. Shah, Unipotent flows and counting lattice points on homogeneous varieties, Ann. of Math. 143 (1996) 253–299.
[8] H. Furstenberg, Noncommuting random products, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963) 377–428.
[9] Y. Guivarc'h, A. Raugi, Actions of large semigroups and random walks on isometric extensions of boundaries, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 40 (2007) 209–249.
[10] Y. Guivarc'h, A. Starkov, Orbits of linear group actions, random walks on homogeneous spaces and toral automorphisms, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004) 767–802.
[11] A. Katok, R. Spatzier, Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions, Ergodic Theory Dynam. Systems 16 (1996) 751–778.
[12] G. Margulis, Problems and conjectures in rigidity theory, in: Mathematics: Frontiers and Perspectives, Amer. Math. Soc., 2000, pp. 161–174.
[13] G. Margulis, G. Tomanov, Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces, Invent. Math. 116 (1994) 347–392.
[14] R. Muchnik, Semigroup actions on $\mathbb{T}^n$, Geom. Dedicata 110 (2005) 1–47.
[15] M. Ratner, On Raghunathan's measure conjecture, Ann. of Math. 134 (1991) 545–607.
[16] M. Ratner, Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, Duke Math. J. 63 (1991) 235–280.
[17] V.A. Rohlin, Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations, Russian Math. Surveys 22 (1967) 1–54.
[18] N. Shah, Invariant measures and orbit closures on homogeneous spaces for actions of subgroups generated by unipotent elements, in Lie groups and ergodic theory, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. 14 (1998) 229–271.