Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 631–636

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie algébrique

Composantes singulières des fibres de Springer dans le cas deux-colonnes

Lucas Fresse

Department of Mathematics, the Weizmann Institute of Science, 76100 Rehovot, Israel

Reçu le 9 novembre 2008 ; accepté après révision le 2 avril 2009

Disponible sur Internet le 23 avril 2009

Présenté par Michel Duflo

Résumé

On considère la fibre de Springer $\mathcal{B}_u$ pour un endomorphisme nilpotent u tel que $u^2 = 0$. On établit une condition nécessaire et suffisante de singularité pour les composantes de $\mathcal{B}_u$. ***Pour citer cet article : L. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Singular components of Springer fibers in the two-column case. We consider the Springer fiber $\mathcal{B}_u$ corresponding to a nilpotent endomorphism u of nilpotent order 2. We establish a necessary and sufficient condition of singularity for the components of $\mathcal{B}_u$. ***To cite this article: L. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

Let V be a n-dimensional $\mathbb{C}$-vector space and let $u : V \to V$ be a nilpotent endomorphism. Let $\mathcal{B}_u$ be the set of the complete flags $(V_0 \subset \cdots \subset V_n = V)$ such that $u(V_i) \subset V_i$ for every i. The set $\mathcal{B}_u$ is a projective subvariety of the variety of complete flags, and it is called a Springer fiber, since it can be seen as the fiber over u of the Springer resolution of singularities of the nilpotent cone $\mathcal{N} \subset \mathrm{End}(V)$. The variety $\mathcal{B}_u$ is non-irreducible and singular, unless u is zero or regular. Our purpose is to present a necessary and sufficient condition of singularity for the irreducible components of $\mathcal{B}_u$, in the case $u^2 = 0$.

Parameterization of components of $\mathcal{B}_u$ by a set of standard tableaux

Let $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r$ be the lengths of the Jordan blocks of u, then let $Y(u)$ be the Young diagram of rows of lengths $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Then we have $u^2 = 0$ when $Y(u)$ has at most two columns. If $\mu_1, \ldots, \mu_s$ denote the lengths of the columns of $Y(u)$, then the dimension of $\mathcal{B}_u$ is given by $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u = \sum_{q=1}^{s} \frac{\mu_q(\mu_q - 1)}{2}$.

Adresse e-mail : lucas.fresse@weizmann.ac.il.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.04.005

Let T be a standard tableau of shape $Y(u)$. The shape of the subtableau $T[1,\dots,i]$ of entries $1,\dots,i$ is a subdiagram $Y_i^T \subset Y(u)$ with i boxes. For any $(V_0,\dots,V_n) \in \mathcal{B}_u$, the restriction $u_{|V_i} : V_i \to V_i$ is a nilpotent endomorphism, whose Jordan form is represented by a subdiagram $Y(u_{|V_i}) \subset Y(u)$ with i boxes. We define

$$\mathcal{B}_u^T = \{(V_0,\dots,V_n) \in \mathcal{B}_u\colon\ Y(u_{|V_i}) = Y_i^T\ \forall i = 0,\dots,n\}.$$

According to [2, §II.5.4-5], the $\mathcal{B}_u^T$'s form a partition of $\mathcal{B}_u$ into locally closed, irreducible subsets such that $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u^T = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$. Thus $\mathcal{B}_u$ is equidimensional and the components of $\mathcal{B}_u$ are the subsets $K^T = \overline{\mathcal{B}_u^T}$.

Elements $F_\tau \in \mathcal{B}_u$ parametrized by row-standard tableaux

We call *row-standard tableau* a numbering of $Y(u)$ by $1,\dots,n$, with numbers in rows increasing to the right. If we put in increasing order the numbers in each column of τ row-standard, then we get a standard tableau, that we denote by $\mathrm{st}(\tau)$. Fix a Jordan basis of u. By construction of $Y(u)$ we can index the basis $\{e_x,\ x \in Y(u)\}$ on the boxes of $Y(u)$ in such way that $u(e_x) = 0$ if x is in the first column of $Y(u)$, and otherwise $u(e_x) = e_{x'}$ where x' is the box on the left of x. For τ row-standard, boxes $1,\dots,i$ in the tableau define a subset $X_i \subset Y(u)$. Let $F_\tau = (V_0,\dots,V_n)$ be the flag such that $V_i = \langle e_x\colon\ x \in X_i\rangle$ for every i. Then F_τ belongs to $\mathcal{B}_u$. Moreover F_τ is contained in $\mathcal{B}_u^T$ for $T = \mathrm{st}(\tau)$.

The F_τ's are the elements of $\mathcal{B}_u$ which are fixed by the torus $H \subset GL(V)$ of diagonal automorphisms in the basis $(e_x)_x$, for its linear action on flags. There exists $H' \subset H$ a regular subtorus of rank one such that: $H' \subset N_u := \{g \in GL(V)\colon\ gug^{-1} \in \mathbb{C}u\}$. Thus H' acts on $\mathcal{B}_u$ and leaves each component of $\mathcal{B}_u$ invariant. The closure of any H'-orbit of $\mathcal{B}_u$ contains some F_τ. It follows

Lemma 0.1. *The component K^T is nonsingular if and only if every F_τ in K^T is a nonsingular point.*

From now on, suppose that $Y(u)$ has two columns of lengths $\mu_1 \geqslant \mu_2$.

Let T be a standard tableau and let τ be a row-standard tableau. We give a necessary and sufficient condition for having $F_\tau \in K^T$. Let $a_1,\dots,a_{\mu_1}$ (resp. $b_1,\dots,b_{\mu_2}$) be the entries of the first (resp. second) column of T. Define $a_1^*,\dots,a_{\mu_2}^*$ as follows. Set $a_1^* = b_1 - 1$. If $a_1^*,\dots,a_{p-1}^*$ are defined for $p \leqslant \mu_2$, set $a_p^* = \mathrm{Max}(a \in \{a_1,\dots,a_{\mu_1}\} \setminus \{a_1^*,\dots,a_{p-1}^*\}\colon\ a < b_p)$. Then define $s_{j/i}^T = \#\{p = 1,\dots,\mu_2\colon\ i < a_p^*, b_p \leqslant j\}$. Let $a_1',\dots,a_{\mu_1}'$ (resp. $b_1',\dots,b_{\mu_2}'$) be the entries of the first (resp. second) column of τ. For $0 \leqslant i < j \leqslant n$, define $s_{j/i}(\tau) = \#\{p = 1,\dots,\mu_2\colon\ i < a_p',\ b_p' \leqslant j\}$. We prove the following:

Proposition 0.1. *We have $F_\tau \in K^T$ if and only if $s_{j/i}(\tau) \leqslant s_{j/i}^T$ for any $0 \leqslant i < j \leqslant n$.*

Property of the flag F_{τ_0}

Let τ_0 be the standard tableau with numbers $1,\dots,\mu_1$ in the first column and $\mu_1 + 1,\dots,n$ in the second column. We have the following

Lemma 0.2. *The flag F_{τ_0} belongs to every component $K^T \subset \mathcal{B}_u$, moreover K^T is nonsingular if and only if F_{τ_0} is a nonsingular point of K^T.*

Let $Z_u := \{g \in GL(V)\colon\ gug^{-1} = u\}$ be the stabilizer of u. To prove the lemma, we show that F_{τ_0} belongs to the closure of the Z_u-orbit of any F_τ. Let i be the minimal entry which has not the same place in τ and τ_0. We construct a one-parameter group $(h_\tau(t))_{t \in \mathbb{C}} \subset Z_u$ such that $\lim_{t\to\infty} h_\tau(t) \cdot F_\tau = F_{\tau'}$ with τ' such that $1,\dots,i$ have the same place in τ' and τ_0. Then, argue by induction on i.

Necessary and sufficient condition for singularity

Let $X(\tau_0)$ denote the set of row-standard tableaux which are obtained from τ_0 by switching two entries i, j with $i < j$ and i in the first column of τ_0.

Fix a component $K^T \subset \mathcal{B}_u$. We construct some elements of the tangent space $\mathcal{T}_{F_{\tau_0}} K^T$.

– Let τ be obtained from τ_0 by switching two rows of length 2. Then the flags F_τ, F_{τ_0} are in the same Z_u-orbit, hence $F_\tau \in K^T$. Thus the curve $\{h_\tau(t) \cdot F_\tau\colon t \in \mathbb{C}\}$ is contained in K^T. In addition we show that $\lim_{t\to\infty} h_\tau(t) \cdot F_\tau = F_{\tau_0}$. Then the tangent vector at F_{τ_0} to this curve is an element $\xi_\tau \in \mathcal{T}_{F_{\tau_0}} K^T$.

– Let $\tau \in X(\tau_0)$ be such that $F_\tau \in K^T$. Then the curve $\{h_\tau(t) \cdot F_\tau\colon t \in \mathbb{C}\}$ is contained in K^T. We show that $\lim_{t\to\infty} h_\tau(t) \cdot F_\tau = F_{\tau_0}$, hence we get a tangent vector $\xi_\tau \in \mathcal{T}_{F_{\tau_0}} K^T$.

In that way we construct $\frac{\mu_2(\mu_2-1)}{2} + \#\{\tau \in X(\tau_0)\colon F_\tau \in K^T\}$ elements of the tangent space $\mathcal{T}_{F_{\tau_0}} K^T$. These elements are all linearly independent. We prove that they generate $\mathcal{T}_{F_{\tau_0}} K^T$:

Lemma 0.3. *We have* $\dim \mathcal{T}_{F_{\tau_0}} K^T = \frac{\mu_2(\mu_2-1)}{2} + \#\{\tau \in X(\tau_0)\colon F_\tau \in K^T\}$.

The point $F_{\tau_0} \in K^T$ is singular if and only if $\dim \mathcal{T}_{F_{\tau_0}} K^T > \dim K^T$. We deduce the following

Theorem 0.4. *Suppose that $Y(u)$ has two rows of lengths $\mu_1 \geqslant \mu_2$. Let T be standard. The component K^T is singular if and only if we have $\#\{\tau \in X(\tau_0)\colon F_\tau \in K^T\} > \frac{\mu_1(\mu_1-1)}{2}$.*

1. Introduction

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension $n \geqslant 0$ et soit $u : V \to V$ un endomorphisme nilpotent. On note par $\mathcal{B}_u$ l'ensemble des drapeaux complets $(V_0 \subset \cdots \subset V_n = V)$ tels que $u(V_i) \subset V_i$ pour tout i. L'ensemble $\mathcal{B}_u$ est une sous-variété projective de la variété des drapeaux complets sur V. La variété $\mathcal{B}_u$ est appelée *fibre de Springer* car elle peut être vue comme la fibre au dessus de u de la résolution des singularités du cône nilpotent de $\mathrm{End}(V)$, introduite par Springer [3]. La variété $\mathcal{B}_u$ est toujours connexe, et elle est non irréductible (et donc singulière) sauf si u est nul ou régulier.

La géométrie de $\mathcal{B}_u$ dépend de la forme de Jordan de u que l'on représente par un diagramme de Young : soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r$ les tailles des blocs de Jordan de u, on note $Y(u)$ le diagramme de Young de lignes de longueurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Lorsque $Y(u)$ a deux lignes ou est de type crochet (i.e. une seule ligne de longueur > 1), toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{B}_u$ sont non-singulières (cf. [1]). Lorsque $Y(u)$ a deux colonnes, des composantes singulières peuvent apparaître (cf. [2, p. 167]). En général, la description des composantes singulières de $\mathcal{B}_u$ est un problème ouvert. Le but de cette Note est de présenter un critère de singularité pour les composantes irréductibles de $\mathcal{B}_u$ lorsque $Y(u)$ a deux colonnes.

2. Traduction combinatoire de données géométriques sur $\mathcal{B}_u$

Dans cette section, on ne suppose pas a priori que le diagramme $Y(u)$ a deux colonnes. On note $\mu_1, \ldots, \mu_s$ les longueurs des colonnes de $Y(u)$, alors la dimension de $\mathcal{B}_u$ est $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u = \sum_{q=1}^{s} \frac{\mu_q(\mu_q-1)}{2}$ (cf. [2, §II.5.5]).

2.1. Paramétrage des composantes irréductibles $K^T \subset \mathcal{B}_u$ par les tableaux standards, d'après [2]

Un tableau standard de forme $Y(u)$ est une numérotation des cases de $Y(u)$ de 1 à n dont les numéros sont croissants de gauche à droite dans les lignes et de haut en bas dans les colonnes. Soit T un tableau standard. La forme du sous-tableau $T[1, \ldots, i]$ d'entrées $1, \ldots, i$ est un diagramme de Young à i cases noté Y_i^T. Pour tout drapeau $(V_0, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}_u$, la restriction $u_{|V_i} : V_i \to V_i$ est un endomorphisme nilpotent, dont la forme de Jordan est représentée par un diagramme de Young à i cases $Y(u_{|V_i})$. On définit

$$\mathcal{B}_u^T = \bigl\{(V_0, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}_u\colon Y(u_{|V_i}) = Y_i^T \ \forall i = 0, \ldots, n\bigr\}.$$

Les ensembles $\mathcal{B}_u^T$ forment une partition de $\mathcal{B}_u$ en sous-ensembles localement fermés, irréductibles et tels que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u^T = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$ (cf. [2, §II.5.4-5]). Il suit que $\mathcal{B}_u$ est équidimensionnelle et ses composantes irréductibles sont les ensembles $K^T = \overline{\mathcal{B}_u^T}$ pour tout T standard de forme $Y(u)$.

2.2. *Drapeaux $D_\tau \in \mathcal{B}_u$ associés aux tableaux lignes-standards*

On appelle *tableau lignes-standard de forme $Y(u)$* une numérotation des cases de $Y(u)$ de 1 à n dont les numéros sont croissants de gauche à droite dans les lignes. Si on remet dans l'ordre croissant les numéros dans chaque colonne de τ lignes-standard, alors le tableau obtenu est standard, et on le note $\mathrm{st}(\tau)$.

On fixe une base de Jordan de u. Comme les longueurs des lignes de $Y(u)$ sont les tailles des blocs de Jordan de u, on peut indexer les vecteurs de la base sur les cases de $Y(u)$ de sorte que, notant e_x le vecteur associé à la case $x \in Y(u)$, on a $u(e_x) = 0$ si x est dans la première colonne de $Y(u)$, et sinon $u(e_x) = e_{x'}$ si x' est la case à gauche de x. Pour τ lignes-standard, les cases $1, \ldots, i$ dans le tableau τ définissent un sous-ensemble $X_i \subset Y(u)$. Soit $D_\tau = (V_0, \ldots, V_n)$ le drapeau tel que $V_i = \langle e_x \colon x \in X_i \rangle$ pour tout i. Le drapeau D_τ est un élément de $\mathcal{B}_u$. On voit que $D_\tau \in \mathcal{B}_u^T$ pour $T = \mathrm{st}(\tau)$.

Soit $H \subset GL(V)$ le sous-groupe des éléments diagonaux dans la base $\{e_x \colon x \in Y(u)\}$. Les éléments D_τ, pour τ lignes-standard, sont les éléments de $\mathcal{B}_u$ fixés par H pour son action linéaire sur les drapeaux. Cette action ne laisse pas $\mathcal{B}_u$ invariant, cependant on montre qu'il existe $H' \subset H$ sous-tore régulier de rang 1 tel que $H' \subset N_u := \{g \in GL(V) \colon gug^{-1} \in \mathbb{C}u\}$. Alors l'action de H' laisse invariant $\mathcal{B}_u$ et chaque composante. Comme la fermeture de chaque H'-orbite contient un élément de la forme D_τ, on obtient :

Lemme 2.1. *Une composante $K \subset \mathcal{B}_u$ est non-singulière si et seulement si tout élément de la forme D_τ contenu dans K est non-singulier.*

3. Description des tableaux lignes-standards τ tels que $D_\tau \in K^T$ dans le cas deux-colonnes

On suppose désormais que le diagramme $Y(u)$ a deux colonnes de longueurs $\mu_1 \geqslant \mu_2$. Comme dans la section précédente on a fixé une base de Jordan de u indexée sur les cases de $Y(u)$.

3.1. *Propriété du drapeau D_{τ_0} associé au tableau τ_0*

Soit τ_0 le tableau dont on numérote de haut en bas la première colonne de 1 à μ_1 et la seconde colonne de $\mu_1 + 1$ à n. Par exemple pour $(\mu_1, \mu_2) = (4, 2)$ on obtient $\tau_0 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$.

Soit $Z_u := \{g \in GL(V) \colon gug^{-1} = u\}$ le stabilisateur de u. Le groupe Z_u est connexe et son action linéaire sur les drapeaux laisse stable $\mathcal{B}_u$ et chaque composante. Montrons que le drapeau D_{τ_0} est contenu dans la fermeture de la Z_u-orbite de D_τ pour tout τ lignes-standard. Pour cela on procède par récurrence sur i numéro minimal qui n'est pas à la même place dans τ et τ_0. Soient $x, x_0 \in Y(u)$ les places respectives de i dans τ, τ_0. On définit $h_\tau : \mathbb{C} \to Z_u$ par $h_\tau(t)e_x = e_x + te_{x_0}$, et $h_\tau(t)e_y = e_y$ si $y \in Y(u)$ n'est pas dans la même ligne que x. Alors $\lim_{t\to\infty} h_\tau(t)D_\tau = D_{\tau_1}$ où τ_1 est tel que $1, \ldots, i$ sont aux mêmes places dans τ_0 et τ_1. Il suit par hypothèse de récurrence $D_{\tau_0} \in \overline{Z_u D_{\tau_1}} \subset \overline{Z_u D_\tau}$. Avec le Lemme 2.1, il vient :

Proposition 3.1. (a) *Le drapeau D_{τ_0} est contenu dans chaque composante irréductible de $\mathcal{B}_u$.*
(b) *Une composante $K \subset \mathcal{B}_u$ est non-singulière si et seulement si D_{τ_0} est un point non-singulier de K.*

3.2. *Relations satisfaites par $D \in K^T$. Description des tableaux τ tels que $D_\tau \in K^T$*

Soit $D = (V_0, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}_u$. Pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$ les espaces V_i, V_j sont stables par u et on considère l'endomorphisme nilpotent $u_{|V_j/V_i} : V_j/V_i \to V_j/V_i$ induit par u. On a $\operatorname{rang} u_{|V_j/V_i} = \dim(V_i + u(V_j)) - i$, ce qui montre que l'application $D \mapsto \operatorname{rang} u_{|V_j/V_i}$ est semi-continue inférieurement.

Soit T standard. Notons $a_1 < \cdots < a_{\mu_1}$ (resp. $b_1 < \cdots < b_{\mu_2}$) les numéros dans la première (resp. seconde) colonne de T. On réindexe les numéros de la première colonne de a_1^* à $a_{\mu_1}^*$ comme suit.

- On pose $a_1^* = b_1 - 1$.
- Si $a_1^*, \ldots, a_{p-1}^*$ sont définis pour $p \leqslant \mu_2$, on pose $a_p^* = \mathrm{Max}(a \in \{a_1, \ldots, a_{\mu_1}\} \setminus \{a_1^*, \ldots, a_{p-1}^*\} \colon a < b_p)$.
- Pour $p > \mu_2$, on pose $a_p^* = \mathrm{Min}\{a_1, \ldots, a_{\mu_1}\} \setminus \{a_1^*, \ldots, a_{p-1}^*\}$.

Par exemple si $T = \begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & \\ 6 & \end{array}$ on a $(a_1^*, \ldots, a_4^*) = (2, 4, 1, 6)$.

Pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$ on note $s_{j/i}^T = \#\{p = 1, \ldots, \mu_2\colon\ i < a_p^* < b_p \leqslant j\}$. On a le lemme suivant :

Lemme 3.2. *L'ensemble* $\{D = (V_0, \ldots, V_n) \in K^T\colon\ \operatorname{rang} u_{|V_j/V_i} = s_{j/i}^T\}$ *est un ouvert non-vide de* K^T.

La proposition suivante provient du lemme :

Proposition 3.3. *Soit* $D = (V_0, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}_u$. *Si* D *est contenu dans la composante* K^T, *alors on a* $\operatorname{rang} u_{|V_j/V_i} \leqslant s_{j/i}^T$ *et* $\dim(V_i + u(V_j)) \leqslant s_{j/i}^T + i$ *pour tout* $0 \leqslant i < j \leqslant n$.

Soit $D = D_\tau = (V_0, \ldots, V_n)$ le drapeau associé au tableau lignes-standard τ. On note $a'_1, \ldots, a'_{\mu_1}$ (resp. $b'_1, \ldots, b'_{\mu_2}$) les numéros de haut en bas dans la première (resp. seconde) colonne de τ. Pour $0 \leqslant i < j \leqslant n$ on a $\operatorname{rang} u_{|V_j/V_i} = \#\{p \in \{1, \ldots, \mu_2\}\colon\ i < a'_p < b'_p \leqslant j\} =: s_{j/i}(\tau)$. D'après la Proposition 3.3, si $D_\tau \in K^T$, alors $s_{j/i}(\tau) \leqslant s_{j/i}^T$ pour tous $0 \leqslant i < j \leqslant n$. On montre que cette condition nécessaire est aussi suffisante :

Théorème 3.4. *Soient* T *standard et* τ *lignes-standard. On a* $D_\tau \in K^T$ *si et seulement si* $s_{j/i}(\tau) \leqslant s_{j/i}^T$ *pour tous* $0 \leqslant i < j \leqslant n$.

4. Résultat principal : critère de singularité

On note $X(\tau_0)$ l'ensemble des tableaux lignes-standards obtenus à partir du tableau τ_0 en échangeant deux numéros $i < j$, avec i dans la première colonne de τ_0. Par exemple pour $(\mu_1, \mu_2) = (4, 2)$ on a

$$X(\tau_0) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} 2 & 5 \\ 1 & 6 \\ 3 & \\ 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & \\ 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 4 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & \\ 1 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 2 & \\ 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 3 & \\ 2 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & \\ 3 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & \\ 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & \\ 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & \\ 4 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & \\ 5 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & \\ 6 & \end{array} \right\}.$$

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 4.1. *Si le diagramme* $Y(u)$ *a deux colonnes de longueurs* $\mu_1 \geqslant \mu_2$, *pour* T *standard, la composante* $K^T \subset \mathcal{B}_u$ *est singulière si et seulement si* $\#\{\tau \in X(\tau_0)\colon\ D_\tau \in K^T\} > \frac{\mu_1(\mu_1-1)}{2}$. *De plus, si* K^T *est non-singulière, alors on a l'égalité* $\#\{\tau \in X(\tau_0)\colon\ D_\tau \in K^T\} = \frac{\mu_1(\mu_1-1)}{2}$.

Par exemple la composante K^T est singulière pour

$$T = \begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & \\ 6 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & \\ 5 & \\ 7 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & \\ 5 & \\ 7 & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & \\ 6 & \\ 7 & \end{array} \ldots$$

Preuve (esquisse). Suivant la Proposition 3.1, il suffit d'étudier l'espace tangent à K^T en D_{τ_0}, noté $\mathcal{T}$. On indexe les vecteurs de la base $e_1, \ldots, e_n$ de sorte que $D_{\tau_0} = (\langle e_1, \ldots, e_i \rangle)_{i=0,\ldots,n}$. On note $B \subset GL(V)$ le sous-groupe des automorphismes triangulaires inférieurs. L'ensemble $\Omega = BD_{\tau_0}$ est ouvert dans la variété des drapeaux complets. Pour $D \in \Omega$ il existe d'unique scalaires $(\phi_{i,j}(D))_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ tels que les vecteurs $f_i(D) = e_i + \sum_{j=i+1}^n \phi_{i,j}(D) e_j$ forment une base adaptée à D. Les applications $\phi_{i,j} : \Omega \to \mathbb{C}$ sont algébriques et identifient Ω à un espace vectoriel de dual $\Omega^* = \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}\phi_{i,j}$. Soit $(\varepsilon_{i,j})$ une base duale de Ω. L'espace tangent $\mathcal{T}$ est un sous-espace de Ω, soit $\mathcal{T}^\perp = \{\phi \in \Omega^*\colon\ \phi(\gamma) = 0\ \forall \gamma \in \mathcal{T}\}$.

Soient $0 \leqslant i < j \leqslant n$. (a) Si $i > \mu_1$, alors on note τ le tableau obtenu à partir de τ_0 en échangeant i avec j et $i - \mu_1$ avec $j - \mu_1$. On a $D_\tau \in Z_u D_{\tau_0} \subset K^T$. La courbe $\{h_\tau(t) D_\tau\colon\ t \in \mathbb{C}\}$ où h_τ est défini dans 3.1 est contenue dans K^T et admet en D_{τ_0} le vecteur tangent $\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i-\mu_1,j-\mu_1}$. D'où $\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{i-\mu_1,j-\mu_1} \in \mathcal{T}$.

(b) Si $j \geqslant i + \mu_1$ alors on obtient $\phi_{i,j} \in \mathcal{T}^\perp$ en différentiant en 0 la relation $\det(u(f_i), f_1, \ldots, f_{i-1}) = 0$.

Soit $i \leqslant \mu_1$ et $j < i + \mu_1$. Le tableau τ obtenu à partir de τ_0 en échangeant i, j est un élément de $X(\tau_0)$.

(c) Si $D_\tau \in K^T$, alors la courbe $\{h_\tau(t)D_\tau \colon t \in \mathbb{C}\}$ est contenue dans K^T et admet en D_{τ_0} le vecteur tangent $\varepsilon_{i,j}$. D'où $\varepsilon_{i,j} \in \mathcal{T}$.

(d) Supposons $D_\tau \notin K^T$. Par le Théorème 3.4, il existe $0 \leqslant a < b \leqslant n$ tels que $s_{b/a}(\tau) > s^T_{b/a}$, d'où $s^T_{b/a} = s_{b/a}(\tau_0) = \mathrm{Max}(0, b - a - \mu_1)$. Par la Proposition 3.3, on a $\dim(V_a + u(V_b)) \leqslant \mathrm{Max}(a, b - \mu_1)$. En différentiant la relation d'annulation d'un mineur impliquée par cette inégalité, on montre $\phi_{i,j} - \phi_{i+\mu_1, j+\mu_1} \in \mathcal{T}^\perp$ si $j \leqslant \mu_2$, et $\phi_{i,j} \in \mathcal{T}^\perp$ si $j > \mu_2$.

Des points (a)–(d) on déduit $\dim \mathcal{T} = \#\{\tau \in X(\tau_0) \colon D_\tau \in K^T\} + \frac{\mu_2(\mu_2 - 1)}{2}$. D'où le théorème. $\square$

Références

[1] F.Y.C. Fung, On the topology of components of some Springer fibers and their relation to Kazhdan–Lusztig theory, Adv. Math. 178 (2003) 244–276.

[2] N. Spaltenstein, Classes unipotentes et sous-groupes de Borel, Lecture Notes in Math., vol. 946, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982.

[3] T.A. Springer, The unipotent variety of a semisimple group, in: Proc. Colloq. Alg. Geom. Tata Institute, Oxford Univ. Press, London, 1969, pp. 373–391.