Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1025–1030
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles/Systèmes dynamiques

# De Toda à KdV

Dario Bambusi [a], Thomas Kappeler [b], Thierry Paul [c]

[a] *Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano, Via Saldini 50, 20133 Milano, Italie*
[b] *Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich, Suisse*
[c] *CNRS et département de mathématiques et applications, UMR 8553, École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, 75730 Paris cedex 05, France*

Reçu le 3 février 2009 ; accepté après révision le 1er juillet 2009

Disponible sur Internet le 18 juillet 2009

Présenté par Jean-Pierre Ramis

**Résumé**

On considère la limite à grand nombre de particules d'un système hamiltonien de type « Toda périodique » pour une famille de conditions initiales proches de la solution d'équilibre. On montre que, dans la formulation de paire de Lax, les deux bords des spectres des matrices de Jacobi des conditions initiales sont déterminés, à une erreur près, par ceux de deux opérateurs de Hill, associés à la famille de conditions initiales considérées. On en déduit que les spectres des matrices de Jacobi, lors de l'évolution limite donnée par KdV, restent constants à une erreur près que nous estimons. Enfin on montre que les actions du système Toda, convenablement renormalisées, tendent vers celles des deux équations de KdV. ***Pour citer cet article : D. Bambusi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***


**Abstract**

**From Toda to KdV.** We consider the large number of particles limit of a periodic Toda lattice for a family of initial data close to the equilibrium state. We show that each of the two edges of the spectra of the corresponding Jacobi matrices is up to an error, determined by the spectra of two Hill operators, associated to this family. We then show that the spectra of the Jacobi matrices remain almost constant when the matrices evolve along the two limiting KdV equations. Finally we prove that the Toda actions, when appropriately renormalized, converge to the ones of KdV. ***To cite this article: D. Bambusi et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***


## Abridged English version

Let us consider a system of $N$ particles on the circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, interacting through the Toda Hamiltonian. In the Lax pair formalism such a system is described by $\dot{L} = [B, L]$. After doubling their size, the matrices $L$ and $B$ take the form

*Adresses e-mail :* Dario.Bambusi@unimi.it (D. Bambusi), tk@math.unizh.ch (T. Kappeler), paul@dma.ens.fr (T. Paul).

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2009.07.002

$$L=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & a_{2N}\\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & b_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2N-1}\\ a_{2N} & \cdots & \cdots & a_{2N-1} & b_{2N}\end{pmatrix} \quad\text{and}\quad B=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & -a_{2N}\\ -a_1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2N-1}\\ a_{2N} & \cdots & \cdots & -a_{2N-1} & 0\end{pmatrix},$$

where $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ satisfy $a_{i+N}=a_i$, $b_{i+N}=b_i$. We consider a family of initial data close to the equilibrium solution, given by $a_i^N = 1+\frac{1}{4N^2}\alpha(\frac{i}{N})$, $b_i^N=\frac{1}{4N^2}\beta(\frac{i}{N})$, $i=1,\dots,2N$, where $\alpha,\beta\in C^\infty(\mathbb{T})$ have vanishing averages. For $N$ large, the spectrum of the Jacobi matrix $L_N=L_N^{\alpha,\beta}$ is close to the one of the equilibrium state $\alpha=\beta=0$. The latter is given by:

$$\lambda_0=-2,\quad \lambda_{2l-1}=\lambda_{2l}=-2\cos\frac{l\pi}{N},\quad l=1,\dots,N-1,\quad \lambda_{2N-1}=2.$$

In this paper we show that, in the limit $N\to\infty$, the edges of the spectrum of $L_N$ near $\pm 2$ consist of eigenvalues of the form $\pm 2\mp\frac{1}{4N^2}\lambda_k^\pm + O(N^{-3+\delta})$, with $\delta>0$ arbitrarily small, where $\lambda_k^\pm$ are the eigenvalues of two Hill operators $H_\pm = -\frac{d^2}{dx^2}-2\alpha(2x)\mp\beta(2x)$, whereas the bulk of the spectrum is unchanged modulo $N^{-2-\frac14}$. More precisely, with $M_N:=[N^{1/4}]$, we have for any $\delta>0$,

$$\begin{aligned}
\lambda_j^N &= -2+\frac{1}{4N^2}\lambda_j^- + O\big(N^{-3+\delta}\big),\quad j=0,\dots,2M_N,\\
\lambda_{2l-1}^N=\lambda_{2l}^N &= -2\cos\frac{l\pi}{N}+O\big(N^{-2-\frac14}\big),\quad l=M_N+1,\dots,N-1-M_N,\\
\lambda_{2N-1-j}^N &= 2-\frac{1}{4N^2}\lambda_j^+ + O\big(N^{-3+\delta}\big),\quad j=0,\dots,2M_N.
\end{aligned}$$

This implies that the edges (resp. the bulk) of the spectrum of the Jacobi matrix $L_N^{\alpha_t,\beta_t}$, built up from the two functions $\alpha_t$, $\beta_t$ obtained by letting $-2\alpha(2x)\mp\beta(2x)$ evolve through the KdV equation, is $N^{-3+\delta}$-close (resp. $N^{-2-\frac14}$-close) to the edges (resp. the bulk) of the Jacobi matrix at $t=0$.

Finally we consider the Toda actions $I_n^N$ for $N$ large and their relations to the KdV actions $I_n^\pm$ associated to the Hill operators $H_\pm=-\frac{d^2}{dx^2}-2\alpha(2x)\mp\beta(2x)$. They are given by the formulae

$$I_n^N=\frac{1}{\pi}\int_{\lambda_{2n-1}^N}^{\lambda_{2n}^N}\operatorname{arcosh}\left((-1)^{N-n}\frac{\Delta^N(\lambda)}{2}\right)d\lambda \quad\text{and}\quad I_n^\pm=\frac{2}{\pi}\int_{\lambda_{2n-1}^\pm}^{\lambda_{2n}^\pm}\operatorname{arcosh}\left((-1)^{n}\frac{\Delta^\pm(\lambda)}{2}\right)d\lambda \tag{1}$$

where $\Delta^N(\lambda)$ is the discriminant of $L_N$ and $\Delta^\pm(\lambda)$ the one of the Hill operator $H_\pm$. We show that, for any $n\geqslant 1$,

$$8N^2 I_n^N\to I_n^- \quad\text{and}\quad 8N^2 I_{N-n}^N\to I_n^+ \quad\text{as } N\to\infty.$$

In a similar way one gets asymptotics of the Toda frequencies for $N$ large [1].

## 1. Introduction et résultats

Le système de Toda périodique à $N$ degrés de liberté est un système hamiltonien où $N$ particules se meuvent sur le cercle réel en interagissant avec un potentiel « plus proche voisin » du type $e^{q_i-q_{i+1}}$ introduit dans [7]. Il est bien connu, [4], que, par un changement (non symplectique) de coordonnées, ce système peut se mettre sous la forme de « Lax » $\dot L=[B,L]$, où, après doublement de la dimension,

$$L:=\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & a_{2N}\\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & b_3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2N-1}\\ a_{2N} & \cdots & \cdots & a_{2N-1} & b_{2N}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & -a_{2N}\\ -a_1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2N-1}\\ a_{2N} & \cdots & \cdots & -a_{2N-1} & 0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

et $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ satisfont $a_{i+N} = a_i$, $b_{i+N} = b_i$. Nous allons considérer des coefficients obtenus par discrétisation de fonctions lisses : $a_i = 1 + \epsilon^2\alpha(\frac{i}{N})$ et $b_i = \epsilon^2\beta(\frac{i}{N})$, $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{T})$ avec $|\epsilon| \ll 1$, une situation proche de la solution d'équilibre $a_i = 1$, $b_i = 0$, $i = 1, \ldots, 2N$. De telles limites ont été étudiées par plusieurs auteurs (voir e.g. [7]) dans des cas spéciaux ; la nouveauté pour le cas général traité ici est que, pour étudier cette limite, on a besoin de *deux* opérateurs de Hill – voir aussi [2] et [8] où se manisfeste ce phénomène dans l'étude de la dynamique limite.

Rappelons que, si l'on considère l'opérateur de Schrödinger $H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u$ sur le cercle, alors l'équation de Korteweg–de Vries

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \tag{3}$$

possède la forme de Lax :

$$\dot{H} = [B, H] \quad \text{où} \quad B = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x. \tag{4}$$

Définissons $L_N = L_N^{\alpha,\beta}$, donnée par (2) avec $a_i = 1 + \epsilon^2\alpha(\frac{i}{N})$, $b_i = \epsilon^2\beta(\frac{i}{N})$ et $\epsilon = \frac{1}{2N}$. Il est bien connu que les valeurs propres $\lambda_i^N$, $0 \leqslant i \leqslant 2N-1$ de $L_N$ sont toutes réelles et vérifient

$$\lambda_0^N < \lambda_1^N \leqslant \lambda_2^N < \cdots < \lambda_{2N-3}^N \leqslant \lambda_{2N-2}^N < \lambda_{2N-1}^N. \tag{5}$$

En particulier, pour $\alpha = \beta = 0$ (solution d'équilibre), le spectre de $L_N^{0,0}$ est donné par :

$$\lambda_0 = -2, \quad \lambda_{2l-1} = \lambda_{2l} = -2\cos\frac{l\pi}{N}, \quad l = 1, \ldots, N-1, \quad \lambda_{2N-1} = 2. \tag{6}$$

Le cœur de nos résultats est le Théorème suivant :

**Théorème 1.1.** *Soient $L_N$ la matrice $L_N^{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{T})$, $\int_{\mathbb{T}} \alpha(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{T}} \beta(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $M_N := [N^{\frac{1}{4}}]$. Alors le spectre de $L_N$ est constitué de $2N$ nombres réels $(\lambda_i^N)_{i=0,\ldots,2N-1}$ qui satisfont, pour tout $\delta > 0$, uniformément par rapport à $j = 0, \ldots, 2N-1$ et $\alpha$, $\beta$ dans tout ensemble borné de $C^\infty(\mathbb{T})$,*

$$\lambda_j^N = -2 + \frac{1}{4N^2}\lambda_j^- + O\big(N^{-3+\delta}\big), \quad j = 0, \ldots, 2M_N, \tag{7}$$

$$\lambda_{2l-1}^N, \lambda_{2l}^N = -2\cos\frac{l\pi}{N} + O\big(N^{-2-\frac{1}{4}}\big), \quad l = M_N + 1, \ldots, N-1-M_N, \tag{8}$$

$$\lambda_{2N-1-j}^N = 2 - \frac{1}{4N^2}\lambda_j^+ + O\big(N^{-3+\delta}\big), \quad j = 0, \ldots, 2M_N, \tag{9}$$

*où $(\lambda_i^\pm)_{i=0,\ldots,2M_N}$ sont les $2M_N + 1$ premières valeurs propres des opérateurs de Hill :*

$$H_\pm = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\alpha(2x) \mp \beta(2x). \tag{10}$$

**Corollaire 1.2.** *Soient $\alpha_t = -(u_t^- + u_t^+)/4$ et $\beta_t = (u_t^- - u_t^+)/2$ obtenues en faisant évoluer les conditions initiales $u^+(2x) = -2\alpha(2x) - \beta(2x)$ et $u^-(2x) = -2\alpha(2x) + \beta(2x)$ par l'équation de KdV. Soit $L_N^t = L_N^{\alpha_t,\beta_t}$ donnée par* (2) *et soit $\{\lambda_j^N(L_N^t)\}_{j=0,\ldots,2N-1}$ son spectre* (*qui est conservé par la dynamique de Toda*)*. Alors, uniformément en temps,*

$$\lambda_j^N\big(L_N^t\big) - \lambda_j^N\big(L_N^0\big) = O\big(N^{-2-\frac{1}{4}}\big). \tag{11}$$

Le deuxième résultat concerne le comportement asymptotique à grand $N$ des actions de Toda. Rappelons, [5], que, pour $1 \leqslant n \leqslant N-1$, la $n$ième action d'une matrice de Jacobi $L_N$ vérifie la formule

$$I_n^N = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_{2n-1}^N}^{\lambda_{2n}^N} \operatorname{arcosh}\left((-1)^{N-n}\frac{\Delta^N(\lambda)}{2}\right)\mathrm{d}\lambda, \tag{12}$$

où $\Delta^N(\lambda)$ est le discriminant de $L_N$. On a une formule similaire pour les actions $I_n^\pm$ des deux opérateurs de Hill $H_\pm$ définis par (10) ; voir (19) plus bas.

**Théorème 1.3.** *Pour tout $n \geqslant 1$,*

$$8N^2 I_n^N \to I_n^- \quad \textit{et} \quad 8N^2 I_{N-n}^N \to I_n^+ \quad \textit{quand } N \to \infty.$$

D'une façon analogue, on obtient le comportement asymptotique à grand $N$ des fréquences du système de Toda [1].

## 2. Quelques éléments de preuve

### 2.1. Lax et Töplitz

L'idée principale de la preuve du Théorème 1.1 consiste à considérer la matrice de Jacobi $L_N$ comme la matrice dans une base canonique d'un opérateur de Töplitz pour la quantification du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ avec une constante de Planck $\hbar = \frac{1}{4\pi N} = \frac{\epsilon}{2\pi}$. Cette identification a été proposée par Bloch et al. [3] pour étudier la limite à grand $N$ du système de Toda périodique. Nous allons, dans cet article, nous placer dans ce formalisme pour étudier le spectre de $L_N^{\alpha,\beta}$.

Pour cela on considère l'espace de Hilbert de dimension $2N$, $\mathcal{H}_{2N}$, généré par les fonctions *Theta* définies par :

$$\Theta_j(z = x + iy) := (4N)^{1/4} e^{-\pi j^2/2N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(2Nn^2+2jn)} e^{2\pi i z(j+2Nn)}, \quad j = 0, \ldots, 2N-1. \tag{13}$$

Le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est celui de $L^2([0,1] \times [0,1], e^{-4\pi N y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, de manière à ce que $\{\Theta_j\}_{j=0,\ldots,2N-1}$ soit une base orthonormée de $\mathcal{H}_{2N}$. La matrice $L_N^{\alpha,\beta}$ est la matrice, dans la base $\{\Theta_{2N-1}, \ldots, \Theta_0\}$, d'un opérateur de Töplitz $T_N^{\alpha,\beta}$ de symbole $\epsilon^2\beta(2x) + 2(1 + \epsilon^2\alpha(2x))\cos 2\pi y + O(\epsilon^3)$ (voir [3]). Il est donc élémentaire de constater que les vecteurs $\psi^k \in \mathcal{H}_{2N}$, $k = 0, \ldots, 2N-1$, définis par :

$$\psi^k(z) = \frac{1}{(2N)^{1/2}} \sum_{j=0}^{2N-1} e^{\pi i \frac{kj}{N}} \Theta_j(z) \tag{14}$$

sont vecteurs propres de l'opérateur $T_N^{0,0}$ dans $\mathcal{H}_{2N}$, de valeurs propres correspondantes données par (6). On remarque que $\psi^k(z) = (4N)^{-1/4} \int_0^1 \rho(z, k/2N + is) e^{-2\pi N s^2}\,\mathrm{d}s$, où $\rho(z, \overline{z'}) := \sum_{j=0}^{2N-1} \Theta_j(z)\overline{\Theta_j(z')}$.

### 2.2. Quasimodes

Dans l'idée de [6] nous allons construire des quasimodes de $T_N^{\alpha,\beta}$ comme superpositions pondérées d'états cohérents $\rho(z, k/2N + is)$ et nous verrons apparaître l'équation de KdV comme *équation de transport*. Définissons, pour $\mu \in C^\infty(\mathbb{T})$, $\mu(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{2\pi i k x}$,

$$\psi_\mu^k(z) = (4N)^{-1/4} \int_0^1 \rho(z, k/2N + is)\mu(s) e^{-2\pi N s^2}\,\mathrm{d}s. \tag{15}$$

Le résultat suivant, conséquence du calcul symbolique « à la Töplitz » mais que l'on peut obtenir ici par un calcul direct, est le cœur de la preuve :

**Théorème 2.1.** *Pour tout $\mu, \mu' \in C^\infty(\mathbb{T})$ arbitraire,*

$$\langle \psi_\mu^k, \psi_{\mu'}^{k'} \rangle = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\mu_l} \mu'_{l-k+k'} e^{-\pi l^2/2N} e^{-\pi(l-k+k')^2/2N}.$$

$$\textit{En particulier} \quad \|\psi_\mu^k\|^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\mu_l|^2 e^{-\pi l^2/N} \sim \|\mu\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \quad \textit{quand } N \to +\infty.$$

*De plus, si $T_N^{\alpha,\beta}$ est l'opérateur dont la matrice sur la base $\{\Theta_{2N-1}, \ldots, \Theta_0\}$ est $L_N^{\alpha,\beta}$ et $\epsilon = 1/2N$,*

$$T_N^{\alpha,\beta}\psi_\mu^k = \psi_{\mu^k}^k + O(\epsilon^3) \tag{16}$$

*avec*

$$\mu^k(x) = \left(-2\cos\left(2\pi k\epsilon - i\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \epsilon^2\left(-2\alpha(2x)\cos\left(2\pi k\epsilon - i\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \beta(2x)\right)\right)\mu(x). \tag{17}$$

On voit donc que $\psi_\mu^k$ sera un quasimode de $T_N^{\alpha,\beta}$ à l'ordre $\epsilon^3$ si $\mu$ est lui-même un quasimode de l'opérateur $-2\cos(2\pi k\epsilon - i\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) + \epsilon^2(-2\alpha(2x)\cos(2\pi k\epsilon - i\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) + \beta(2x))$. Plusieurs comportements sont à envisager :

– Le milieu du spectre : $l = M_N + 1, \dots, N - 1 - M_N$.
  On a, pour les valeurs propres distinctes de $L_N^{0,0}$, toutes de multiplicité deux,
  $$\left|\cos\pi(l+1)\epsilon - \cos\pi l\epsilon\right| \sim 4\pi(2M_N+1)\epsilon^2 \geqslant \epsilon^{7/4} > \epsilon^2 \quad \text{quand } \epsilon \to 0,$$
  et donc la théorie des perturbations (avec dégénérescence) s'applique. On montre facilement que la condition de moyenne nulle de $\alpha$, $\beta$ donne une correction au premier ordre qui est d'ordre $\epsilon^{2+\frac{1}{4}}$.
– Les bords du spectre : $0 \leqslant k \leqslant 2M_N$ et $2N - 1 - 2M_N \leqslant k \leqslant 2N - 1$.
  L'équation aux valeurs propres
  $$\left(-2\cos\left(2\pi k\epsilon - i\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \epsilon^2\left(-2\alpha(2x)\cos\left(2\pi k\epsilon - i\epsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \beta(2x)\right)\right)\mu(x) = \lambda\mu(x)$$
  devient, avec l'ansatz $\mu(x) = e^{-2i\pi kx}\nu_k(x)$ (resp. $e^{-2i\pi(k-N)x}\nu_k(x)$) pour $k$ proche de 0 (resp. $2N-1$),
  $$\epsilon^2\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2\alpha(2x) \pm \beta(2x)\right)\nu_k = \left(2 \pm \lambda_k^N\right)\nu_k + O(\epsilon^3)$$
  suivant le bord considéré. On reconnaît là les deux opérateurs de Hill $H_\pm$.

Un argument de comptage montre qu'on obtient bien ainsi tout le spectre de $L_N^{\alpha,\beta}$, les phénomènes de dégénérescence étant responsables du terme supplémentaire en $N^\delta$ et la valeur de $M_N = [N^{1/4}]$ assurant l'uniformité de la transition entre les trois parties du spectre. Le Corollaire 1.2 se démontre grâce à l'uniformité des estimations semiclassiques par rapport aux normes *sup* des dérivées de symboles, et au fait que les normes *sup* restent bornées uniformément en temps lors de l'évolution par KdV [1].

### 2.3. Intégrabilité

La preuve du Théorème 1.3 repose sur le fait que l'on puisse écrire les discriminants $\Delta^N(\lambda)$ de la matrice de Jacobi $L_N$ et ceux, $\Delta^\pm(\lambda)$, de $H_\pm$ comme :

$$\Delta^N(\lambda)^2 - 4 = \prod_{j=0}^{2N-1}\left(\lambda_j^N - \lambda\right) \quad \text{et} \quad \Delta^\pm(\lambda)^2 - 4 = 4\prod_{j\geqslant 0}\frac{\lambda_j^\pm - \lambda}{\pi_j^2}, \quad \pi_j := \pi\left[(j+1)/2\right] \quad (j \geqslant 1), \quad \pi_0 = 1.$$

Soit $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ avec $\Lambda_1 \leqslant 0 < \Lambda_2$. Le Théorème 1.3 est alors une conséquence du

**Théorème 2.2.** *Uniformément pour $\Lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda_2$,*

$$\lim_{N\to\infty}(-1)^N\Delta^N\left(-2+\epsilon^2\lambda\right) = \Delta^-(\lambda) \quad \textit{et} \quad \lim_{N\to\infty}\Delta^N\left(2-\epsilon^2\lambda\right) = \Delta^+(\lambda), \tag{18}$$

*et de la formule* (12) *pour les actions de Toda, ainsi que la formule suivante pour les variables actions $I_n^\pm$ de $H_\pm$ :*

$$I_n^\pm = \frac{2}{\pi}\int_{\lambda_{2n-1}^\pm}^{\lambda_{2n}^\pm} \operatorname{arcosh}\left((-1)^n\frac{\Delta^\pm(\lambda)}{2}\right)\mathrm{d}\lambda. \tag{19}$$

## Références

[1] D. Bambusi, T. Kappeler, T. Paul, en préparation.
[2] D. Bambusi, A. Ponno, On metastability in FPU, Comm. Math. Phys. 264 (2006) 539–561.
[3] A. Bloch, F. Golse, T. Paul, A. Uribe, Dispersionless Toda and Toeplitz operators, Duke Math. J. 117 (2003) 157–196.
[4] H. Flaschka, The Toda lattice I. Existence of integrals, Phys. Rev. B 9 (1974) 1924–1925.
[5] A. Henrici, T. Kappeler, Global Birkhoff coordinates for the periodic Toda lattice, Nonlinearity 21 (2008) 2731–2758.
[6] T. Paul, A. Uribe, A construction of quasimodes using coherent states, Ann. H. Poincaré Phys. Théo. 59 (4) (1993) 357–382.
[7] M. Toda, Theory of Nonlinear Lattices, 2nd edition, Springer Series on Solid-State Sciences, vol. 20, Springer, 1989.
[8] C. Wayne, G. Schneider, Counter-propagating waves on fluid surfaces and the continuum limit of the Fermi–Pasta–Ulam model, in: International Conference on Differential Equations, Berlin, 1999, World Sci. Publ., 2000, pp. 390–404.