Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1281–1284
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse fonctionnelle

Unicité des pré-générateurs dans les espaces localement convexes

Ludovic Dan Lemle [a], Liming Wu [b,c]

[a] The Faculty of Engineering, Politehnica University of Timişoara, 331128 Hunedoara, Romania
[b] Laboratoire de mathématiques, CNRS-UMR 6620, Université Blaise-Pascal Clermont 2, 63177 Aubière, France
[c] Department of Mathematics, Wuhan University, 430072 Hubei, P.R. China

Reçu le 3 décembre 2008 ; accepté le 1er octobre 2009

Disponible sur Internet le 17 octobre 2009

Présenté par Paul Malliavin

Résumé

Le but principal de cette Note est de généraliser un théorème de Arendt concernant l'unicité des C_0-semi-groupes, comme dans le cas des espaces de Banach au cas des espaces localement convexes, plus précisement, nous démontrons que les cores sont les seuls domaines d'unicité pour les C_0-semi-groupes dans les espaces localement convexes. Comme application nous donnons des conditions necessaires et suffisantes pour la $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$-unicité des solutions faibles de l'équation de transport de masse. ***Pour citer cet article : L.D. Lemle, L. Wu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Uniqueness of pre-generators on locally convex spaces. The main purpose of this Note is to generalize a theorem of Arendt about uniqueness of C_0-semigroups from Banach space setting to the general locally convex vector spaces, more precisely, we show that cores are the only domains of uniqueness for C_0-semigroups on locally convex spaces. As an application, we find a necessary and sufficient condition for that the mass transport equation has one unique $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ weak solution. ***To cite this article: L.D. Lemle, L. Wu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. L'unicité des C_0-semi-groupes

Soit $(\mathcal{X}, \beta)$ un espace localement convexe de Hausdorff, séquentiellement complet. En général pour un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur l'espace $(\mathcal{X}, \beta)$, le semi-groupe adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geqslant 0}$ n'est pas fortement continu sur l'espace dual $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ par rapport à la topologie forte $\beta(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Dans [6, p. 563] le second auteur et Zhang ont introduit une nouvelle topologie sur l'espace dual $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ pour laquelle les semi-groupes usuels deviennent des C_0-semi-groupes. Il s'agit de *la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de* $(\mathcal{X}, \beta)$ notée par $\mathcal{C}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.

Soit $\mathcal{A} : \mathcal{D} \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire de domaine $\mathcal{D}$ dense dans $(\mathcal{X}, \beta)$. On dit que $\mathcal{A}$ est *un pré-générateur* sur $(\mathcal{X}, \beta)$ s'il existe un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur $(\mathcal{X}, \beta)$ dont le générateur $\mathcal{L}$ est une extension de $\mathcal{A}$. On dit

Adresses e-mail : dan.lemle@fih.upt.ro (L.D. Lemle), Li-Ming.Wu@math.univ-bpclermont.fr (L. Wu).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.10.001

que $\mathcal{A}$ est *un générateur essentiel* sur $(\mathcal{X},\beta)$ (ou $(\mathcal{X},\beta)$-unique) si $\mathcal{A}$ est un opérateur pré-fermé et si sa fermeture $\overline{\mathcal{A}}$ par rapport à la topologie β est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $(\mathcal{X},\beta)$.

Le but principal de cette Note est de généraliser un théorème de Arendt concernant l'unicité des C_0-semi-groupes comme dans le cas des espaces de Banach au cas des espaces localement convexes et de donner une démonstration de l'implication difficile du théorème suivant de Wu and Zhang [6, Theorem 2.1, p. 570] relatif à l'unicité des pré-générateurs dans les espaces localement convexes.

Théorème 1.1. *Soient $(\mathcal{X},\beta)$ un espace localement convexe de Hausdorff séquentiellement complet, $\mathcal{Y}$ le dual topologique de $(\mathcal{X},\beta)$ et $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire dans $\mathcal{X}$ de domaine $\mathcal{D}$ dense dans $(\mathcal{X},\beta)$. Supposons qu'il existe un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur $(\mathcal{X},\beta)$ dont le générateur $\mathcal{L}$ est une extension de $\mathcal{A}$ (hypothèse d'existence du pré-générateur). Les affirmations suivantes sont équivalentes* :

(i) *$\mathcal{A}$ est un générateur essentiel sur $(\mathcal{X},\beta)$ (ou $(\mathcal{X},\beta)$-unique)*;

(ii) *la fermeture de $\mathcal{A}$ dans $(\mathcal{X},\beta)$ est exactement $\mathcal{L}$ (donc $\mathcal{D}$ est un core pour $\mathcal{L}$)*;

(iii) *$\mathcal{A}^*=\mathcal{L}^*$ est le générateur du C_0-semi-groupe adjoint $\{T^*(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$*;

(iv) *pour $\lambda>\omega$, l'image $(\lambda I-\mathcal{A})(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{X},\beta)$*;

(v) *(propriété de Liouville) pour tout $\lambda>\omega$, $\mathcal{K}er(\lambda I-\mathcal{A}^*)=\{0\}$ (c'est-à-dire, si $y\in\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ satisfait l'égalité $(\lambda I-\mathcal{A}^*)y=0$, alors $y=0$)*;

(vi) *(unicité des solutions pour l'équation de la résolvante) pour tout $\lambda>\omega$ et tout $y\in\mathcal{Y}$, l'équation de la résolvante de $\mathcal{A}^*$,*
$$(\lambda I-\mathcal{A}^*)z=y,$$
a une solution unique $z=((\lambda I-\mathcal{A})^{-1})^*y$;

(vii) *(unicité des solutions fortes pour le problème de Cauchy) pour tout $x\in\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}})$, le problème de Cauchy (ou l'équation de Kolmogorov rétrograde)*
$$\begin{cases}\partial_t v(t)=\overline{\mathcal{A}}v(t),\\ v(0)=x,\end{cases}$$
a une $(\mathcal{X},\beta)$-unique solution forte $v(t)=T(t)x$;

(viii) *(unicité des solutions faibles pour le problème de Cauchy dual) pour tout $y\in\mathcal{Y}$, le problème de Cauchy dual (ou l'équation de Kolmogorov progressive)*
$$\begin{cases}\partial_t u(t)=\mathcal{A}^*u(t),\\ u(0)=y,\end{cases}$$
a une $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$-unique solution faible $u(t)=T^*(t)y$;

(ix) *il existe un unique C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur $(\mathcal{X},\beta)$ dont le générateur $\mathcal{L}$ étend $\mathcal{A}$.*

Si $\mathcal{A}$ est un opérateur differentiel elliptique de deuxième ordre de domaine $\mathcal{D}=C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors les solutions faibles pour le problème de Cauchy dual dans le Théorème 1.1(viii) correspondent exactement aux solutions au sens des distributions dans la théorie des équations aux dérivées partielles et le problème de Cauchy dual devient l'équation de Fokker–Planck de la diffusion de la chaleur. Il faut remarquer l'équivalence importante entre $(\mathcal{X},\beta)$-unicité de l'opérateur $\mathcal{A}$, $(\mathcal{X},\beta)$-unicité de la solution forte pour le problème de Cauchy et $(\mathcal{Y},\mathcal{C}(\mathcal{Y},\mathcal{X}))$-unicité de la solution faible pour le problème de Cauchy dual associé à l'opérateur $\mathcal{A}$.

Plusieurs relations d'équivalence du théorème précédent, spécialement l'équivalence entre (i), (vii), (viii) et (ix), sont fondamentales et elles sont bien connues dans le cas des espaces de Banach, comme on peut le voir dans Arendt [1], Eberle [2] et le second auteur [4] and [5], etc. Mais il faut remarquer que seule l'unicité de la solution forte a été étudiée systématiquement dans la théorie des C_0-semi-groupes. Il est aussi important de souligner la subtilité du problème d'unicité : en l'absence d'hypothèse d'existence du pré-générateur dans le théorème précédent, même dans le cas des espaces de Banach, l'existence et l'unicité de la solution forte ne sont pas suffisantes pour avoir la propriété du générateur essentiel de (i) (voir [1]).

Le problème principal est de démontrer l'équivalence entre (i) et (ix). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ix) est immédiate : si $\mathcal{L}'$ est une autre extension de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{L}'$ soit le générateur d'un C_0-semi-groupe sur $(\mathcal{X},\beta)$, alors, compte tenu de (ii), il en résulte que $\mathcal{L}'=\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{L}$.

La suffisance de (ix) est difficile et elle a été démontrée dans [3]. Nous avons suivi la stratégie de Arendt dans les espaces de Banach, mais quelques ingrédients de base se sont avérés être plus difficiles dans le contexte des espaces localement convexes. Pour surmonter ces difficultés, l'idée principale est de trouver une bonne calibration dans la démonstration du théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soient $(\mathcal{X}, \beta)$ un espace localement convexe de Hausdorff séquentiellement complet, $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{X}$ ayant pour générateur l'opérateur $\mathcal{L}$ et $\mathcal{D}$ un sous-espace de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Considérons la restriction $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}$ n'est pas un core de $\mathcal{L}$, alors il existe un nombre infini d'extensions de $\mathcal{A}$ qui sont des générateurs.*

D'après ce théorème les cores sont les seuls domaines d'unicité pour C_0-semi-groupes dans les espaces localement convexes qui généralise un résultat de Arendt [1, Theorem 1.33, p. 46] concernant l'unicité des C_0-semi-groupes, ce résultat joue un rôle clef dans la démonstration de la suffisance de (ix).

2. $L^1(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$-unicité des solutions faibles pour l'équation de transport de masse

On considère l'opérateur,

$$\mathcal{A}f = b\nabla f, \quad \forall f \in C_0^\infty\big(\mathbb{R}^d\big),$$

où le champ vectoriel $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzien. Soit ∂ le point à infini de $\mathbb{R}^d$. Considèrons l'équation :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t, \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $(X_t(x))_{0\leqslant t<\tau_e}$, où

$$\tau_e = \inf\{t \geqslant 0 \mid X_t = \partial\}$$

est le temps d'explosion. Alors la famille $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$, où

$$P_t f(x) = f\big(X_t(x)\big)1_{[t<\tau_e]}$$

est un C_0-semi-groupe sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$ par rapport à la topologie $\mathcal{C}(L^\infty, L^1)$, et

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t b\nabla f(X_s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall f \in C_0^\infty\big(\mathbb{R}^d\big).$$

Par conséquent f appartient au domaine du générateur $\mathcal{L}_{(\infty)}$ du C_0-semi-groupe $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ sur $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$, et

$$\mathcal{L}_{(\infty)} f = \mathcal{A}f = b\nabla f.$$

Il s'ensuit donc que $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ est un pré-générateur sur $(L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$. Alors on peut étudier la $(L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$-unicité de l'opérateur $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Le résultat fondamental de cette section est le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $b(x) \neq 0$ pour tout $|x| \geqslant R$. Supposons qu'il existe une fonction mesurable localement bornée $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\left(b(x) \cdot \frac{x}{|x|}\right)^- \leqslant \beta(|x|), \quad \forall |x| \geqslant R.$$

Si

$$\int_R^\infty \frac{1}{\beta(x)}\,\mathrm{d}x = \infty,$$

alors $(\mathcal{A}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ *est* $(L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x), \mathcal{C}(L^\infty, L^1))$*-unique. En particulier, pour tout* $h \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$*, l'équation de transport de masse,*

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = -\operatorname{div}(b\rho(t,x)), \\ \rho(0,x) = h(x), \end{cases}$$

a une $L^1(\mathbb{R}^d, \mathrm{d}x)$*-unique solution faible.*

Références

[1] W. Arendt, The abstract Cauchy problem, special semigroups and perturbation, in: R. Nagel (Ed.), One Parameter Semigroups of Positive Operators, in: Lecture Notes in Math., vol. 1184, Springer, Berlin, 1986.

[2] A. Eberle, Uniqueness and non-uniqueness of singular diffusion operators, Doctor thesis, Bielefeld, 1997.

[3] L.D. Lemle, Semi-groupes intégrés d'opérateurs, l'unicité des pré-générateurs et applications, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2007 (tel. 00139507).

[4] L. Wu, Uniqueness of Schrödinger operators restricted in a domain, J. Funct. Anal. 153 (1998) 276–319.

[5] L. Wu, Uniqueness of Nelson's diffusions, Probab. Theory Relat. Fields 114 (1999) 549–585.

[6] L. Wu, Y. Zhang, A new topological approach to the L^∞-uniqueness of operators and the L^1-uniqueness of Fokker–Planck equations, J. Funct. Anal. 241 (2006) 557–610.